

УДК 517.968

ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ СПОСОБ СИНГУЛЯРИЗАЦИИ ОДНОГО КЛАССА ПОЛНЫХ СИУ-2К С РАЗОМКНУТЫМ КОНТУРОМ ИНТЕГРИРОВАНИЯ¹

© 2004 Ю.С. Бабурин²

Устанавливаются формулы обращения в каждом из допустимых классов для искомых функций трех случаев полных сингулярных интегральных уравнений второго рода с ядром Коши, когда контуром интегрирования является любая (конечная, полубесконечная) связная часть действительной оси. Указывается единая замена переменных в сингулярном интеграле, учитывающая групповые свойства ядра и сводящая каждый из трех случаев исходного полного уравнения к характеристическому СИУ-2К с конечным контуром интегрирования.

§ 1. Пусть в исходном полном сингулярном интегральном уравнении второго рода с ядром Коши (короче, полном СИУ-2К)

$$m(x)\phi(x) + \frac{n(x)}{\pi i} \int_{\gamma_s} \left[\frac{1}{\xi - x} - \frac{1}{R_s(\xi) - x} \right] \phi(\xi) d\xi = f(x), x \in \gamma_s, \quad (1)$$

где контуром интегрирования $\gamma_s = (a_s, b_s)$ является любая конечная или полубесконечная связная часть действительной оси $\text{Im } z = 0$, $s \in \{1, 2, 3\}$; $R_s(x)$ — значение на действительной оси целой линейной или дробно-линейной функции

$$R_1(z) = 2b - z, \text{ если } \gamma_1 = (-\infty, b) \text{ и } b = \text{const} < +\infty;$$

$$R_2(z) = \frac{\frac{a+b}{2}z - ab}{z - \frac{a+b}{2}}, \text{ если } \gamma_2 = (a, b) \text{ и } -\infty < a < b < +\infty;$$

$$R_3(z) = 2a - z, \text{ если } \gamma_3 = (a, +\infty) \text{ и } a = \text{const} > -\infty$$

с неподвижными точками $a_s = R_s(a_s) \neq b_s = R_s(b_s)$, порождающей двухчленную циклическую группу $T_s = \{T_0(z) = z, T_1(z) = T_1^{-1}(z) = R_s(z)\}$ эллиптических преобразований симметрии относительно границы любой половины одной из фундаментальных областей группы T_s ; коэффициенты $m(x)$ и $n(x)$, свободный член $f(x)$ и искомое решение $\phi(x)$ — функции класса Гельдера

¹Представлена доктором физико-математических наук профессором Ю.Н. Радаевым.

²Бабурин Юрий Степанович, кафедра высшей математики и информатики Самарского государственного университета, 443011, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

$H^\lambda(\gamma_s), 0 < \lambda_s \leq 1$, причем $m^2(x) - n^2(x)$ не обращается в нуль при всех $x \in \gamma_s$, а функции $f(x)$ и $\phi(x)$ в точках $x = a > -\infty$ и $x = b < +\infty$ могут иметь интегрируемые особенности; сингулярный интеграл с ядром Коши понимается в смысле его главного значения по Коши.

Известно ([1, с. 18] или [2, гл. 4]), что к уравнению

$$v(\xi) + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \left[\frac{1}{\xi - x} + \frac{1 - 2\xi}{\xi + x - 2\xi x} \right] v(\xi) d\xi = F(x), \quad 0 < x < 1, \quad (2)$$

то есть к частному случаю уравнения (1) при $m(x) = 1, n(x) = i, s = 2, a = 0$ и $b = 1$, еще в 1953 году А.В. Бицадзе привел методом интегральных уравнений решение классической задачи Ф. Трикоми для модельного уравнения М.А. Лаврентьева

$$U_{xx}(x, y) + \operatorname{sgn} y U_{yy} = 0 \quad (3)$$

в односвязной конечной смешанной области $D^+ \cup \gamma \cup D^-$ с непрерывными условиями склеивания на линии $\gamma = \{(x, y) : y = 0, 0 < x < 1\}$ вырождения типа уравнения (3) и доказал, что в допустимом классе $h(1)$ функций, удовлетворяющих условию Гельдера в интервале $(0, 1)$, ограниченных при $x \rightarrow 0+0$ и имеющих интегрируемую особенность при $x \rightarrow 1-0$, формула обращения уравнения (2) имеет вид

$$v(x) = \frac{1}{2} F(x) - \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \sqrt{\frac{x(1-\xi)}{\xi(1-x)}} \left(\frac{1}{\xi - x} + \frac{1 - 2\xi}{\xi + x - 2\xi x} \right) F(\xi) d\xi, \quad 0 < x < 1. \quad (4)$$

Решение тем же методом интегральных уравнений этой же задачи Трикоми или ее обобщений с более сложными условиями склеивания (например, содержащими "весовые" функции ...) в области $D^+ \cup \gamma_s \cup D^-$ с линией вырождения $\gamma_s = \{(x, y) : y = 0, a_s < x < b_s\}$ приводит к уравнению (1) с переменными коэффициентами, $s \in \{1, 2, 3\}$.

