УДК 517.982.27

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ МЕЖДУ СИММЕТРИЧНЫМ ПРОСТРАНСТВОМ X И L_p, $1 < p < \infty$[1]

© 2004 Р.Ф. Узбеков[2]

В работе рассматриваются вопросы, связанные с теорией интерполяции операторов слабого типа. Найдены условия, при которых симметричное пространство X на $[0,1]$ обладает следующим свойством: если Y — симметричное пространство на $[0,1]$, которое является интерполяционным относительно пары (X, L_∞) и $\alpha(Y) > p^{-1}$ $(1 < p < \infty)$, где $\alpha(Y)$ — нижний индекс Бойда пространства Y, то Y является интерполяционным пространством между X и L_p. Показано, что для пространств Лоренца $L_{r,q}$, $1 \leqslant r < p < \infty$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$ это утверждение справедливо.

Пусть X — симметричное пространство на $[0,1]$, то есть функциональное банахово пространство с мерой Лебега, в котором выполнено условие: если $y \in X$ и $x^*(t) \leqslant y^*(t)$ для всех $t \in [0,1]$, то $x \in X$ и $\|x\|_X \leqslant \|y\|_X$, где $x^*(t)$– невозрастающая перестановка функции $|x(t)|$. Далее, пусть $s > 0$, тогда оператор растяжения σ_s определяется следующей формулой: $\sigma_s x(t) = x(t/s)\chi_I(t/s), \quad t \in I = [0,1]$.

Определение 1. Нижний и верхний индексы Бойда пространства X задаются соответственно равенствами [4, с. 138]

$$\alpha(X) = \lim_{s\to 0} \frac{\ln \|\sigma_s\|_{X\to X}}{\ln s}, \quad \beta(X) = \lim_{s\to\infty} \frac{\ln \|\sigma_s\|_{X\to X}}{\ln s}.$$

Определение 2. Если (X_0, X_1) — банахова пара, тогда X называется точным интерполяционным пространством между X_0 и X_1, если из того, что линейный оператор $T : X_0 \longrightarrow X_0$, $T : X_1 \longrightarrow X_1$, следует, что $T : X \longrightarrow X$ и

$$\|T\|_X \leqslant \max_{i=0,1} \|T\|_{X_i \longrightarrow X_i}.$$

Определение 3. Банахова пара (X_0, X_1) называется $\mathcal{K}$-монотонной с константой $K > 0$, если из того, что X — точное интерполяционное пространство между X_0 и X_1, следует выполнение условия: если для $y \in X_0 + X_1$ и $x \in X$

$$\mathcal{K}(t, y; X_0, X_1) \leqslant \mathcal{K}(t, x; X_0, X_1) \quad (t > 0),$$

[1]Представлена доктором физико-математических наук профессором С.В. Асташкиным.

[2]Узбеков Роман Фатихович (uzbekov_roman@mail.ru), кафедра функционального анализа и теории функций Самарского государственного университета, 443011, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

то $y \in X$ и $\|y\|_X \leqslant K\|x\|_X$.

В статье [1] была доказана следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $1 \leqslant r < p < \infty$. Если симметричное пространство X на $[0,1]$ с условием $\alpha(X) > p^{-1}$ является интерполяционным между L_r и L_∞, то X — интерполяционное пространство относительно пары $(L_r,\ L_p)$.

Оказывается, что эта теорема справедлива для более общего случая, если пространство L_r заменить на симметричное пространство X со следующими свойствами:

1) пара (X, L_∞) является $\mathcal{K}$-монотонной;

2) производная фундаментальной функции этого пространства полумультипликативна с константой $K > 0$ на $[0,1]$.

Для доказательства теоремы нам понадобится следующая лемма.

Лемма. Если X — симметричное пространство на $[0,1]$ с фундаментальной функцией $\phi(t)$, то

$$\mathcal{K}(t, f; X, L_\infty) \asymp \|f^* \chi_{[0,\phi^{-1}(t)]}\|_X$$

для любого $f \in X$ и $t \in [0,1]$.

