УДК 517.928

ИНТЕГРАЛЬНЫЙ МЕТОД ЭЙЛЕРА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ КАРАТЕОДОРИ

 О.П. Филатов[1]

Дается оценка точности приближения решений дифференциального уравнения типа Каратеодори с начальным условием с помощью дискретной схемы, построенной на основании интегрального метода Эйлера.

1. Постановка задачи и основные определения

Рассмотрим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(0) = x_0 \tag{1}$$

на отрезке $I = [0, T]$, $T > 0$, где функция $f : D \to \mathbb{R}^m, D = I \times \mathbb{R}^m$. Пространство $\mathbb{R}^m$ предполагаем евклидовым со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и соответствующей нормой $\| \cdot \|$.

Множество всех функций $g : I \to R$, интегрируемых по Лебегу на отрезке I, будем обозначать $L_1(I)$.

Если функция f является достаточно гладкой, то решение задачи (1) можно приближенно найти методом Эйлера [1]

$$y(t_{j+1}) = y(t_j) + hf(t_j, y(t_j)), \quad j = 0, 1, \dots, N-1, \tag{2}$$

где $y(0) = x_0$, $h = T/N$ — шаг сетки $\Pi = \{t : t = jh,\ j = 0, 1, \dots, N\}$, построенной на отрезке I, $t_j = jh$.

В случае разрывной функции f метод Эйлера, вообще говоря, не применим. Не применимы и любые другие сеточные методы, например, методы Рунге—Кутта, поскольку значения функции на множестве меры 0 не определяют с достаточной точностью интеграл от такой функции на отрезке $[t_j, t_j + h]$.

[1]Филатов Олег Павлович (filt@ssu.samara.ru), кафедра уравнений математической физики Самарского государственного университета, 443011, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

Для разрывных функций вектор скорости $f(t_j, y(t_j))$ в правой части (2) естественно заменить средним значением

$$\frac{1}{h}\int\limits_{t_j}^{t_j+h} f(s, y(t_j))\,ds$$

по отрезку времени $[t_j, t_j{+}h]$. В результате получается разностное уравнение

$$y(t_{j+1}) = y(t_j) + \int\limits_{t_j}^{t_j+h} f(t_j, y(t_j))\,ds, \quad j = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{3}$$

где $y(0) = x_0$. Схему (3) будем называть интегральным методом Эйлера для задачи (1).

При практической реализации схемы на ЭВМ интеграл (Лебега) в правой части (3) вычисляется приближенно на каждом шаге, например, заменяется соответствующей суммой Лебега. Кроме того, добавляются ошибки округления при реальных вычислениях. Это приводит к необходимости исследования более общей разностной задачи

$$z(t_{j+1}) = z(t_j) + \int\limits_{t_j}^{t_j+h} f(s, z(t_j))\,ds + \varepsilon_j, \quad j = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{4}$$

где $z(0) = x_0$. Здесь вектор $\varepsilon_j \in \mathbb{R}^m$ моделирует неточности вычислений по сравнению со схемой (3) на шаге с номером j.

Основной целью работы является получение оценки нормы $\|x(t) - z(t, h)\|$ на сетке Π для произвольного решения $x(t)$ задачи (1) и решения $z(t, h)$ разностной задачи (4) в классе функций $f : I \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, определяемого следующими условиями:

1) отображение $f(\cdot, x)$ измеримо для любого $x \in \mathbb{R}^m$ и справедлива оценка линейного роста $\|f(t, x)\| \leqslant \gamma(t)(1 + \|x\|)$, где $\gamma \in L_1(I)$;

2) для любых $x, y \in \mathbb{R}^m$ и любого $t \in I$ выполняется неравенство

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leqslant l(t)\sigma(\|x - y\|),$$

где функция $l \in L_1(I)$, а функция $\sigma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ является непрерывной и строго монотонной, $\sigma(0) = 0$.

Под решением дифференциального уравнения (1) понимается абсолютно непрерывная на отрезке I функция $x : I \to \mathbb{R}^m$, которая удовлетворяет уравнению почти всюду на I.