Ядро $k(x, \xi) = 1/(\xi - x) - 1/[R_s(\xi) - x]$ уравнения (1) обладает свойством

$$k\{R_s(x), \xi\} = \frac{-k(x, \xi)}{\frac{d}{dx} R_s(x)}, \quad x \in \gamma_s, \quad \xi \in \gamma_s,$$

то есть при $s = 1$ и при $s = 3$ является автоморфным относительно группы $T_1 = \{z, 2b - z\}$ или $T_3 = \{z, 2a - z\}$, но при $s = 2$ не является автоморфным относительно группы $T_2 = \{z, R_2(z)\}$, а при подстановке вместо x значения $R_2(x)$ выделяет рациональный множитель. Поэтому уравнение (1) при $s = 1$ и при $s = 3$ можно решить в замкнутой форме методом Гахова—Чибриковой [3–5], то есть сведением уравнения (1) с автоморфным ядром к равносильной этому уравнению неоднородной краевой задаче Римана (короче, неоднородной КЗР) для кусочно-голоморфной с линией скачков γ_1 или γ_3 автоморфной относительно группы T_1 или T_3 функции

$$\Phi_s(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_s} \left\{ \frac{1}{\xi - x} - \frac{1}{R_s(\xi) - x} \right\} \phi(\xi) d\xi,$$

обращающейся в нуль (короче, исчезающей) в точке $z = \infty$. Во втором случае уравнения (1) для группы $T_2 = \{z, R_2(z)\}$ нетрудно построить простой тэта-ряд А. Пуанкаре $\Theta(z) = 1 - \frac{d}{dz}R_2(z)$, основным и легко проверяемым свойством которого является

$$\Theta[R_2(z)] = \Theta \left\{ \frac{az + bz - 2ab}{2z - a - b} \right\} = \left\{ \frac{2z - a - b}{b - a} \right\}^2 \Theta(z) = \frac{\Theta(z)}{-\frac{d}{dz}R_2(z)}.$$

Так как $\Theta(x) \neq 0$ при всех действительных значениях x , то, разделив на $\Theta(x)$ обе части уравнения (1) при $s = 2$, последнее можно записать в виде

$$m(x)\phi_2(x) + \frac{n(x)}{\pi i} \int_a^b k_2(x, \xi)\phi_2(\xi)d\xi = f_2(x), \quad a < x < b, \quad (5)$$

где $\phi_2(x) = \phi(x)/\Theta(x)$ и $f_2(x) = f(x)/\Theta(x)$ — функции того же класса $H^{(\lambda)}(a, b)$, что $\phi(x)$ и $f(x)$; ядро же $k_2(x, \xi) = \Theta(\xi)k(x, \xi)/\Theta(x)$ лишь регулярным в фундаментальной области D_2 группы T_2 множителем отличается от исходного ядра $k(x, \xi)$, но зато является автоморфным по независимой переменной x относительно группы T_2 . Следовательно, и при $s = 2$ уравнение (1) приводится к уравнению (5) с T_2 -автоморфным ядром, решаемому в замкнутой форме тем же методом Гахова—Чибриковой, то есть сведением уравнения (5) к равносильной ему неоднородной КЗР для кусочно-голоморфной с линией скачков $\gamma_2 = (a, b)$ и T_2 -автоморфной функции

$$\Phi_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b k_2(z, \xi)\phi_2(\xi)d\xi,$$

исчезающей в бесконечности.

Если же ввести в рассмотрение кусочно-голоморфную функцию

$$\overline{\Phi}_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \left[\frac{1}{\xi - z} - \frac{1}{R_2(\xi) - z} \right] \phi(\xi)d\xi,$$

удовлетворяющую условию $\overline{\Phi}_2[R_2(z)] = -\overline{\Phi}_2(z)/R_2'(z)$ и исчезающую в бесконечности, то уравнение (1) при $s = 2$ можно решить в замкнутой форме и методом аналитического продолжения Карлемана—Бицадзе, не используя аппарата автоморфных функций и приводящим уравнение (1) при $s = 2$ к равносильной ему неоднородной КЗР с граничным условием $\overline{\Phi}_2^+(x) = G(x)\overline{\Phi}_2^-(x) + g(x)$, $-\infty < x < +\infty$, с коэффициентом $G(x)$ и со свободным членом $g(x)$, разрывными в точках $x = a$ и $x = b$.

