

О СХОДИМОСТИ АЛГОРИТМОВ АДАПТАЦИИ ДЛЯ МОДЕЛЬНОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

© 2003 И.А. Блатов,¹ Л.М. Исаева²

Алгоритмам построения подвижных адаптивных сеток, автоматически подстраивающимся к особенностям решения задачи, посвящена обширная литература [1]. Однако, насколько нам известно, в литературе отсутствует строгое математическое обоснование сходимости таких алгоритмов к предельным разбиениям, на которых оценка погрешности при заданном количестве узлов будет оптимальной или близкой к оптимальной. В настоящей работе приводятся строгое математическое обоснование сходимости алгоритма адаптации для модельной сингулярно возмущенной задачи.

1. Обозначения

В этой работе будем использовать следующую терминологию. $[r]$ обозначает целую часть вещественного числа r . Пусть $\Delta: -1 = t_{-p} < t_{-p+1} < \dots < t_p = 1$ — некоторое разбиение отрезка $[-1, 1]$. Через $N_{1,i}(t)$ будем обозначать нормированные на единицу в $C[-1, 1]$ сплайны первой степени на разбиении Δ с носителем на интервале (t_i, t_{i+2}) , а через $S(\Delta, 1, 1)$ — пространство линейных сплайнов дефекта 1 на сетке Δ . Всюду ε означает малый положительный параметр. Через $C, C_1, C_2 \dots$ будем обозначать положительные константы, не зависящие от ε и разбиения Δ . Будем писать $f(\varepsilon, \Delta) = O^*(g(\varepsilon, \Delta))$, если $C_1|f(\varepsilon, \Delta)| \leq g(\varepsilon, \Delta) \leq C_2|f(\varepsilon, \Delta)|$. $\|A\|_2$ обозначает спектральную норму квадратной матрицы A .

2. Постановка краевой задачи

Рассмотрим на отрезке $[-1, 1]$ сингулярно возмущенную задачу

$$Lx \equiv -\varepsilon^2 \ddot{x} + c(t)x = f(t), \quad c(t) \geq c_0 > 0, \quad (2.1)$$

¹Блатов Игорь Анатольевич (blatov@ssu.samara.ru), кафедра дифференциальных уравнений и теории управления Самарского государственного университета, 443011, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

²Исаева Лариса Михайловна (larisaisaeva@yandex.ru), кафедра высшей математики Поволжской государственной академии телекоммуникаций и информатики, 443090, г. Самара, Московское шоссе, 77.

$$x(-1) = x(1) = 0. \quad (2.2)$$

Здесь $x \in D$, где D — область определения оператора L , а функции $c(t)$ и $f(t)$ из класса $C^2[-1, 1]$.

Эта задача имеет особенности типа пограничного слоя в окрестности точек ± 1 , и справедливо [2] асимптотическое разложение

$$x(t) = f(t)/c(t) - C_1 e^{-c(-1)\frac{t+1}{\varepsilon}} - C_2 e^{c(1)\frac{t-1}{\varepsilon}} + O(e^{-\frac{1}{\varepsilon}}).$$

Определение 1. Зафиксируем некоторую константу $C > 0$. Границей пограничного слоя мы будем называть такое число $a(C)$, что при $t \in [-a, a]$ имеет место оценка

$$\max \left(\max_{t \in [-a, a]} e^{c(1)\frac{t-1}{\varepsilon}}, \max_{t \in [-a, a]} e^{-c(-1)\frac{t+1}{\varepsilon}} \right) \leq \frac{C}{m^2},$$

где C не зависит от $t, \varepsilon \in (0, 1]$.

Определение 2. Число $\tilde{a}(C) = \inf a(C)$ будем называть точной границей погранслоя.

Легко убедиться, что границей пограничного слоя для задачи (2.1)–(2.2) будет число $a(C) = 1 - \frac{2}{c_0} \varepsilon |\ln m|$, причем справедливо равенство $a(C) = \tilde{a}(C) + O(\varepsilon)$, где $c_0 = \min\{c(-1), c(1)\}$. Величина $a(C)$ близка к $\tilde{a}(C)$.

Мы будем предполагать, что нам известно расположение погранслоев, но неизвестна их точная граница. Поэтому будем рассматривать адаптационные алгоритмы, позволяющие определить эту границу.

3. Дискретизация краевой задачи (2.1)–(2.2)

Выберем разбиение отрезка $[-1, 1]$ в соответствии с известной методикой Шишкина [7]. Сетка Шишкина Δ представляет собой комбинацию густого и редкого разбиений отрезка и определяется формулой

$$t_i = \begin{cases} a \frac{i}{m}, & i = 0, 1, \dots, m, \\ a + (1-a) \frac{i-m}{k^* - m}, & i = m+1, m+2, \dots, k^*. \end{cases} \quad (3.1)$$

$$t_{-i} = -t_i, \quad i = 0, 1, \dots, k^*, \quad (3.2)$$

где $k^* = m + \left\lceil \frac{2}{p_0} m |\ln m| \right\rceil + 1$, $a = 1 - \frac{2}{p_0} \varepsilon \ln m$, $m \in N$, $p_0 = c_0$.

Построенное разбиение будем называть сеткой Шишкина с параметром p_0 .

Точка $a = 1 - \frac{2}{p_0} \varepsilon \ln m$, $p_0 = c_0$ зависит от константы c_0 из уравнения (2.1).

Будем предполагать, что эта константа нам неизвестна и поставим задачу

построения такого алгоритма, который, начиная с некоторого приближенного значения для этой константы, позволит получить значение, обеспечивающее нахождение приближенного решения с порядком $O(h^2)$ независимо от $\forall \varepsilon, h$, таких, что $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0], h \in (0, h_0], \frac{\varepsilon \ln m}{h} \leq \gamma$.