Доказательство. Без ограничения общности можно предположить, что функция $\phi(t)$ является монотонно возрастающей. Покажем справедливость следующих неравенств:

$$\frac{1}{2}\mathcal{K}(t, f; X, L_\infty) \leqslant \|f^* \chi_{[0,\phi^{-1}(t)]}\|_X \leqslant 2\mathcal{K}(t, f; X, L_\infty).$$

1. Пусть $f = f_0 + f_1$, где $f_0 \in X$, $f_1 \in L_\infty[0,1]$. Обозначим через $n_f(s) = \operatorname{mes}\{t : |f(t)| > s\}$, тогда $n_f(s_0+s_1) \leqslant n_{f_0}(s_0)+n_{f_1}(s_1)$. Поэтому $f^*(s) \leqslant f_0^*(s/2) + f_1^*(s/2)$. Из условия леммы получаем

$$\|f^* \chi_{[0,\phi^{-1}(t)]}\|_X \leqslant \|f_0^*(s/2)\chi_{[0,\phi^{-1}(t)]}\|_X + \|f_1^*(s/2)\chi_{[0,\phi^{-1}(t)]}\|_X \leqslant$$
$$\leqslant 2\|f_0^*\|_X + t\|f_1^*(s/2)\|_{L_\infty} \leqslant 2\{\|f_0^*\|_X + t\|f_1^*\|_{L_\infty}\}.$$

Переходя в неравенстве к инфимуму по всевозможным разложениям $f = f_0 + f_1$, где $f_0 \in X$, $f_1 \in L_\infty[0,1]$, имеем

$$\|f^* \chi_{[0,\phi^{-1}(t)]}\|_X \leqslant 2\mathcal{K}(t, f; X, L_\infty).$$

2. Положим

$$f_0(x) = \begin{cases} f(x) - \frac{f^*(\phi^{-1}(t)) f(x)}{|f(x)|}, & \text{если } |f(x)| > f^*(\phi^{-1}(t)), \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

$$f_1(x) = f(x) - f_0(x).$$

$$\mathcal{K}(t, f; X, L_\infty) \leqslant \|f_0\|_X + t\|f_1\|_\infty = \|(|f| - f^*(\phi^{-1}(t)))\chi_{[0,\phi^{-1}(t)]}\|_X + t f^*(\phi^{-1}(t)) \leqslant$$
$$\leqslant \|(f^* - f^*(\phi^{-1}(t)))\chi_{[0,\phi^{-1}(t)]}\|_X + \|f^*\chi_{[0,\phi^{-1}(t)]}\|_X \leqslant 2\|f^*\chi_{[0,\phi^{-1}(t)]}\|_X.$$

Лемма доказана.

Определение 4. Положительная всюду конечная на $[0,1]$ функция $\phi(t)$ называется полумультипликативной с константой $K > 0$, если выполнено неравенство

$$\phi(t_1 t_2) \leqslant K\phi(t_1)\phi(t_2), \quad t_1, t_2 \in [0,1].$$

Теорема 2. Пусть $1 < p < \infty$, X, Y — симметричные пространства на $[0,1]$ с фундаментальными функциями $\phi(t)$, $\phi_Y(t)$ соответственно, кроме того, $\phi'(t)$ является полумультипликативной на $[0,1]$, Y — интерполяционное между X и $L_\infty[0,1]$, удовлетворяющее условию $\alpha(Y) > p^{-1}$. Если (X, L_∞) — $\mathcal{K}$-монотонная пара, то Y является интерполяционным пространством относительно пары (X, L_p).

Доказательство. Пусть $T : X \longrightarrow X$ — линейный ограниченный оператор такой, что $T : L_p \longrightarrow L_p$ ограничен, тогда

$$\mathcal{K}\left(\frac{t}{(\phi^{-1}(t))^{p^{-1}}}, Tx; X, L_p\right) \leqslant C_1 \mathcal{K}\left(\frac{t}{(\phi^{-1}(t))^{p^{-1}}}, x; X, L_p\right), \tag{1}$$

для любого $x \in X$ и $t \in (0,1]$. Заметим, что из условия $\alpha(Y) > p^{-1}$ следует, что $L_p \subset Y \subset X$ [4, с. 173–174]. Возьмем произвольное разложение элемента $Tx(t) = y_0(t) + y_1(t)$, где $y_0 \in X$, $y_1 \in L_p$, тогда, применяя лемму 1, имеем

$$\mathcal{K}(t, Tx; X, L_\infty) \leqslant 2\|(Tx)^* \chi_{[0,\phi^{-1}(t)]}\|_X \leqslant$$

$$\leqslant \|y_0^*(s/2)\chi_{[0,\phi^{-1}(t)]}\|_X + \|y_1^*(s/2)\chi_{[0,\phi^{-1}(t)]}\|_X \leqslant 2\left(\|y_0^*\|_X + \|y_1^*(s/2)\chi_{[0,\phi^{-1}(t)]}\|_X\right).$$