Таким образом, и при постоянных коэффициентах $m(x) \equiv m$, $n(x) \equiv n$, где $m^2 - n^2 \neq 0$ ([6], $a - c$), и при переменных коэффициентах $m(x)$ и $n(x)$ класса $H^\lambda(\gamma_s)$, $s \in \{1, 2, 3\}$ все случаи исходного уравнения (1) можно решить в замкнутой форме (то есть решить точно, а не приближенно и в виде явной аналитической формулы в результате вычисления конечного числа интегралов от заданных и известных функций) указанными выше методами. Но

каждый из них требует от исследователя специальной подготовки и свободного владения техникой решения неоднородной краевой задачи Римана в различных допустимых классах для искомых функций. Специальной подготовки требует и использованный [6, с. 7–10] метод непосредственной сингуляризации слева полных СИУ-2К с разомкнутым или замкнутым контуром интегрирования. Поэтому в данной работе предлагается более простой способ решения в замкнутой форме исходного уравнения (1) — указывается универсальный алгоритм сведения каждого из трех вариантов полного СИУ-2К вида (1) к новому характеристическому СИУ-2К относительно новой искомой функции, в котором контуром интегрирования является любой конечный отрезок (α, β) действительной оси.

Этот элементарный способ сингуляризации полных СИУ-2К вида (1):

1) осуществляется одной и той же подходящей заменой переменных в сингулярном интеграле, учитывающей специфику (групповые свойства) ядра в каждом из трех вариантов исходного уравнения (1);

2) простотой своей идейной концепции и технической реализации выгодно отличается от общих методов непосредственной или опосредованной сингуляризации слева или справа полных СИУ-2К с замкнутым контуром интегрирования и с аналитически продолжаемыми заданными функциями [7–8, гл. 1];

3) позволяет решением в замкнутой форме полученного характеристического СИУ-2К в каждом из допустимых классов для искомых функций (короче, в каждом из ДКИФ) и обратной заменой переменных построить и явно выписать все искомые решения исходного уравнения (1) во всех соответствующих для функции $\phi(x)$ допустимых классах.

§ 2. Используя функцию $\omega(z)$, взаимно однозначно отображающую контур интегрирования γ_s уравнения (1) на положительную действительную полуось $(0, +\infty)$ с сохранением положительного направления обхода, строим автоморфную относительно группы $T_s = \{z, R_s(z)\}$ функцию

$$q_s(z) = q_s[R_s(z)] = \omega_s^2(z), \quad s \in \{1, 2, 3\}, \quad (6)$$

а именно

$$q_1(z) = (b - z)^{-2}; \quad q_2(z) = \frac{(z - a)^2}{(b - z)^2}; \quad q_3(z) = (z - a)^2,$$

имеющую одинаковое и минимально возможное, равное двум, число нулей и полюсов в расширенной комплексной плоскости, и в уравнении (1) полагаем

$$t = \frac{\alpha + \beta q_s(x)}{1 + q_s(x)}, \quad \tau = \frac{\alpha + \beta q_s(\xi)}{1 + q_s(\xi)}, \quad (7)$$

где α и β — произвольные действительные числа и $\alpha < \beta$. Так как отображение (7) устанавливает взаимно однозначное соответствие между контуром интегрирования γ_s и конечным отрезком (α, β) действительной оси с сохранением положительного направления их обхода и имеет первую производную ξ'_τ , непрерывную и не исчезающую в интервале (α, β) , то выполнены [9 или 10] все условия замены переменных в сингулярном интеграле.

В результате замены переменных по формулам (6), (7) исходное уравнение (1) переходит в характеристическое СИУ-2К вида

$$m_s(t)\phi_s(t) + \frac{n_s(t)}{\pi i} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\phi_s(\tau)}{\tau - t} d\tau = f_s(t), \quad \alpha < t < \beta, \quad s \in \{1, 2, 3\}, \quad (8)$$

в котором

1) при $s = 1$ имеем

$$\begin{aligned} m_1(t) &= m \left[b - \sqrt{\frac{\beta - t}{t - \alpha}} \right], \quad n_1(t) = n \left[b - \sqrt{\frac{\beta - t}{t - \alpha}} \right], \\ \phi_1(t) &= \frac{1}{t - \alpha} \phi \left[b - \sqrt{\frac{\beta - t}{t - \alpha}} \right], \quad f_1(t) = \frac{1}{t - \alpha} f \left[b - \sqrt{\frac{\beta - t}{t - \alpha}} \right]; \end{aligned} \quad (9)$$

2) при $s = 2$ имеем

$$\begin{aligned} m_2(t) &= m \left[\frac{a \sqrt{\beta - t} + b \sqrt{t - \alpha}}{\sqrt{\beta - t} + \sqrt{t - \alpha}} \right], \quad n_2(t) = n \left[\frac{a \sqrt{\beta - t} + b \sqrt{t - \alpha}}{\sqrt{\beta - t} + \sqrt{t - \alpha}} \right], \\ \phi_2(t) &= \frac{\phi \left[\frac{a \sqrt{\beta - t} + b \sqrt{t - \alpha}}{\sqrt{\beta - t} + \sqrt{t - \alpha}} \right]}{\sqrt{\beta - t} + \sqrt{t - \alpha}}, \quad f_2(t) = \frac{f \left[\frac{a \sqrt{\beta - t} + b \sqrt{t - \alpha}}{\sqrt{\beta - t} + \sqrt{t - \alpha}} \right]}{\sqrt{\beta - t} + \sqrt{t - \alpha}}; \end{aligned} \quad (10)$$