Введем пространства

$$E = \{x_m = x_m(t) \in S(\Delta, 1, 1), x_m(-1) = x_m(1) = 0\}, F = LE,$$

где $S(\Delta, 1, 1)$ — пространство линейных сплайнов дефекта 1 на сетке Шишкина Δ , определяемые равенствами (3.1)–(3.2). Размерность пространств E и F равна $2k^* - 1$.

Для нахождения приближенного решения задачи (2.1)–(2.2) будем использовать метод конечных элементов Галеркина, суть которого состоит в отыскании $x_m(t) \in E$ такой, что для любой функции $y(t) \in E$ имеет место

$$(Lx_m, y) = (f, y), \quad (3.3)$$

где скалярное произведение понимается в смысле $L_2[-1, 1]$.

4. Алгоритм адаптации сетки

- I. Задается некоторое значение $p^0 \geq p_0 = c_0$ и для него строится соответствующая сетка Шишкина по правилу (3.1)–(3.2), где $a = a_0 = 1 - \frac{2}{p^0} \varepsilon \ln m$. В результате решения задачи (3.3) на сетке (3.1)–(3.2) получается приближенное решение $x_{m, p^0}(t)$. Полагаем $k = 0$. Фиксируем $C_1 > 0$.
- II. Задается следующее значение $p^{k+1} = p^k - \tau_k$, где τ_k — выбирается так, чтобы $|a_k - a_{k+1}| = C_1 \varepsilon \ln \ln m$. Здесь $a_k = t_{m, p^k}(t)$, $a_{k+1} = t_{m, p^{k+1}}$ — границы между густым и редким разбиениями сетки Шишкина (3.1)–(3.2) соответственно при $p = p^k$ и $p = p^{k+1}$. В результате решения задачи (3.3) при $p = p^{k+1}$ получается приближенное решение $x_{m, p^{k+1}}(t)$.
- III. Ищем величину $\mu_k = \|x_{m, p^{k+1}}(t) - x_{m, p^k}(t)\|_{C[a_{k+1}, a_k]}$.
- IV. Если $k = 0$, тогда $k := k + 1$ и происходит переход к пункту 2, иначе — переход к пункту 5.
- V. Если $\mu_k > \ln m / m^2$, тогда $k := k + 1$ и происходит переход к пункту 2, иначе — конец алгоритма.

Обоснование сходимости алгоритма дано в **теореме 10.1**.

5. Галеркинский проектор

Определение 3. Оператор $P: D(L) \rightarrow E$ называется *галеркинским проектором*, если $Px = x_m$, где x — точное решение задачи (2.1)–(2.2), x_m — решение задачи (3.3).

Как было показано в [3], галеркинский проектор P можно представить в виде

$$Px = \sum_{j=-k^*+1}^{k^*-1} F(\lambda_j, x) N_{1,j-1}(t), \quad (5.1)$$

где $F(\lambda_j, x) = \varepsilon^2(\lambda'_j, x') + (\lambda_j, c(t)x)$; $N_{1,i}(t)$, $i = \overline{-k^*, k^* - 2}$ — совокупность нормированных на единицу в $C[-1, 1]$ сплайнов из пространства E с носителем (t_i, t_{i+2}) ; $\{\lambda_j(t)\}$, $j = \overline{-k^* + 1, k^* - 1}$ — совокупность функций из $S(\Delta, 1, 1)$, образующих биортогональный к $\{N_{1,i}(t)\}$ базис в смысле формы F .

Имеем

$$F(N_{1,i}, \lambda_j) = \delta_{i,j-1}. \quad (5.2)$$

Следует заметить, что функции $\{\lambda_j(t)\}$ нумеруются по вершине узла, а соответствующие им сплайны $\{N_{1,j-1}(t)\}$ — по самой левой узловой точке их носителя (t_{j-1}, t_{j+1}) .

Задача (2.1)–(2.2) имеет две особые точки, в окрестности которых производная решения резко изменяется. Это точки $t_{\pm m} = \pm a$.

Пусть

$$\alpha(t) = \begin{cases} h + t_m - t, & t \in [0, t_m], \\ h + \min\left\{\frac{t - t_m}{\varepsilon}, 1\right\}, & t \in [t_m, 1]; \end{cases} \quad (5.3)$$

$$\alpha(-t) = \alpha(t), \quad (5.4)$$

весовая функция, малая в окрестности этих точек и растущая при удалении от них. Введем весовую норму по формуле

$$\|\alpha(t)x(t)\|_{C[-1, 1]} = \|x(t)\|_\alpha. \quad (5.5)$$

Тогда, несмотря на то, что мы не можем хорошо приблизить $x(t)$ ломаной в $\|\cdot\|_{C[-1, 1]}$ из-за особенностей, весовая норма подавит их и в $\|\cdot\|_\alpha$ приближение будет хорошим.

Будем говорить, что семейство галеркинских проекторов $P = P(\varepsilon, m)$ обладает свойством локальности, если

$$\|P\|_\alpha \leq C. \quad (5.6)$$

Если предположить, что оценка (5.6) справедлива, тогда на отрезке $[a_{k+1}, 1]$ приближенное решение $x_{m,p^{k+1}}(t)$ будет мало отличаться от точного решения $x(t)$, несмотря на то, что на близких отрезках они отличаются сильно. В результате на $[a_{k+1}, 1]$ будет иметь место приближенная формула

$$\|x_{m,p^{k+1}}(t) - x_{m,p^k}(t)\|_{C[a_{k+1}, 1]} \approx \|x(t) - x_{m,p^k}(t)\|_{C[a_{k+1}, 1]}. \quad (5.7)$$

Она характеризует близость текущей сетки к оптимальной. Приближенное равенство (5.6) будет улучшаться при приближении текущей сетки к оптимальной и ухудшаться при удалении от нее, что является обоснованием сходимости алгоритма адаптации.