Оценим второе слагаемое, учитывая то, что $L_p \subset \Lambda(\phi) \subset X$ и $(M_{\phi'}(\phi^{-1}(t)))^{-1} = \inf\limits_{0<s<1}\left(\phi'\left(\frac{s}{\phi^{-1}(t)}\right)(\phi'(s))^{-1}\right)$, где $M_{\phi'}(s)$ — функция растяжения функции $\phi'(t)$ [4, с. 75]. Далее, так как функция $\phi'(t)$ полумультипликативна и $\phi(t) > \phi'(t)t$, справедливо неравенство

$$(M_{\phi'}(\phi^{-1}(t)))^{-1} \geqslant \frac{1}{K}(\phi'(\phi^{-1}(t)))^{-1} > \frac{\phi^{-1}(t)}{Kt}.$$

Поэтому в результате получаем

$$\|y_1^*(s/2)\chi_{[0,\phi^{-1}(t)]}\|_X \leqslant \frac{t}{\phi^{-1}(t)}\frac{\phi^{-1}(t)}{t}\|y_1^*(s/2)\chi_{[0,\phi^{-1}(t)]}\|_{\Lambda(\phi)} \leqslant$$

$$\leqslant K(M_{\phi'}(\phi^{-1}(t)))^{-1}\frac{t}{\phi^{-1}(t)}\|y_1^*(s/2)\chi_{[0,\phi^{-1}(t)]}\|_{\Lambda(\phi)} =$$

$$= K\left\{\inf_{0<s<1}\frac{\phi'(\frac{s}{\phi^{-1}(t)})}{\phi'(s)}\right\}\frac{t}{\phi^{-1}(t)}\|y_1^*(s/2)\chi_{[0,\phi^{-1}(t)]}\|_{\Lambda(\phi)} \leqslant$$

$$\leqslant K\frac{t}{\phi^{-1}(t)}\int\limits_0^{\phi^{-1}(t)} y_1^*(\frac{s}{2})\frac{\phi'(\frac{s}{\phi^{-1}(t)})}{\phi'(s)}\phi'(s)ds = Kt\int\limits_0^1 y_1^*(\frac{u\phi^{-1}(t)}{2})\phi'(u)du =$$

$$= Kt\|y_1^*(u\frac{\phi^{-1}(t)}{2})\|_{\Lambda(\phi)} \leqslant Kt\|\sigma_{\frac{2}{\phi^{-1}(t)}}\|_{L_p}\|y_1^*\|_{L_p} \leqslant K2^{p^{-1}}\frac{t}{\phi^{-1}(t)^{p^{-1}}}\|y_1^*\|_{L_p}.$$

Тогда

$$\mathcal{K}(t, Tx; X, L_\infty) \leqslant C_2\left(\|y_0^*\|_X + \frac{t}{\phi^{-1}(t)^{p^{-1}}}\|y_1^*\|_p\right)$$

и, переходя к инфимуму справа по всем разложениям $Tx = y_0 + y_1$, где $y_0 \in X$, $y_1 \in L_p$, имеем

$$\mathcal{K}(t, Tx; X, L_\infty) \leqslant C_2 \mathcal{K}\left(\frac{t}{(\phi^{-1}(t))^{p^{-1}}}, Tx; X, L_p\right). \tag{2}$$

Пусть $\psi(t) = \phi(t)t^{-p^{-1}}$, $t \in (0,1]$. Положительная функция $\psi(t)$ является вогнутой и возрастающей на $[0,1]$. Определим теперь линейный оператор

$$Sx(t) = \int_0^1 x(s) d \min\left(\frac{\phi(s)}{\phi(t)}, s^{p^{-1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\phi(t)} \int_0^{\psi^{-1}(\phi(t))} x(s)\phi'(s)ds + \frac{1}{p} \int_{\psi^{-1}(\phi(t))}^1 s^{p^{-1}-1} x(s) ds$$