3) при $s = 3$ имеем

$$\begin{aligned} m_3(t) &= m \left[a + \sqrt{\frac{t - \alpha}{\beta - t}} \right], \quad n_3(t) = n \left[a + \sqrt{\frac{t - \alpha}{\beta - t}} \right], \\ \phi_3(t) &= \frac{1}{\beta - t} \phi \left[a + \sqrt{\frac{t - \alpha}{\beta - t}} \right], \quad f_3(t) = \frac{1}{\beta - t} f \left[a + \sqrt{\frac{t - \alpha}{\beta - t}} \right], \end{aligned} \quad (11)$$

причем всюду под символом квадратного корня понимается символ однозначной арифметической ветви квадратного корня.

Итак, первая цель достигнута: каждый вариант исходного полного СИУ-2К вида (1) сведен к соответствующему варианту характеристического СИУ-2К вида; обращение же нормальных случаев этих последних уравнений известно. Осталось лишь установить соотношения между допустимыми классами для решений $\phi(x)$ исходного уравнения (1) и решений $\phi_s(t)$, $1 \leq s \leq 3$ характеристического уравнения (8), то есть выяснить, в каких ДКИФ следует решать характеристическое уравнение (8), чтобы при обратной замене переменных из функций $\phi_s(t)$, $1 \leq s \leq 3$ получить искомые решения $\phi(x)$ исходного полного уравнения (1), принадлежащие допустимым для них функциональным классам. Сделать это можно с помощью формул (9), (11), процедура вывода этих соотношений между ДКИФ одинакова при всех $s \in \{1, 2, 3\}$ и поэтому приводится подробно лишь при $s = 1$.

1. На левом конце $t = \alpha$ интервала (α, β) решение $\phi_1(t)$ уравнения (8) при $s = 1$ может принадлежать допустимым классам:

либо 8-1) h_0 или $h(\beta)$, то есть быть ограниченным при $t \rightarrow \alpha + 0 : |\phi_1(t)| < A = \text{const}$, где $t \in (\alpha, \alpha + \epsilon)$ и $0 < \epsilon \ll 1$;

либо 8-2) $h(\alpha)$ или $h(\alpha, \beta)$, то есть иметь интегрируемую особенность при $t \rightarrow \alpha + 0 : |\phi_1(t)| < A|t - \alpha|^{-\mu}$, где $t \in (\alpha, \alpha + \epsilon)$ и $0 < \epsilon \ll 1, \mu \in (0; 1)$.

Поскольку из формул (6), (7) и (9) следует, что

$$\phi(x) = \frac{\beta - \alpha}{1 + (b - x)^2} \phi_1 \left[\frac{\beta + \alpha(b - x)^2}{1 + (b - x)^2} \right], \quad f(x) = \frac{\beta - \alpha}{1 + (b - x)^2} f_1 \left[\frac{\beta + \alpha(b - x)^2}{1 + (b - x)^2} \right], \quad (12)$$

то решения $\phi(x)$ уравнения (1) при $s = 1$ будут при $x \rightarrow -\infty$ удовлетворять соответственно соотношениям:

либо 1-1): $|\phi(x)| \leq \left| \frac{\beta - \alpha}{1 + (b - x)^2} \right| A \leq A_1(b - x)^{-2}$, где $A_1 = \text{const}$,

либо 1-2): $|\phi(x)| \leq \left| \frac{\beta - \alpha}{1 + (b - x)^2} \right| A \left| \frac{\beta - \alpha}{1 + (b - x)^2} \right|^{-\mu} \leq A_1(b - x)^{2\mu - 2}$.

Это значит, что в обеих ситуациях получаются решения $\phi(x)$ уравнения (1) при $s = 1$, исчезающие в бесконечности.

На правом конце $t = \beta$ интервала (α, β) решение $\phi_1(t)$ уравнения (8) при $s = 1$ может принадлежать допустимым классам:

либо 8-3) h_0 или $h(\alpha)$, то есть быть ограниченным при $t \rightarrow \beta - 0 : |\phi_1(t)| < B = \text{const}$, где $t \in (\beta - \epsilon, \beta)$ и $0 < \epsilon \ll 1$;

либо 8-4) $h(\beta)$ или $h(\alpha, \beta)$, то есть иметь интегрируемую особенность при $t \rightarrow \beta - 0 : |\phi_1(t)| < B|\beta - t|^{-\mu}$, где $t \in (\beta - \epsilon, \beta)$ и $0 < \epsilon \ll 1, \mu \in (0; 1)$.