При выполнении условий 1 и 2 такие решения всегда существуют (см. п. 2).

Единственность решения задачи (1) имеет место, например, если функция f удовлетворяет условию Липшица, которое получается из условия 2 при $\sigma(u) = u$, или удовлетворяет более общему требованию [2, 3]

$$\langle x - y, f(t, x) - f(t, y)\rangle \leqslant \lambda(t)\|x - y\|^2, \tag{5}$$

где $\lambda \in L_1(I)$. Заметим, что для дифференциальных включений аналог условия (5) в [4] называется условием односторонней непрерывности функции f по Липшицу.

В данной работе мы будем дополнительно предполагать, что для функции f выполняется следующее условие:
3) для некоторой функции $\omega : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ имеет место неравенство

$$\langle x - y, f(t, x) - f(t, y)\rangle \leqslant \|x - y\|\omega(t, \|x - y\|)$$

для любых $x, y \in \mathbb{R}^m$, $t \in I$, где функция $\omega(t, u)$ измерима по $t \in I$ для любого $u \in \mathbb{R}_+$ и непрерывна по $u \in \mathbb{R}_+$ при любом $t \in I$, при этом $|\omega(t, u)| \leqslant \lambda(t)(1 + u)$, $\omega(t, 0) = 0\ \forall t \in I$.

В частности, если $\omega(t, u) = \lambda(t)u$, то получается соотношение (5).

Отметим, что условие 3 в общем случае не гарантирует единственность решения задачи (1), но позволяет получить оценки отклонения любого решения задачи от решения разностного уравнения (3) или (4).

2. Обозначения и леммы

Для функции $\gamma \in L_1(I)$ из условия 1 обозначим

$$\kappa(h) = \sup\left\{\int_t^{t+h} \gamma(s)\, ds : t, t + h \in I\right\},$$

$$M(t, x_0) = (\|x_0\| + \Gamma(t)) \exp(\Gamma(t)), \quad \Gamma(t) = \int_0^t \gamma(s)\, ds.$$

Кроме того, пусть

$$\varepsilon(h) = \max\{\|\varepsilon_j\| : j = 0, 1. \dots, N - 1\}, \tag{6}$$

где вектор $\varepsilon_j \in \mathbb{R}^m$ из разностной задачи (4), h — шаг сетки П.

Лемма 1. Пусть правая часть f дифференциального уравнения (1) удовлетворяет условию 1. Тогда, если решение $x(t)$, $t \in I$ задачи (1) существует, то справедлива оценка

$$\|x(t)\| \leqslant M(t, x_0), \quad t \in I.$$

Доказательство. На основании свойства 1 получим оценку

$$\|x(t)\| \leqslant \|x_0\| + \int_0^t \gamma(s)\Big(1 + \|x(s)\|\Big)\, ds, \quad t \in I.$$

Поэтому по известной лемме Гронуолла отсюда следует, что

$$\|x(t)\| \leqslant (\|x_0\| + \Gamma(t)) \exp(\Gamma(t)\Big), \quad t \in I.$$

Лемма доказана.

Из леммы 1 следует [2], что любое решение задачи (1) с правой частью f, для которой выполняется условие 1 и имеет место непрерывность функции $f(t,x)$ по фазовой переменной $x \in \mathbb{R}^m$, можно считать определенным на отрезке I.

Рассмотрим теперь обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\dot{v} = \omega(t,v) + l(t)\sigma(\mu(t,h,x_0)) + h^{-1}\varepsilon(h) \tag{7}$$

с начальным условием $v(0) = 0$, где функция ω из условия 3, а функции l и σ из условия 2. Здесь

$$\mu(t,h,x_0) = \big(1 + N(t,h,x_0)\big)\kappa(h) + \varepsilon(h),$$

$$N(t,h,x_0) = (\|x_0\| + h^{-1}t\varepsilon(h) + \Gamma(t))\exp(\Gamma(t)).$$

Правая часть дифференциального уравнения (7) удовлетворяет условию 1 при $m = 1$ и является непрерывной по переменной $v \in \mathbb{R}_+$. Поэтому на основании леммы 1 любое решение задачи (7) можно считать определенным на отрезке I.