В данной работе нашей целью является доказательство локальности галеркинской проекции приближенного решения $x_m(t)$ задачи (3.3), т.е. оценки (5.6), и теоремы о сходимости алгоритма адаптации.

Основной конструкцией при доказательстве (5.6) служит биортогональный базис $\lambda_i(t)$ в тестовом пространстве F . Представление галеркинских проекторов (5.1) через базис из B -сплайнов и биортогональный к нему в $L_2[-1, 1]$ базис в тестовом пространстве позволит доказать равномерную по ε и m ограниченность весовых норм галеркинских проекторов и тем самым получить основной результат.

Определение 4. Будем называть дискретным решением однородной задачи, соответствующей задаче (2.1)–(2.2), на отрезке $[t_i, t_j]$ такую функцию $u_i(t) \in S(\Delta, 1, 1)$, что

$$F(N_{1,k}, u_i) = 0, \quad i \leq k \leq j-2. \quad (5.8)$$

Будем искать ядра биортогональных функционалов $\lambda_i(t)$ в виде

$$\lambda_i(t) = \tilde{\alpha}_i \begin{cases} u_i^1(t), & t \leq t_i, \\ u_i^2(t), & t \geq t_i, \end{cases} \quad (5.9)$$

где функции $u_i^1(t)$ и $u_i^2(t)$ являются дискретными решениями соответственно на $[-1, t_i]$ и $[t_i, 1]$, $\tilde{\alpha}_i$ — множитель, обеспечивающий склейку функций $u_i^1(t)$ и $u_i^2(t)$ в точке $t = t_i$.

В дальнейшем для краткости биортогональными функционалами будем называть их ядра $\lambda_i(t)$, $\mu_i(t)$ и т.д.

Дискретные решения как и биортогональные функционалы нумеруются по вершине узла.

Для построения биортогональных функционалов $\lambda_i(t)$ сначала построим вспомогательные "локальные функционалы" $\mu_i(t)$ в погранслоях и на $(-a, a)$.

6. Построение локальных функционалов в интервале $(-a, a)$

Будем искать функцию $\mu_i^1(t) \in S(\Delta, 1, 1)$, $t \in [t_{-m}, t_m]$, $-m \leq i \leq m$, такую, что

$$F(N_{1,j}, \mu_i^1) = 0, \quad -m-1 \leq j \leq m-1, \quad (6.1)$$

где $F(N_{1,j}, \mu_i^1) = \varepsilon^2(N'_{1,j}, \mu_i^1) + (N_{1,j}, c(t)\mu_i^1)$, в виде

$$\mu_i^1(t) = \sum_{k=-m-1}^{m-1} \gamma_k N_{1,k}(t). \quad (6.2)$$

Здесь γ_k , $k = \overline{-m-1, m-1}$ — неизвестные коэффициенты, подлежащие определению; интегралы при вычислении $F(u, v)$ берутся по t_{-m}, t_m .

Из условия биортогональности в смысле формы F (6.1) имеем:

$$\sum_{k=-m-1}^{m-1} \gamma_k F(N_{1,j}, N_{1,k}) = \delta_{i-1,j}, \quad -m-1 \leq j \leq m-1. \quad (6.3)$$

Формула (6.3) есть СЛАУ относительно $\gamma_{-m-1}, \gamma_{-m}, \dots, \gamma_{m-1}$. Матрица этой системы есть матрица Грама $A = \{a_{sl}\}_{s,l=-m-1}^{m-1}$ относительно скалярного

произведения $[u, v] = F(u, v)$. Тогда (6.3) можно записать в векторно-матричной форме

$$A\gamma = b,$$

где $\gamma = (\gamma_{-m-1}, \gamma_{i+1}, \dots, \gamma_{m-1})^t$, $b = (b_{-m-1}, b_{-m}, \dots, b_{m-1})^t$, $A = \{a_{sl}\}_{s, l=-m-1}^{m-1}$.

Очевидно, что матрица A трехдиагональна, т.е. $a_{sl} = 0$ при $|s - l| > 1$, а вектор b имеет только одну компоненту $b_{i-1} = 1$, отличную от нуля.

Лемма 6.1. Найдется такая константа $C > 0$, не зависящая от i, m , что при $\varepsilon m \leq 1$ справедливы оценки:

$$\|A^{-1}\|_2 \leq Cm. \quad (6.4)$$

Замечание. Нормировкой базисных функций на единицу в $L_2[-1, 1]$ мы можем заменить оценку (6.4) на оценку

$$\|A^{-1}\|_2 \leq C. \quad (6.5)$$

Лемма 6.2. Для нормированных на единицу в $L_2[-1, 1]$ функций $\tilde{N}_{1,i}(t)$ справедливы оценки:

$$|F(\tilde{N}_{1,i}, \tilde{N}_{1,j})| \leq C_3. \quad (6.6)$$

Теорема 6.1 [4]. Для любой константы $C_4 > 0$ найдутся такие константы $C_5 > 0$, $q \in (0, 1)$, что если трехдиагональная матрица A такова, что $\max\{\|A\|_2, \|A^{-1}\|_2\} \leq C_4$, тогда элементы матрицы $A^{-1} = \{a_{s,l}^{\text{rev}}\}_{s, l=-m-1}^{m-1}$ удовлетворяют оценкам

$$|a_{s,l}^{\text{rev}}| \leq C_5 q^{|s-l|}, \quad s, l = \overline{-m-1, m-1}. \quad (6.7)$$