Тогда опять с помощью формул (12) получается следующее поведение при $x \rightarrow b - 0$ решений $\phi(x)$ уравнения (1) при $s = 1$:

либо 1-3) $|\phi(x)| \leq \frac{\beta - \alpha}{1 + (b - x)^2} B \leq (\beta - \alpha)B \equiv B_1 = \text{const}$;

либо 1-4) $|\phi(x)| \leq \frac{\beta - \alpha}{1 + (b - x)^2} B \left| \frac{\beta - \alpha(b - x)^2}{1 + (b - x)^2} \right|^{-\mu} \leq B_1(b - x)^{-2\mu}$.

Таким образом, при $s = 1$ четырем допустимым классам $h_0, h(\alpha), h(\beta)$ и $h(\alpha, \beta)$ для решений $\phi_1(t)$ характеристического уравнения (8) соответствует только два допустимых класса для решений $\phi(x)$ исходного уравнения (1): $h_{0,b}$ — класс функций, удовлетворяющих условию Гельдера при $x < b$, исчезающих при $x \rightarrow -\infty$ и ограниченных при $x \rightarrow b - 0$; $h_0(b)$ — класс функций, удовлетворяющих условию Гельдера при $x < b$, исчезающих при $x \rightarrow -\infty$ и имеющих интегрируемую особенность при $x \rightarrow b - 0$. При этом, чтобы решение $\phi(x)$ исходного полного уравнения (1) при $s = 1$ имело при $x \rightarrow b - 0$ степенную особенность интегрируемого порядка $2\mu \in (0; 1)$, степенная особенность при $t \rightarrow \beta - 0$ решения $\phi(t)$ характеристического уравнения (8) при $s = 1$ должна иметь порядок не выше $\mu \in (0; 1/2)$.

Аналогичные утверждения имеют место и для функций $f_1(t)$ и $f(x)$, ибо они связаны между собой теми же соотношениями (12), как и функции $\phi_1(t)$ и $\phi(x)$. Вот почему характеристическое уравнение (8) решают только в тех ДКИФ, которым может принадлежать свободный член $f_s(t)$, $s \in \{1, 2, 3\}$.

Ниже без подробных выкладок приведены остальные результаты исследования.

2. Четырем допустимым классам $h_0, h(\alpha), h(\beta)$ и $h(\alpha, \beta)$ для решений $\phi_2(t)$ характеристического уравнения (8) при $s = 2$ соответствуют также четыре

допустимых класса $h_0, h(a), h(b)$ и $h(a, b)$ по терминологии Ф.Д. Гахова [11, с. 484–485] для решений $\phi(x)$ исходного уравнения (1) при $s = 2$, причем

а) ограниченному при $t \rightarrow \alpha + 0$ (при $t \rightarrow \beta - 0$) решению $\phi_s(t)$ соответствует также ограниченное при $x \rightarrow a + 0$ (при $x \rightarrow b - 0$) решение $\phi(x)$;

б) решению $\phi_2(t)$, имеющему при $t \rightarrow \alpha + 0$ (при $t \rightarrow \beta - 0$) степенную особенность порядка $\mu \in (0; 1/2)$, соответствует решение $\phi(x)$, имеющее при $x \rightarrow a + 0$ (при $x \rightarrow b - 0$) степенную особенность порядка $2\mu \in (0; 1)$.

3. Четырем допустимым классам $h_0, h(\alpha), h(\beta)$ и $h(\alpha, \beta)$ для решений $\phi_3(t)$ характеристического уравнения (8) при $s = 3$ соответствуют только два допустимых класса для решений $\phi(x)$ исходного уравнения (1) при $s = 3$: $h_{0,a}$ — класс функций, удовлетворяющих условию Гельдера при $x \geq a$, исчезающих при $x \rightarrow +\infty$ и ограниченных при $x \rightarrow a + 0$; $h_0(a)$ — класс функций, удовлетворяющих условию Гельдера при $x > a$, исчезающих при $x \rightarrow +\infty$ и имеющих степенную особенность интегрируемого порядка при $x \rightarrow a + 0$. При этом, чтобы решение $\phi(x)$ исходного полного уравнения (1) при $s = 3$ имело при $x \rightarrow a + 0$ степенную особенность интегрируемого порядка $2\mu \in (0; 1)$, степенная особенность при $t \rightarrow \beta - 0$ решения $\phi_3(t)$ характеристического уравнения (8) при $s = 3$ должна иметь порядок, не превосходящий $\mu = \text{const} \in (0; 1/2)$.