В таком случае существует верхнее решение $V(t,h)$ задачи (7), определенное на отрезке I. Для любого другого решения этой задачи $v = v(t)$, $t \in I$ выполняется неравенство $v(t) \leqslant V(t,h)$ для любого $t \in I$.

Полагая в правой части (7) $\varepsilon(h) = 0$, получим задачу

$$\dot{u} = \omega(t,u) + l(t)\sigma\big(\mu_0(t,h,x_0)\big), \quad u(0) = 0, \tag{8}$$

где

$$\mu_0(t,h,x_0) = \big(1 + M(t,x_0)\big)\kappa(h),$$

верхнее решение которой обозначим $U(t,h)$.

Лемма 2. В условиях леммы 1 для решения $z(t,h)$, $t \in \Pi$ разностной задачи (4) выполняется неравенство

$$\|z(t,h)\| \leqslant N(t,h,x_0), \quad t \in \Pi.$$

Доказательство. Обозначим $\alpha_n = \|z(t_n,h)\|$. Тогда на основании условия 1 и (6) получим оценку

$$\alpha_{n+1} \leqslant \alpha_n + \varepsilon(h) + \int\limits_{t_n}^{t_n+h} \gamma(s)(1+\alpha_n)\,ds = a_n + \alpha_n b_n,$$

где

$$a_n = \varepsilon(h) + \int\limits_{t_n}^{t_n+h} \gamma(s)\,ds, \quad b_n = 1 + \int\limits_{t_n}^{t_n+h} \gamma(s)\,ds.$$

Следовательно,

$$\alpha_{n+1} \leqslant \alpha_0 b_0 b_1 \cdots b_n + a_0 b_1 b_2 \cdots b_n + a_1 b_2 b_3 \cdots b_n + \ldots +$$
$$+ a_{n-2} b_{n-1} b_n + a_{n-1} b_n + a_n.$$

Поскольку при любом $k = 0, 1, \ldots, n$ имеют место неравенства

$$b_k b_{k+1} \cdots b_n \leqslant b_0 b_1 \cdots b_n \leqslant \prod_{j=0}^{n} \left(1 + \int\limits_{t_j}^{t_j+h} \gamma(s)\, ds \right) \leqslant$$

$$\leqslant \prod_{j=0}^{n} \exp\left(\int\limits_{t_j}^{t_j+h} \gamma(s)\, ds \right) = \exp\left(\sum_{j=0}^{n} \int\limits_{t_j}^{t_j+h} \gamma(s)\, ds \right) = \exp\left(\int\limits_{0}^{t_{n+1}} \gamma(s)\, ds \right),$$

то

$$\alpha_{n+1} \leqslant \left(\alpha_0 + \sum_{j=0}^{n} a_j \right) \exp\left(\int\limits_{0}^{t_{n+1}} \gamma(s)\, ds \right) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\alpha_0 + (n+1)\varepsilon(h) + \int\limits_{0}^{t_{n+1}} \gamma(s)\, ds \right) \exp\left(\int\limits_{0}^{t_{n+1}} \gamma(s)\, ds \right),$$

что и требовалось доказать.

3. Основной результат

В следующей теореме приводятся оценки нормы отклонения произвольного решения дифференциальной задачи (1) от решения разностной задачи (3) или (4). Для получения оценок используются верхние решения задач (7) и (8).