Из формул (6.5), (6.6) и теоремы Демко получаем:

$$|a_{s,l}^{\text{rev}}| \leq C_5 m q^{|s-l|}, \quad s, l = \overline{i, m-2}. \quad (6.8)$$

Используя оценки (6.8) для системы (6.3), имеем:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \gamma_{-m-1} \\ \gamma_{-m} \\ \vdots \\ \gamma_{m-1} \end{pmatrix} &= A^{-1}b = \begin{pmatrix} a_{-m-1,i}^{\text{rev}} \\ a_{-m,i}^{\text{rev}} \\ \vdots \\ a_{m-1,i}^{\text{rev}} \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow |\gamma_{i+k}| &= |a_{i+k,i}^{\text{rev}}| |F(\tilde{N}_{1,i}, \tilde{N}_{1,i-1})| \leq C_7 q^{|k|}. \end{aligned}$$

Итак, доказана оценка

$$|\gamma_{i+k}| \leq C_7 q^{|k|}. \quad (6.9)$$

Из (6.9) и формулы (6.2) с учетом равенства $\tilde{N}_{1,i} = O^*(m^{1/2})N_{1,i}$ вытекает оценка биортогонального функционала $\mu_i^1(t)$ при $t \in [t_{i+k}, t_{i+k+1}]$, $k = \overline{0, m-i-1}$:

$$|\mu_i^1(t)| = O^*(m^{1/2}) |\gamma_{i+k-1} \tilde{N}_{1,i+k-1}(t) + \gamma_{i+k} \tilde{N}_{1,i+k}(t)| \leq m C_7 q^{|k|-1}. \quad (6.10)$$

7. Построение локальных функционалов в пограничных слоях

Будем обозначать через $\kappa_{\pm i}^{1,2}(t)$, $i = \overline{m, k^* - 1}$ дискретные решения, построенные в пограничных слоях. При этом

$\kappa_i^1(t)$, $i = \overline{m+1, k^* - 1}$ — дискретное решение при $t \in [a, t_i]$;

$\kappa_{-i}^1(t)$, $i = \overline{-k^* + 1, -m - 1}$ — дискретное решение при $t \in [t_{-i}, -a]$;

$\kappa_i^2(t)$, $i = \overline{m, k^* - 1}$ — дискретное решение при $t \in [t_i, 1]$;

$\kappa_{-i}^2(t)$, $i = \overline{-k^* + 1, -m}$ — дискретное решение при $t \in [-1, t_{-i}]$.

Тогда локальный функционал в погранслое строится в виде

$$\mu_i(t) = \begin{cases} \kappa_i^1(t), & t \in [a, t_i]; \\ \kappa_i^2(t), & t \in [t_i, 1], \end{cases} \quad i = \overline{m, k^* - 1},$$

$$\mu_i(t) = \begin{cases} \kappa_i^2(t), & t \in [-1, t_i], \\ \kappa_i^1(t), & t \in [t_i, -a], \end{cases} \quad i = \overline{-k^* + 1, -m}.$$

Для определенности рассмотрим построение биортогонального функционала в правом погранслое на отрезке $[a, 1]$ (на отрезке $[-1, -a]$ построение проводится аналогично).

Пусть

$$G_\varepsilon(t, t_i) = \begin{cases} v_{\varepsilon, i}(t), & t \in [t_m, t_i] \\ w_{\varepsilon, i}(t), & t \in [t_i, 1] \end{cases}, \quad i = \overline{m, k^* - 1} \quad (7.1)$$

является функцией Грина краевой задачи для уравнения (2.1) на отрезке $[a, 1]$ с условиями $u(a) = u(1) = 0$. Тогда $G_\varepsilon(t, t_i)$, $i = \overline{m+1, k^* - 1}$ удовлетворяет однородным условиям на отрезке $[a, 1]$

$$v_{\varepsilon, i}(a) = w_{\varepsilon, i}(1) = 0. \quad (7.2)$$

Здесь $v_{\varepsilon, i}(t)$ и $w_{\varepsilon, i}(t)$ — соответственно левая и правая срезки функции Грина. Определим

$$v_i(t) = \begin{cases} \tilde{v}_{\varepsilon, i}(t), & t \in [t_m, t_i], \\ \tilde{w}_{\varepsilon, i}(t), & t \in [t_i, 1] \end{cases}$$

как кусочно-линейный интерполянт функции Грина при $i = \overline{m+1, k^* - 1}$, где $\tilde{v}_{\varepsilon, i}(t)$ и $\tilde{w}_{\varepsilon, i}(t)$ — кусочно-линейные интерполянты функций $v_{\varepsilon, i}(t)$ и $w_{\varepsilon, i}(t)$. При $i = m$ определим $v_i(t)$ как кусочно-линейный интерполянт $w_{\varepsilon, m}$, удовлетворяющего условию (7.2).