§ 3. Обращение нормальных случаев характеристического уравнения (8) при любом $s \in \{1, 2, 3\}$ и в каждом из ДКИФ является несложным упражнением на применение известной теории [11, с. 482–487] в простейшем варианте, когда контур интегрирования состоит из одной простой конечной разомкнутой кривой:

1) нормируя на единицу коэффициенты уравнения (8), переписываем его в виде

$$\bar{m}_s(t)\phi_s(t) + \frac{\bar{n}_s(t)}{\pi i} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\phi_s(\tau)}{\tau - t} d\tau = \bar{f}_s(t), \quad \alpha < t < \beta, \quad s \in \{1, 2, 3\}, \quad (13)$$

где

$$\bar{m}_s(t) = \frac{m_s(t)}{\sqrt{m_s^2(t) - n_s^2(t)}}, \quad \bar{n}_s(t) = \frac{n_s(t)}{\sqrt{m_s^2(t) - n_s^2(t)}}, \quad \bar{f}_s(t) = \frac{f_s(t)}{\sqrt{m_s^2(t) - n_s^2(t)}}$$

— функции тех же допустимых классов, что $m_s(t), n_s(t)$ и $f_s(t)$ соответственно;

2) значение в точке $t = \alpha$ аргумента функции $G_s(t) = [m_s(t) - n_s(t)]/[m_s(t) + n_s(t)]$ выбираем из требования

$$\theta_s = \arg G(\alpha) \in (-2\pi; 0), \quad \text{если } \phi_s(t) \in h_0 \cup h(\beta),$$

$$\theta_s = \arg G(\alpha) \in (0; 2\pi), \quad \text{если } \phi_s(t) \in h(\alpha) \cup h(\alpha, \beta);$$

тем самым в точке $t = \alpha$ выбраны вполне определенные однозначные ветви каждой из функций $\arg G_s(t)$ и $\ln G_s(t)$;

3) считая эту ветвь функции $\arg G_s(t)$ непрерывно меняющейся на отрезке $\alpha < t < \beta$, получаем единственное значение $\theta_s + \Delta_s = \arg G_s(\beta)$ и вычисляем

целое число $\omega_{s,j}$ из требования

$$\omega_{s,j} = \left\lfloor \frac{\theta_s + \Delta_s}{2\pi} \right\rfloor, \quad \phi_s(t) \in h_0 \cup h(\alpha),$$

$$\omega_{s,j} = 1 + \left\lfloor \frac{\theta_s + \Delta_s}{2\pi} \right\rfloor, \quad \phi_s(t) \in h(\alpha) \cup h(\alpha, \beta),$$

где $[x]$ означает целую часть числа x . Таким образом,

$$\omega_{s,0} = -1 \text{ при } j = 0, \quad \phi_s(t) \in h_0; \quad \omega_{s,1} = 0 \text{ при } j = 1, \quad \phi_s(t) \in h(\alpha);$$

$$\omega_{s,2} = 0 \text{ при } j = 2, \quad \phi_s(t) \in h(\beta); \quad \omega_{s,3} = 1 \text{ при } j = 3, \quad \phi_s(t) \in h(\alpha, \beta); \quad (14)$$

4) затем вводим функцию

$$\chi_{s,j}(w) = (w - \beta)^{-\omega_{s,j}} \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\ln G_s(\tau)}{\tau - w} d\tau \right\},$$

то есть каноническую функцию однородной КЗР, соответствующей s -му варианту уравнения (13) в каждом из допустимых классов h_0 , $h(\alpha)$, $h(\beta)$ или $h(\alpha, \beta)$ —именно в том допустимом классе, в котором $\phi_s(t)$ —отыскиваемое решение и $\omega_{s,j}$ —индекс s -го варианта уравнения (1);

5) после этого строим вспомогательную функцию

$$Z_{s,j}(t) = [\bar{m}_s(t) \pm \bar{n}_s(t)] \chi_{s,j}^{\pm}(t) = (t - \beta)^{-\omega_{s,j}} \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\ln G_s(\tau)}{\tau - t} d\tau \right\}, \quad (15)$$

6) и, наконец, выписываем формулу обращения s -го варианта уравнения (13) в соответствующем j -м допустимом классе: при $\alpha < t < \beta$

$$\phi_{s,j}(t) = \bar{m}_s(t) \bar{f}_s(t) - \bar{n}_s(t) Z_{s,j}(t) \left\{ \frac{1}{\pi i} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\bar{f}_s(\tau)}{Z_{s,j}(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - t} - P_{\omega_{s,j}-1}(t) \right\}, \quad (16)$$

где $P_{\omega_{s,j}-1}(t)$ —многочлен степени не выше $\omega_{s,j} - 1$ с произвольными коэффициентами, если $\omega_{s,j} \geq 1$ и $P_{\omega_{s,j}-1}(t) \equiv 0$ при $\omega_{s,j} \leq 0$; если же $\omega_{s,j} < 0$, то необходимо дополнительно потребовать выполнения следующих условий разрешимости:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\bar{f}_s(\tau)}{Z_{s,j}(\tau)} \tau^{k-1} d\tau = 0, \quad k \in \overline{1 : -\omega_{s,j}}. \quad (17)$$

Выполняя в соотношениях (15)–(17) обратную замену переменных по формулам (6), (7), (9)–(11) и (14), получаем следующие результаты.