Теорема 1. Пусть функция $f : D \to \mathbb{R}^m$ удовлетворяет условиям 1–3, $x(t)$ — произвольное решение задачи (1), а $y(t,h)$ и $z(t,h)$ — решения разностных задач (3) и (4) соответственно. Тогда справедливы оценки

$$\|z(t,h) - x(t)\| \leqslant V(t,h), \quad t \in \Pi, \tag{9}$$

$$\|y(t,h) - x(t)\| \leqslant U(t,h), \quad t \in \Pi. \tag{10}$$

Доказательство. Обозначим для краткости $z_j = z(t_j, h)$, $z(t) = z(t,h)$ и продолжим решение разностной задачи (4) на весь отрезок I следующим образом:

$$z(t) = z_j + \int\limits_{t_j}^{t} f(s, z_j)\, ds + h^{-1}(t - t_j)\varepsilon_j, \quad t_j \leqslant t \leqslant t_j + h, \tag{11}$$

где $z_0 = x_0$, $j = 0, 1, \ldots, N-1$. Пусть

$$u(t) = \|z(t) - x(t)\|.$$

Тогда

$$u^2(t) = \langle z(t) - x(t), z(t) - x(t) \rangle.$$

Поскольку функция $u(t)$ является абсолютно непрерывной, то (почти всюду по $t \in I$) имеет место равенство

$$u(t)\dot{u}(t) = \langle z(t) - x(t), \dot{z}(t) - \dot{x}(t) \rangle =$$

$$= \langle z(t) - x(t), f(t, z_j) - f(t, x(t)) + h^{-1}\varepsilon_j \rangle, \quad t \in [t_j, t_j + h],$$

где $j = 0, 1, \ldots, N-1$. Так как

$$u(t)\dot{u}(t) = \langle z(t) - x(t), f(t, z(t)) - f(t, x(t)) \rangle +$$
$$+ \langle z(t) - x(t), f(t, z_j) - f(t, z(t)) + h^{-1}\varepsilon_j \rangle,$$

то из условия 3 и неравенства Коши—Буняковского получим

$$u(t)\dot{u}(t) \leqslant u(t)\omega(t, u(t)) + u(t)\|f(t, z_j) - f(t, z(t))\| + u(t)h^{-1}\|\varepsilon_j\|.$$

Воспользуемся теперь условием 1, леммой 2 и формулой (6) для следующей оценки:

$$\|z(t) - z_j)\| \leqslant \int_{t_j}^{t} \|f(s, z_j)\| \, ds + \|\varepsilon_j\| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{t_j}^{t} \gamma(s)(1 + \|z(t_j, h)\|) \, ds + \varepsilon(h) \leqslant \mu(t, h, x_0).$$

С учетом этого соотношения и условия 2 имеем

$$u(t)\dot{u}(t) \leqslant u(t)\omega(t, u(t)) + u(t)l(t)\sigma(\mu(t, h, x_0)) + u(t)h^{-1}\varepsilon(h).$$

Так как $\omega(t, 0) = 0$, то полученное неравенство эквивалентно следующему:

$$\dot{u}(t) \leqslant \omega(t, u(t)) + l(t)\sigma(\mu(t, h, x_0)) + h^{-1}\varepsilon(h), \tag{12}$$

если пренебречь множеством меры 0 из отрезка I.

Поскольку $u(0) = 0$, то верхнее решение $V(t, h)$ задачи (7) будет ограничивать сверху любое решение дифференциального неравенства (12) [5], а это означает, что оценка (9) доказана.

Аналогично доказывается и второе неравенство (10). Теорема 1 доказана.

Рассмотрим в качестве примера вид функции $V(t, h)$, когда в условии 1 функция $\gamma(t) = c \ \forall t \in I$, где c — постоянная, а в условии 2 $l(t) = l \ \forall t \in I$, $\sigma(u) = u \ \forall u \in R_+$, то есть функция $f(t, x)$ удовлетворяет условию Липшица по фазовой переменной x с постоянной l. В качестве функции $\omega(t, u)$ из условия 3 можно взять линейную функцию по переменной u : $\omega(t, u) = lu$ с указанной постоянной l. Поскольку $\kappa(h) = ch$, то

$$\mu(t, h, x_0) = (1 + N(t, h, x_0))ch + \varepsilon(h).$$

Тогда дифференциальное уравнение сравнения (7) можно записать в следующем виде:

$$\dot{v} = lv + l\mu(t, h, x_0) + h^{-1}\varepsilon(h), \quad v(0) = 0.$$

Единственное решение этой задачи

$$V(t, h) = \frac{\varepsilon(h)}{hl}(\exp(lt) - 1) + l\int_0^t \mu(s, h, x_0)\exp(l(t - s)) \, ds$$