Будем искать биортогональный функционал $\mu_i(t)$ в виде

$$\mu_i(t) = \sum_{k=m}^{k^*-1} \alpha_{k, i} v_k(t), \quad m \leq i \leq k^* - 1, \quad t \in [t_m, 1], \quad (7.3)$$

причем

$$F(N_{1, j}, \lambda_i) = \delta_{i-1, j}. \quad (7.4)$$

Из условия биортогональности в смысле формы F (7.4) имеем СЛАН

$$\sum_{k=m}^{k^*-1} \alpha_{k, i} F(N_{1, j}, v_k(t)) = \delta_{i-1, j}, \quad m-1 \leq j \leq k^* - 2, \quad m \leq i \leq k^* - 1. \quad (7.5)$$

Из условия $t_{i+1} - t_i = O^*\left(\frac{\varepsilon}{m}\right)$ и оценок кусочно-линейной интерполяции можно получить

$$|F(N_{1,j}, v_k(t))| = \begin{cases} O\left(\frac{1}{m^2}\right), & j < k-1, \\ 1 + O\left(\frac{1}{m}\right), & j = k-1, \\ O\left(\frac{1}{m^3}\right), & j > k-1. \end{cases} \quad (7.6)$$

Тогда СЛАУ (7.5) имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 + O\left(\frac{1}{m}\right) & O\left(\frac{1}{m^3}\right) & \dots & O\left(\frac{1}{m^3}\right) \\ O\left(\frac{1}{m^2}\right) & 1 + O\left(\frac{1}{m}\right) & \dots & O\left(\frac{1}{m^3}\right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ O\left(\frac{1}{m^2}\right) & O\left(\frac{1}{m^2}\right) & \dots & 1 + O\left(\frac{1}{m}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{m,i} \\ \alpha_{m+1,i} \\ \dots \\ \alpha_{k^*-1,i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i-1 \quad (7.7)$$

для каждого конкретного $i = \overline{m, k^*-1}$, т.е. таких систем будет $k^* - m$.

Введем обозначения

$$\begin{pmatrix} \alpha_{m,i} \\ \alpha_{m+1,i} \\ \vdots \\ \alpha_{k^*-1,i} \end{pmatrix} = \alpha_i, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = I_i,$$

$$\begin{pmatrix} O\left(\frac{1}{m}\right) & O\left(\frac{1}{m^3}\right) & \dots & O\left(\frac{1}{m^3}\right) \\ O\left(\frac{1}{m^2}\right) & O\left(\frac{1}{m}\right) & \dots & O\left(\frac{1}{m^3}\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ O\left(\frac{1}{m^2}\right) & O\left(\frac{1}{m^2}\right) & \dots & O\left(\frac{1}{m}\right) \end{pmatrix} = E_i, \quad i-1 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = e_i$$

и перепишем $k^* - m$ систем (7.7) в векторно-матричном виде

$$(I_i + E_i)\alpha_i = e_i, \quad i = \overline{m, k^*-1}, \quad (7.8)$$

где $\|E_i\|_\infty \leq \frac{C}{m}$.

Оценим элементы вектора $\alpha_i = \{\alpha_{k,i}\}$, $i = \overline{m, k^* - 1}$, $k = \overline{m, k^* - 1}$.

$$\alpha_i = (I_i + E_i)^{-1} e_i = \left(I_i + \sum_{j=1}^{\infty} E_i^j (-1)^j \right) e_i.$$

Так как $\left\| \sum_{j=1}^{\infty} E_i^j \right\| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|E_i\|^j \leq \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{C}{m}\right)^j = \frac{C/m}{1-C/m} = O\left(\frac{1}{m}\right)$, то получаем, что

$$\alpha_{k,i} = \begin{cases} 1 + O\left(\frac{1}{m}\right), & k = i, \\ O\left(\frac{1}{m}\right), & k \neq i. \end{cases} \quad (7.9)$$

Итак, локальные биортогональные функционалы в правом погранслое имеют вид

$$\mu_i(t) = \sum_{k=m}^{k^*-1} \alpha_{k,i} \nu_k(t) = \left(1 + O\left(\frac{1}{m}\right)\right) \nu_i(t) + \sum_{k=m, k \neq i}^{k^*-1} \alpha_{k,i} \nu_k(t), \quad m \leq i \leq k^* - 1, \quad t \in [t_m, 1],$$

где $\alpha_{k,i}$ удовлетворяют оценкам (7.9).

8. Построение биортогональных функционалов

Искомые функционалы $\lambda_i(t)$ построим путем коррекции функционалов, построенных в предыдущих пунктах. Вначале построим корректирующие функционалы $\lambda_{\pm m}(t)$.

Положим

$$\tilde{\lambda}_m(t) = \begin{cases} \alpha \mu_m(t), & t \in [t_m, 1], \\ \mu_m^1(t), & t \in [t_{-m}, t, m], \\ 0, & t \in [-1, t_{-m}], \end{cases} \quad (8.1)$$

где $\mu_m(t)$, $\mu_m^1(t)$ — локальные биортогональные функционалы, построенные в предыдущих пунктах, а множитель α выбирается так, чтобы функция (8.1) была непрерывна при $t = t_m$.

В частности, из оценок предыдущих пунктов имеем

$$\mu_m(a) = O^*\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), \quad \mu_m^1(a) = O(m), \quad \alpha = O(\varepsilon m). \quad (8.2)$$

Из условий (8.1), (8.2), определения $\mu_m(t)$, $\mu_m^1(t)$ и условия $\varepsilon m = O((\ln m)^{-1})$ имеем

$$F(N_{1, m-1}, \tilde{\lambda}_m) = 1 + O((\ln m)^{-1}). \quad (8.3)$$

Определим функционал $\hat{\lambda}_m(t)$ по формуле

$$\hat{\lambda}_m(t) = \Delta_1 \tilde{\lambda}_m(t), \quad (8.4)$$

где нормирующий множитель Δ_1 подбирается из условия

$$F(N_{1, m-1}, \hat{\lambda}_m) = 1,$$

то есть, согласно (8.3)

$$\Delta_1 = 1 + O^*(\varepsilon m). \quad (8.5)$$

Функционал $\hat{\lambda}_{-m}(t)$ определим по формуле

$$\hat{\lambda}_{-m}(t) = \hat{\lambda}_m(-t). \quad (8.6)$$

Из определения $\hat{\lambda}_{\pm m}$ и оценок п. 6 следует, что

$$F(N_{1,k}, \hat{\lambda}_m) = \begin{cases} 1, & k = m-1, \\ 0, & k \neq m-1, -m-1, \\ O(mq^{-m}), & k = -m-1; \end{cases}$$

$$F(N_{1,k}, \hat{\lambda}_{-m}) = \begin{cases} 1, & k = -m-1, \\ 0, & k \neq m-1, -m-1, \\ O(mq^{-m}), & k = m-1. \end{cases} \quad (8.7)$$