и заметим, что $Sx^*(t_2) \leqslant Sx^*(t_1)$, $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant 1$ в силу того, что $\phi^{-1}(t)$ — убывающая функция на $[0,1]$. Покажем, что существует $C_3 > 0$ такая, что

$$\left\|(Sx^*)^* \chi_{[0,\phi^{-1}(t)]}\right\|_X \geqslant C_3 \left\|x^* \chi_{[0,\, \phi^{-1}(t(\phi^{-1}(t))^{-p^{-1}})]}\right\|_X. \tag{3}$$

Поскольку $\alpha(Y) > p^{-1}$, то существует $\gamma > 0$ такое, что

$$\|\sigma_t\|_{Y\to Y} \leqslant \gamma t^{p^{-1}}, \quad 0 < t \leqslant 1.$$

Поэтому

$$\frac{1}{p} \int_{\psi^{-1}(\phi(v))}^1 s^{p^{-1}-1} x^*(s) ds \geqslant \frac{1}{\gamma p} \int_{\psi^{-1}(\phi(v))}^1 \|\sigma_s\|_{Y\to Y} s^{-1} x^*(s) ds.$$

Применив неравенства

$$\phi_Y(t) > \phi(t) > \phi'(t)t, \qquad \|\sigma_t\|_{Y\to Y} \geqslant \frac{\phi_Y(t)}{\phi_Y(1)}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

можно показать, что

$$\frac{1}{\gamma p} \int_{\psi^{-1}(\phi(v))}^1 \|\sigma_s\|_{Y\to Y} s^{-1} x^*(s) ds \geqslant \frac{1}{\gamma p \phi_Y(1)} \int_{\psi^{-1}(\phi(v))}^1 x^*(s)\phi'(s) ds.$$

В результате

$$|(Sx^*)^*(v)\chi_{[0,\phi^{-1}(t)]}(v)| \geqslant \min\left(\phi(1)^{-1}, \frac{1}{\gamma p \phi_Y(1)}\right) \int_0^1 x^*(s)\phi'(s) ds =$$

$$= \min\left(\phi(1)^{-1}, \frac{1}{\gamma p \phi_Y(1)}\right) \|x^*\|_{\Lambda(\phi)} \geqslant$$

$$\geqslant \min\left(\phi(1)^{-1}, \frac{1}{\gamma p \phi_Y(1)}\right) \|x^* \chi_{[0,\, \phi^{-1}(t(\phi^{-1}(t))^{-p^{-1}})]}\|_X,$$

и тем самым неравенство (3) с $C_3 = \min\left(\phi(1)^{-1}, \frac{1}{\gamma p \phi_Y(1)}\right)$ выполняется. Кроме того, справедливы следующие неравенства:

$$\mathcal{K}(t, Sx^*; X, L_\infty) \geqslant \frac{1}{2}\|(Sx^*)^*\chi_{[0,\phi^{-1}(t)]}\|_X, \tag{4}$$

$$\|x^*\chi_{\left[0,\phi^{-1}\left(\frac{t}{(\phi^{-1}(t))^{p^{-1}}}\right)\right]}\|_X \geqslant \frac{1}{2}\mathcal{K}\left(\frac{t}{(\phi^{-1}(t))^{p^{-1}}}, x; X, L_p\right). \tag{5}$$

Из условий (1)–(5) следует, что

$$\mathcal{K}(t, Tx; X, L_\infty) \leqslant C_4\mathcal{K}(t, Sx^*; X, L_\infty)$$

для любого $x \in X$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Учитывая $\mathcal{K}$ — монотонность пары (X, L_∞) и ограниченность оператора $S : Y \longrightarrow Y$ [4, с. 182], получаем

$$\|Tx\|_Y \leqslant C_5\|x\|_Y.$$

Таким образом, Y — интерполяционное пространство относительно пары (X, L_p). Теорема доказана.

Определим теперь весовое пространство Лоренца $L_{r,q}$, $1 \leqslant r < \infty$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$ как симметричное пространство с нормой

$$\|x\|_{r,q} = \left(\int_0^1 s^{\frac{q}{r}-1}(x^*(s))^q ds\right)^{q^{-1}}, \quad 1 \leqslant q < \infty;$$

$$\|x\|_{r,\infty} = \sup_{0<s<1} s^{r^{-1}}x^*(s).$$

Следствие 1. Пусть $1 \leqslant r < p < \infty$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$. Если симметричное пространство X на $[0,1]$ с условием $\alpha(X) > p^{-1}$ является интерполяционным между $L_{r,q}$ и L_∞, то X — интерполяционное пространство относительно пары $(L_{r,q},\ L_p)$.