Теорема 1. Если $x = b$ не является концом автоматической ограниченности, а $m(x)$, $n(x)$ и $f(x)$ —функции класса Гельдера $H^{(\lambda)}(-\infty; b)$ при $0 < \lambda \leq 1$, причем $f(x)$ может иметь степенную особенность интегрируемого порядка при $x \rightarrow b - 0$, то нормальный случай уравнения (1) при $s = 1$:

1) в допустимом классе $h(b)$ разрешим, безусловно, и имеет единственное решение

$$\phi(x) = \bar{m}(x)\bar{f}(x) - \frac{\bar{n}(x)}{\pi i} \int_{-\infty}^b \frac{Z_1(x)}{Z_1(\xi)} \bar{f}(\xi) \left(\frac{1}{\xi - x} - \frac{1}{2b - \xi - x} \right) d\xi, \quad -\infty < x < b,$$

где

$$Z_1(x) = \exp \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^b \frac{1 + (b - x)^2}{1 + (b - \xi)^2} \ln \frac{m(\xi) - n(\xi)}{m(\xi) + n(\xi)} \left(\frac{1}{t - x} - \frac{1}{2b - t - x} \right) d\xi \right];$$

2) в допустимом классе $h_{0,b}$ имеет единственное решение

$$\phi(x) = \bar{m}(x)\bar{f}(x) - \frac{\bar{n}(x)}{\pi i} \int_{-\infty}^b \frac{Z_1(x)}{Z_1(\xi)} \left(\frac{b - x}{b - \xi} \right)^2 \frac{1 + (b - x)^2}{1 + (b - \xi)^2} \bar{f}(\xi) \left(\frac{1}{\xi - x} - \frac{1}{2b - \xi - x} \right) d\xi$$

лишь при выполнении условия

$$\int_{-\infty}^b \frac{\bar{f}(\xi)}{(b - \xi)Z_1(\xi)} \frac{d\xi}{1 + (b - \xi)^2} = 0$$

Теорема 2. Если $x = a$ и $x = b$ не являются концами автоматической ограниченности, а $m(x), n(x)$ и $f(x)$ — функции класса Гельдера $H^{(\lambda)}(a; b)$ при $0 < \lambda \leq 1$, причем $f(x)$ может иметь степенную особенность интегрируемого порядка при $x \rightarrow a + 0$ и при $x \rightarrow b - 0$, то нормальный случай уравнения (1) при $s = 2$ в каждом из допустимых классов h_j , $0 \leq j \leq 3$ имеет общее решение

$$\phi(x) = \bar{m}(x)\bar{f}(x) - \bar{n}(x)Z_{2,j}(x) \left(\frac{1}{\pi i} \int_a^b \frac{\bar{f}(\xi)}{Z_{2,j}(\xi)} \left[\frac{1}{\xi - x} - \frac{1}{R_2(\xi) - x} \right] d\xi - \frac{c_0}{(x - a)^2 + (b - x)^2} \right), \quad a < x < b,$$

где

$$Z_{2,j}(x) = \left[\frac{(b - x)^2}{(x - a)^2 + (b - x)^2} \right]^{-\omega_{2,j}} \times \\ \times \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{(x - a)^2 + (b - x)^2}{(\xi - a)^2 + (b - \xi)^2} \ln \frac{m(\xi) - n(\xi)}{m(\xi) + n(\xi)} \left(\frac{1}{\xi - x} - \frac{1}{R_2(\xi) - x} \right) d\xi \right\};$$

число $\omega_{2,j}$ определено формулой (14), а c_0 — произвольная при $\omega_{2,j} = 1$ комплексная постоянная, равная нулю при $\omega_{2,j} \leq 0$; если же $\omega_{2,j} < 0$, то необходимо потребовать выполнения условия

$$\int_a^b \frac{\bar{f}(\xi)}{Z_{2,j}(\xi)} \frac{(b - \xi)(\xi - a)}{(\xi - a)^2 + (b - \xi)^2} d\xi = 0.$$

Теорема 3. Если $x = a$ не является концом автоматической ограниченности, а $m(x)$, $n(x)$ и $f(x)$ — функции класса Гельдера $H^{(\lambda)}(a; +\infty)$ при $0 < \lambda \leq 1$, причем $f(x)$ может иметь степенную особенность интегрируемого порядка при $x \rightarrow a + 0$, то нормальный случай уравнения (1) при $s = 3$:

1) в допустимом классе $h_0(a)$ разрешим, безусловно, и имеет единственное решение

$$\phi(x) = \bar{m}(x)\bar{f}(x) - \frac{\bar{n}(x)}{\pi i} \int_a^{+\infty} \frac{Z_3(x)}{Z_3(\xi)} \bar{f}(\xi) \left(\frac{1}{\xi - x} - \frac{1}{2a - \xi - x} \right) d\xi, \quad a < x < +\infty,$$

где

$$Z_3(x) = \exp \left[\frac{1}{2\pi i} \int_a^{+\infty} \frac{1 + (x - a)^2}{1 + (\xi - a)^2} \ln \frac{m(\xi) - n(\xi)}{m(\xi) + n(\xi)} \left(\frac{1}{t - x} - \frac{1}{2a - t - x} \right) d\xi \right];$$

2) в допустимом классе $h_{a,0}$ имеет единственное решение

$$\phi(x) = \bar{m}(x)\bar{f}(x) - \frac{\bar{n}(x)}{\pi i} \int_a^{+\infty} \frac{Z_3(x)}{Z_3(\xi)} \left(1 + \frac{(\xi - a)^2}{1 + (x - a)^2} \right) \bar{f}(\xi) \left(\frac{1}{\xi - x} - \frac{1}{2a - \xi - x} \right) d\xi$$

лишь при выполнении условия

$$\int_a^{+\infty} \frac{\bar{f}(\xi)}{Z_3(\xi)} (\xi - a) d\xi = 0.$$

Замечание. В качестве проверки легко убедиться, что результат (4) для уравнения (2) является частным случаем теоремы 2 данной работы при $j = 2, m(x) \equiv 1, n(x) \equiv i, a = 0$ и $b = 1$.

Литература

- [1] Бицадзе А.В. К проблеме уравнений смешанного типа // Труды матем. института им. В.А.Стеклова. М.: Изд-во АН СССР, 1953. 217 с.
- [2] Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа. М.: Изд-во АН СССР, 1959. 356 с.
- [3] Гахов Ф.Д., Чибрикова Л.И. О некоторых типах сингулярных интегральных уравнений, разрешаемых в замкнутой форме // Матем. сб., 35(77). 1954. № 3. С. 395–436.
- [4] Чибрикова Л.И. Краевая задача Римана для автоморфных функций в случае групп с двумя инвариантами // Известия вузов, Матем., № 6. 1961. С. 121–131.
- [5] Чибрикова Л.И. О решении некоторых полных сингулярных интегральных уравнений // В сб.: "Краевые задачи теории аналитических функций". Казань: Изд-во Казанского ун-та. 1962. С. 95–124.

- [6] Бабурин Ю.С. О сингуляризации сингулярных интегральных уравнений // Дифференц. уравнения. Сборник трудов математических кафедр пединститутов РСФСР, Рязань, а) вып. 10, 1977, с. 14–24; б) вып. 12, 1978, с. 12–23; в) вып. 14, 1979, с. 3–23.
- [7] Бабурин Ю.С. Методы сингуляризации полных сингулярных интегральных уравнений второго рода с ядром Коши. Куйбышев: Изд-во КГУ, 1986. Деп. в ВИНТИ 25.02.87. Т. 1333–В87. 44 с.
- [8] Бабурин Ю.С. Методы решения в замкнутой форме полных сингулярных интегральных уравнений второго рода с ядром Гильберта, с промежутком интегрирования $[0, 2\pi]$ и с аналитически продолжаемыми заданными функциями. Куйбышев: Изд-во КГУ, 1989. Деп. в ВИНТИ 12.07.89. Т. 4638–В89. 195 с.
- [9] Михлин С.Г. Сингулярные интегральные уравнения // УМН, № 3(25). 1948. 368 с.
- [10] Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного. М.: ГРФМЛ, 1976. 376 с.
- [11] Гахов Ф.Д. Краевые задачи. 3-е изд. М.: Наука, 1977. 640 с.

Поступила в редакцию 15/X/2003;
в окончательном варианте – 15/X/2003.

AN ELEMENTARY METHOD OF SINGULARISATION FOR THE COMPLETE SIE-2C WITH AN UNCLOSED CONTOUR OF INTEGRATION³

© 2004 Y.S. Baburin⁴

In the paper inversion formulas of the normal cases for three variants of the complete singular integral equation of the second kind with Cauchy's kernel (that is the complete SIE-2C) and an unclosed contour of integration are given in the closed analytic form. It is shown that due to the specific substitution of the variables in the singular integral that uses group's properties of the kernel the complete SIE-2C can be reduced to the normal case of the characteristic type of the SIE-2C on any finite or semi-infinite contour of integration.

Paper received 15/X/2003.

Paper accepted 15/X/2003.

³Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. Y.N. Radayev.

⁴Baburin Yuriy Stepanovich, Dept. of Higher Mathematics and Informatics, Samara State University, Samara, 443011, Russia.