Определим, наконец, $\lambda_{\pm m}$ по формулам

$$\lambda_m(t) = \alpha_m \hat{\lambda}_m(t) + \alpha_{-m} \hat{\lambda}_{-m}(t), \quad \lambda_{-m}(t) = \beta_m \hat{\lambda}_m(t) + \beta_{-m} \hat{\lambda}_{-m}(t), \quad (8.8)$$

где константы $\alpha_{\pm m}, \beta_{\pm m}$ определяются из условий (7.4) при $i = \pm m$. Из (8.7) имеем

$$\alpha_m = 1 + O(mq^m), \quad \alpha_{-m} = O(mq^m), \quad \beta_m = O(mq^m), \quad \beta_{-m} = 1 + O(mq^m). \quad (8.9)$$

Остальные функционалы $\lambda_i(t)$ определим формулами

$$\lambda_i(t) = \tilde{\mu}_i(t) - F(N_{1,-m-1}, \tilde{\mu}_{-m-1})\lambda_{-m}(t) - F(N_{1,m-1}, \tilde{\mu}_{m-1})\lambda_m(t),$$

$$i = -k^* + 1, k^* - 1, i \neq \pm m, \quad (8.10)$$

где $\tilde{\mu}_i(t)$ — частичные биортогональные функционалы из предыдущих пунктов, продолженные нулем на $[-1, 1]$ с $[a, 1]$ или $[-1, -a]$.

9. Локальность галеркинського проектора

Как было показано в [3], галеркинський проектор можно представить в виде (5.1). В весовой норме (5.3)–(5.4) для него имеет место оценка

$$\begin{aligned} \|Px\|_\alpha &= \left\| \sum_{j=-k^*+1}^{k^*-1} F(\lambda_j(t), x(t)) N_{1,j-1}(t) \alpha(t) \right\|_{C[-1,1]} \leq \\ &\leq \max_{t_{-k^*} \leq t \leq t_{-k^*+1}} |\alpha(t)| \cdot |F(\lambda_{-k^*+1}(t), x(t))| + \\ &+ \max_{-k^*+1 \leq j \leq k^*-2} \max_{t_j \leq t \leq t_{j+1}} |\alpha(t)| \cdot (|F(\lambda_j(t), x(t))| + |F(\lambda_{j+1}(t), x(t))|) + \\ &+ \max_{t_{k^*-1} \leq t \leq t_{k^*}} |\alpha(t)| \cdot |F(\lambda_{k^*-1}(t), x(t))|. \end{aligned}$$

Если мы докажем, что

$$\begin{aligned} \max_{t_j \leq t \leq t_{j+1}} |\alpha(t)| (|F(\lambda_j(t), x(t))| + |F(\lambda_{j+1}(t), x(t))|) &\leq \\ \leq C \max_{-1 \leq t \leq 1} |\alpha(t)x(t)| = C \|x\|_\alpha, & \quad j = \overline{-k^*, k^*-1}, \end{aligned}$$

то тогда будет справедлива оценка

$$\|Px(t)\|_\alpha \leq C \|x(t)\|_\alpha,$$

или

$$\|P\|_\alpha \leq C. \quad (9.1)$$

Оценка (9.1) является обоснованием локальности галеркинського проектора (5.1).

Предположим, что при $j = \overline{-k^*, k^* - 1}$

$$\max_{t \in [t_j, t_{j+1}]} |\alpha(t)| = O^* \left(\min_{t \in [t_j, t_{j+1}]} |\alpha(t)| \right), \quad (9.2)$$

$$\max_{t \in [t_j, t_{j+1}]} |\alpha(t)| = O^* \left(\max_{t \in [t_{j+1}, t_{j+1+1}]} |\alpha(t)| \right), \quad (9.3)$$

$$\alpha(t) > 0.$$

При допущениях (9.2)–(9.3) для доказательства (9.1) достаточно установить оценку

$$|F(\lambda_j(t), x(t))| |\alpha(t_j)| \leq C \|x(t)\|_\alpha. \quad (9.4)$$

Прибавим и отнимем в левой части (9.4) от функции $x(t)$ кусочно-линейный интерполянт

$$x_I(t) = \sum_{i=-k^*}^{k^*-2} \varphi_i N_{1,i}(t).$$

Получим

$$\begin{aligned} |F(\lambda_j(t), x(t))| |\alpha(t_j)| &= |F(\lambda_j(t), x - x_I) + F(\lambda_j(t), x_I)| |\alpha(t_j)| = \\ &= |F(\lambda_j(t), x - x_I) + x(t_j)| |\alpha(t_j)| \leq \alpha(t_j) |F(\lambda_j(t), x - x_I)| + C_1 \|x\|_\alpha, \end{aligned}$$

так как

$$\begin{aligned} F(\lambda_j(t), x_I) &= F \left(\lambda_j(t), \sum_{i=-k^*}^{k^*-2} \varphi_i N_{1,i}(t) \right) = \sum_{i=-k^*}^{k^*-2} \varphi_i \overbrace{F(\lambda_j, N_{1,i}(t))}^{\delta_{i,j-1}} = \\ &= \varphi_{j-1} F(\lambda_j, N_{1,j-1}) = \varphi_{j-1} = x_I(t_j) = x(t_j). \end{aligned}$$