Применяя следствие 1, можно установить справедливость следующего утверждения.

Следствие 2. Пусть $1 \leqslant r < p < q < \infty$, $1 \leqslant u, v \leqslant \infty$, $1 \leqslant s \leqslant p$, и для симметричного пространства X выполнено условие $\alpha(X) > p^{-1}$. Если X является интерполяционным пространством относительно пары $(L_{r,u}, L_{q,v})$, то оно будет интерполяционным между $L_{r,v}$ и $L_{p,s}$.

Для простоты рассуждений приведем доказательство для случая $u = v = s = 1$.

Доказательство. Положим

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{r} - \frac{1}{q}, \ \ \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{r} - \frac{1}{p}, \ \ 1 < \lambda < \alpha, \ \ C_{pq} = \frac{qp}{q-p}.$$

Если $T : L_{r,1} \longrightarrow L_{r,1}$ — линейный ограниченный оператор, такой, что $T|_{L_{p,1}} : L_{p,1} \longrightarrow L_{p,1}$ — ограниченный, то

$$\mathcal{K}(t, Tx; L_{r,1}, L_{p,1}) \leqslant C_1\mathcal{K}(t, x; L_{r,1}, L_{p,1}), \tag{6}$$

для любого $x \in L_{r,1}$ и $t \in [0,1]$. Для линейного оператора

$$Mx(t) = t^{-p^{-1}} \int_t^1 s^{p^{-1}-1} x(s)ds, \quad 0 < t \leqslant 1,$$

применяем теорему Фубини, получим

$$\int_0^{t^\alpha} s^{r^{-1}-1} Mx^*(s)ds = \alpha[\int_0^{t^\alpha} u^{r^{-1}-1} x^*(u)du + t\int_{t^\alpha}^1 u^{p^{-1}-1} x^*(u)du], \tag{7}$$

$$\int_{t^\alpha}^1 s^{q^{-1}-1} Mx^*(s)ds = -C_{pq}\int_{t^\alpha}^1 u^{q^{-1}-1} x^*(u)du + C_{pq} t^{\alpha(q^{-1}-p^{-1})}\int_{t^\alpha}^1 u^{p^{-1}-1} x^*(u)du. \tag{8}$$

Применяя формулу Хольмстедта [2, с. 160] и равенства (2), (3), имеем

$$\mathcal{K}(t^{\frac{\alpha}{\lambda}}, Mx^* + C_{pq}x^*; L_{r,1}, L_{q,1}) \geqslant$$

$$\geqslant C_2 \left\{ \int_0^{(t^{\frac{\alpha}{\lambda}})^\lambda} s^{r^{-1}-1} Mx^*(s)ds + t^{\frac{\alpha}{\lambda}} \int_{(t^{\frac{\alpha}{\lambda}})^\lambda}^1 s^{q^{-1}-1}(Mx^*(s) + C_{pq}x^*(s))ds \right\} =$$

$$= \alpha C_2 \left\{ \int_0^{t^\alpha} u^{r^{-1}-1} x^*(u)du + t\int_{t^\alpha}^1 u^{p^{-1}-1} x^*(u)du \right\} +$$

$$+ t^{\frac{\alpha}{\lambda}+\alpha(q^{-1}-p^{-1})} C_{pq} C_2 \int_{t^\alpha}^1 u^{p^{-1}-1} x^*(u)du \geqslant C_3 \mathcal{K}(t, x; L_{r,1}, L_{p,1}).$$

В результате

$$\mathcal{K}(t^{\frac{\alpha}{\lambda}}, Mx^* + C_{pq}x^*; L_{r,1}, L_{q,1}) \geqslant C_3 \mathcal{K}(t, x; L_{r,1}, L_{p,1}). \tag{9}$$

Покажем выполнение противоположного неравенства:

$$\mathcal{K}(t^{\frac{\alpha}{\lambda}}, Mx^* + C_{pq}x^*; L_{r,1}, L_{q,1}) \leqslant C_4(\alpha + C_{pq}) \left\{ \int_0^{t^\alpha} u^{r^{-1}-1} x^*(u)du + \right.$$

$$\left. + t\int_{t^\alpha}^1 u^{p^{-1}-1} x^*(u)du \right\} \leqslant C_4(\alpha + C_{pq}) \mathcal{K}(t, x; L_{r,1}, L_{p,1}). \tag{10}$$

Из неравенств (4), (5) следует, что

$$\mathcal{K}(t^{\frac{\alpha}{\lambda}}, Mx^* + C_{pq}x^*; L_{r,1}, L_{q,1}) \asymp \mathcal{K}(t, x; L_{r,1}, L_{p,1}), \tag{11}$$

для любого $x \in L_{r,1}$, $t \in [0,1]$.