одновременно является и ее верхним решением. После простых вычислений представим функцию $V(t,h)$ в следующем виде:

$$V(t,h) = A(t,x_0)h + B(t)\varepsilon(h) + C(t)\varepsilon(h)h^{-1}, \qquad (13)$$

где

$$A(t,x_0) = c(\exp(lt) - 1) + \frac{cl\|x_0\|}{c-l}(\exp(ct) - \exp(lt)) + K(t),$$

$$B(t) = \exp(lt) - 1 + K(t)c^{-1}, \quad C(t) = l^{-1}(\exp(lt) - 1).$$

Здесь

$$K(t) = \frac{c^2 l}{c-l}\left(t\exp(ct) - \frac{1}{c-l}(\exp(ct) - \exp(lt))\right).$$

Поэтому для решений задач (1) и (4) в данном примере справедлива оценка

$$\|z(t,h) - x(t)\| \leqslant V(t,h) \quad t \in \Pi,$$

где функция $V(t,h)$ определяется равенством (13).

При вычислении функций A, B, C предполагалось, что $c \neq l$. Если $c = l$, то

$$V(t,h) = A_0(t,x_0)h + B_0(t)\varepsilon(h) + C_0(t)\varepsilon(h)h^{-1},$$

где

$$A_0(t,x_0) = l(\exp(lt) - 1) + l^2\|x_0\|t\exp(lt) + \frac{l^3t^2}{2}\exp(lt),$$

$$B_0(t) = \exp(lt) - 1 + \frac{l^2t^2}{2}\exp(lt), \quad C_0(t) = \frac{1}{l}(\exp(lt) - 1).$$

Полагая в (13) $\varepsilon(h) = 0$, получим оценку для решений задач (1) и (3) в указанном примере в следующем виде:

$$\|y(t,h) - x(t)\| \leqslant A(t)h, \quad c \neq l,$$

или $\|y(t,h) - x(t)\| \leqslant A_0(t)h$, если $c = l$.

Из оценки (13) следует, что для заданной функции $\varepsilon(h)$, которая определяет погрешность вычислений на каждом шаге разностной схемы (4), в качестве оптимального шага h следует брать тот, для которого функция $V(T,h)$ принимает минимальное значение.

Естественно, этого правила следует придерживаться и в общем случае в условиях теоремы 1.

Заметим, что функция $U(t,h)$ из теоремы 1 дает оценку теоретической погрешности интегрального метода Эйлера.

Литература

[1] Бахвалов Н., Жидков Н., Кобельков Г. Численные методы. М.: Физматлит, 2002. 632 с.

[2] Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М: Наука, 1985. 224 с.

[3] Красносельский М.А., Крейн С.Г. Нелокальные теоремы существования и теоремы единственности для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // ДАН СССР. 1955. Т. 102, №1. С. 13–16.

[4] Donchev T., Farchi E. Stability and Euler approximation of one-sided Lipschitz differential inclusions // SIAM J. Control Optim. 1998. V. 36. No. 2. P. 780–796.

[5] Матросов В.М., Анапольский Л.Ю., Васильев С.Н. Метод сравнения в математической теории систем. Новосибирск: Наука, 1980. 480 с.

Поступила в редакцию 24/*XII*/2003;
в окончательном варианте – 24/*XII*/2003.

ON THE EULER METHOD FOR THE CARATHEODORY DIFFERENTIAL EQUATIONS

 O.P. Filatov[2]

In the paper the accuracy of approximate solutions of the Caratheodory differential equations with a given initial value by the Euler integral discretization scheme is estimated.

Paper received 24/*XII*/2003.
Paper accepted 24/*XII*/2003.

[2]Filatov Oleg Pavlovich (`filt@ssu.samara.ru`), Dept. of Partial Differential Equations, Samara State University, Samara, 443011, Russia.