Тогда вместо (9.4) достаточно доказать

$$|F(\lambda_j, x - x_I)| |\alpha(t_j)| \leq C \|x\|_\alpha. \quad (9.5)$$

Рассматривая отдельно три случая, когда $j = m$, $0 \leq j \leq m-1$, $m+1 \leq j \leq k^*-1$, и пользуясь свойствами биортогональных функционалов, построенных в предыдущих пунктах, и оценками кусочно-линейной интерполяции, можно получить, что оценки (9.5) имеют место в первых двух случаях, а в последнем случае присутствует дополнительный множитель $\ln m$, который растет не очень быстро. Таким образом, имеет место теорема о "почти" локальности галеркинського проектора.

Теорема 9.1. Пусть весовая функция задана равенствами (5.3)–(5.4). Тогда справедлива оценка

$$\|P\|_\alpha \leq C \ln m, \quad (9.6)$$

где C не зависит от ε , m .

10. Обоснование сходимости алгоритма адаптации сетки (I)–(V) раздела 4.

Теорема 10.1. Найдутся такие константы $\varepsilon_0 > 0$, $m_0 \in \mathbb{N}$, $\gamma > 0$, $C > 0$, $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, что для любых $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $m \geq m_0$: $\varepsilon | \ln m | \leq \frac{\gamma}{m}$ алгоритм (I)–(V) раздела 4 закончит работу при $k < C_2 \ln m / \ln \ln m$, причем для решения $x_m^{(k)}$ на сетке, определяемой параметром p^k , будет справедлива оценка:

$$\|x_m^{(k)} - x\|_{C[-1, 1]} \leq \frac{C \ln m}{m^2}. \quad (10.1)$$

Доказательство теоремы 10.1.

I этап. Алгоритм (I)–(V), суть которого состоит в процессе подбора параметра p^k , где k — число итераций, продолжает свою работу до тех пор, пока будет иметь место оценка

$$\|x_{m, p^{k+1}}(t) - x_{m, p^k}(t)\|_{C[a_{k+1}, a_k]} > \ln m / m^2. \quad (10.2)$$

На первом этапе будем заниматься изучением вопроса, достаточно ли критерия (10.2) для достижения точной границы пограничного слоя $\tilde{a}$.

Оценим величину разности между точным и приближенным решениями в равномерной норме для разбиения с границей a_k .

$$\|Px - x\|_{C[a_{k+1}, a_k]} \leq \|P(x - \tilde{x})\|_{C[0, a_k]} + \|x - \tilde{x}\|_{C[a_{k+1}, a_k]}, \quad (10.3)$$

где $\tilde{x} \in E$ — наилучшее приближение точного решения на заданном отрезке. В силу определения наилучшего приближения, вида асимптотики точного решения (п.2), погрешности кусочно-линейной аппроксимации, невозможности приблизить погранслоиные экспоненты линейной функцией на отрезке длины h с относительной погрешностью лучше, чем $O(\min h^2 / \varepsilon^2) = O(1)$, имеем

$$\|x - \tilde{x}\|_{C[a_{k+1}, a_k]} = O^* \left(e^{c_0(a_k - 1)\varepsilon^{-1}} + \frac{1}{m^2} \right).$$

Пользуясь свойством "почти" локальности галеркинских проекторов и оценкой наилучшего равномерного приближения, аналогичным образом получаем оценку

$$\|P(x - \tilde{x})\|_{C[a_{k+1}, a_k]} \leq C_4 \left(e^{c_0(a_k - 1)\varepsilon^{-1}} + \frac{1}{m^2} \right) \ln m$$

и (10.3) примет вид

$$\begin{aligned} O^* \left(e^{c_0(a_k - 1)\varepsilon^{-1}} + \frac{1}{m^2} \right) &\leq \|Px - x\|_{C[a_{k+1}, a_k]} \leq \\ &\leq O^* \left(e^{c_0(a_k - 1)\varepsilon^{-1}} + \frac{1}{m^2} \right) \ln m. \end{aligned} \quad (10.4)$$

Аналогичным образом можно получить оценку для границы погранслоя a_{k+1}

$$O^* \left(e^{c_0(a_{k+1} - 1)\varepsilon^{-1}} + \frac{1}{m^2} \right) \leq \|Px - x\|_{C[a_{k+1}, a_k]} \leq$$

$$\leq O^* \left(e^{c_0(a_{k-1}-1)\varepsilon^{-1}} + \frac{1}{m^2} \right) \ln m. \quad (10.5)$$

При реализации алгоритма (I)–(V) раздела 4. граница густого и редкого разбиений отрезка $[0, 1]$ сдвигается влево на величину порядка $O(\varepsilon \ln \ln m)$. При этом происходит улучшение аппроксимации приближенного решения на величину $O^* \left(e^{c_0(a_k-1)\varepsilon^{-1}} \right) - O^* \left(e^{c_0(a_{k-1}-1)\varepsilon^{-1}} \right) \ln m = O^* \left(e^{c_0(a_k-1)\varepsilon^{-1}} \right)$, если только $C_1 c_0 > 1$ в окрестности точной границы погранслоя. Это движение будет продолжаться до тех пор, пока для некоторых $C_5, C_6 > 0$

$$C_5 e^{c_0(a_k-1)\varepsilon^{-1}} > \frac{C_6 \ln m}{m^2},$$

т.е.

$$\begin{aligned} c_0 \frac{a_k - 1}{\varepsilon} &> \ln \frac{C_5}{C_6} - \ln(C_1 m^2 / \ln m), \\ a_k &> 1 + \frac{\varepsilon}{c_0} \left(\ln \frac{C_5}{C_6} - \ln C_5 - 2 \ln m + \ln \ln m \right), \\ a_k &> 1 - \underbrace{\frac{2\varepsilon}{c_0} \ln m + \frac{\varepsilon}{c_0} (\ln C_7 - \ln \ln m)}_{\tilde{a}}, \\ a_k &> \tilde{a} + O(\varepsilon \ln \ln m). \end{aligned}$$

Итак, мы дойдем до точной границы погранслоя с точностью $O(\varepsilon) \ln \ln m$, а количество итераций в алгоритме будет порядка $O\left(\frac{\varepsilon \ln m}{\varepsilon \ln \ln m}\right) = O(\ln m)$.