Применив формулу Хольмстедта [2, с. 160], запишем

$$\mathcal{K}(t, Tx; L_{r,1}, L_{p,1}) \geqslant C_5 \left\{ \int_0^{t^\alpha} s^{r^{-1}-1}(Tx)^*(s)ds + t\int_{t^\alpha}^1 s^{p^{-1}-1}(Tx)^*(s)ds \right\} =$$

$$= C_5 \left\{ \int\limits_0^{(t^{\frac{\alpha}{\lambda}})^\lambda} s^{r^{-1}-1}(Tx)^*(s)ds + t \int\limits_{(t^{\frac{\alpha}{\lambda}})^\lambda}^1 s^{q^{-1}-1}(Tx)^*(s)s^{p^{-1}-q^{-1}}ds \right\} \geqslant$$

$$\geqslant C_5 \left\{ \int\limits_0^{(t^{\frac{\alpha}{\lambda}})^\lambda} s^{r^{-1}-1}(Tx)^*(s)ds + t(t^\alpha)^{p^{-1}-q^{-1}} \int\limits_{(t^{\frac{\alpha}{\lambda}})^\lambda}^1 s^{q^{-1}-1}(Tx)^*(s)ds \right\} \geqslant$$

$$\geqslant C_6 \mathcal{K}(t^{\frac{\alpha}{\lambda}}, Tx; L_{r,1}, L_{q,1}).$$

В результате

$$\mathcal{K}(t, Tx; L_{r,1}, L_{p,1}) \geqslant C_6 \mathcal{K}(t^{\frac{\alpha}{\lambda}}, Tx; L_{r,1}, L_{q,1}). \tag{12}$$

Из условий (1), (6), (7) следует, что

$$\mathcal{K}(t^{\frac{\alpha}{\lambda}}, Tx; L_{r,1}, L_{q,1}) \leqslant C_7 \mathcal{K}(t^{\frac{\alpha}{\lambda}}, Mx^* + C_{pq}x^*; L_{r,1}, L_{q,1})$$

для любого $x \in L_{r,1}$, $t \in [0,1]$.

Пара $(L_{r,1}, L_{q,1})$ является $\mathcal{K}$-монотонной [3, с. 213–236], оператор M ограничен в пространстве X [1], поэтому

$$\|Tx\|_X \leqslant C_8 \|x\|_X,$$

т.е., X — интерполяционное пространство относительно пары $(L_{r,1}, L_{p,1})$.

Литература

[1] Асташкин С.В., Малигранда Л. Об интерполяции в L_p–пространствах // Мат. заметки. 2003. Т. 74. №5. С. 782–785.

[2] Берг Й., Лефстрем Й. Интерполяционные пространства. Введение. М.: Мир, 1980. 264 с.

[3] Cwikel M. Monotonicity properties of interpolation spaces 2. Ark. Mat. 19:1, 1981.

[4] Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М. Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978. 400 с.

Поступила в редакцию 5/II/2004;
в окончательном варианте — 5/II/2004.

INTERPOLATION BETWEEN R. I. SPACE X AND L_p, $1 < p < \infty$[3]

© 2004 R.P. Uzbekov[4]

This paper is devoted to problems of the interpolation theory of weak type operators. The conditions for rearrangement invariant (r.i.) function space X on $[0, 1]$, having the property: if Y — r.i. space on $[0, 1]$ and Y is the interpolation space between X and L_∞, $\alpha(Y) > p^{-1}$, $1 < p < \infty$ (the Boyd index) then Y is the interpolation space between X and L_p, are given. It is shown that the Lorentz spaces $L_{r,q}$, $1 \leqslant r < p < \infty$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$ have such a property.

Paper received 5/*II*/2004.
Paper accepted 5/*II*/2004.

[3]Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. S.V. Astashkin.

[4]Roman Phatikhovich Uzbekov, Dept. of Theory of Functions and Functional Analysis, Samara State University, Samara, 443011, Russia.