II этап. Здесь изучается вопрос о том, не переходим ли мы точную границу пограничного слоя при уменьшении p^k .

Предположим, что переход за точную границу пограничного слоя произошел. Тогда имеем

$$e^{c_0 c_0(a_k-1)\varepsilon^{-1}} < \frac{C_5}{m^2}.$$

Но тогда пространство E содержит аппроксимацию точного решения порядка $O\left(\frac{1}{m^2}\right)$. В силу квазиоптимальности метода Галеркина для рассматриваемой задачи [3] норма разности в п. III рассматриваемого алгоритма будет величиной такого же порядка, и уже на следующем шаге алгоритм закончит свою работу. Теорема доказана.

11. Доказательства и вспомогательные результаты

Доказательство леммы 6.1. Поскольку система $\{N_{1,k}\}$ линейно независима, то матрица A есть симметричная положительно определенная матрица. Действительно, рассмотрим квадратичную форму этой матрицы

$$\begin{aligned} (A\gamma, \gamma) &= \sum_{s=i}^{m-2} \left(\sum_{k=i}^{m-2} a_{sk} \gamma_k \right) \gamma_s = \sum_{s=i}^{m-2} \sum_{k=i}^{m-2} F(N_{1,s}, N_{1,k}) \gamma_k \gamma_s = \\ &= F \left(\sum_{s=i}^{m-2} \gamma_s N_{1,s}, \sum_{k=i}^{m-2} \gamma_k N_{1,k} \right) = F \left(\sum_{s=i}^{m-2} \gamma_s N_{1,s}, \sum_{s=i}^{m-2} \gamma_s N_{1,s} \right) = \left[\sum_{s=i}^{m-2} \gamma_s N_{1,s} \right]^2, \end{aligned}$$

где $[u]^2 = F(u, u)$.

Докажем, что

$$\left[\sum_{s=i}^{m-2} \gamma_s N_{1,s} \right]^2 \geq \frac{C_1}{m} \sum_{s=i}^{m-2} |\gamma_s|^2, \quad (11.1)$$

где $C_1 > 0$ не зависит от i, m, γ .

Имеем:

$$\begin{aligned} \left[\sum_{s=i}^{m-2} \gamma_s N_{1,s} \right]^2 &= \varepsilon^2 \left(\sum_{s=i}^{m-2} \gamma_s N'_{1,s}, \sum_{s=i}^{m-2} \gamma_s N'_{1,s} \right) + \left(c(t) \sum_{s=i}^{m-2} \gamma_s N_{1,s}, \sum_{s=i}^{m-2} \gamma_s N_{1,s} \right) \geq \\ &\geq \left(c(t) \sum_{s=i}^{m-2} \gamma_s N_{1,s}, \sum_{s=i}^{m-2} \gamma_s N_{1,s} \right) = \sum_{v=i}^{m-1} \int_{t_v}^{t_{v+1}} c(t) \left(\sum_{s=i}^{m-2} \gamma_s N_{1,s} \right)^2 dt = \\ &= \sum_{v=i}^{m-1} \int_{t_v}^{t_{v+1}} c(t) (\gamma_{v-1} N_{1,v-1} + \gamma_v N_{1,v})^2 dt \geq \\ &\geq \sum_{v=i}^{m-1} \int_{t_v}^{t_{v+1}} c(t) (\gamma_{v-1}^2 N_{1,v-1}^2(t) + \gamma_v^2 N_{1,v}^2(t)) dt \geq \frac{ah}{3} \sum_{v=i}^{m-1} \min_{t_v \leq t \leq t_{v+1}} c(t) (\gamma_{v-1}^2 + \gamma_v^2) \geq \\ &\geq \frac{2ah}{3} \min_{t_i \leq t \leq t_m} c(t) \sum_{v=i}^{m-2} |\gamma_v|^2 = \frac{C_1}{m} \sum_{v=i}^{m-2} |\gamma_v|^2, \end{aligned}$$

где C_1 ни от чего не зависит. Оценка (11.1) доказана.

Получили, что

$$|(A\gamma, \gamma)| \geq \frac{C_1}{m} \sum_{v=i}^{m-2} |\gamma_v|^2.$$

Отсюда очевидно, что

$$\|A^{-1}\|_2 \leq C_2 m.$$

Полагая $C = C_2$, получаем утверждение леммы.

Доказательство леммы 6.2. Нормированные на единицу в $L_2[-1, 1]$ базисные функции $N_{1,i}(t)$ имеют вид:

$$\begin{aligned} N_{1,i}(t) &= O^*(\sqrt{m}) \begin{cases} \frac{t-t_i}{ah}, & t \in [t_i, t_{i+1}), \\ \frac{t_{i+2}-t}{ah}, & t \in [t_{i+1}, t_{i+2}), \\ 0, & t \notin [t_i, t_{i+2}); \end{cases} \\ N'_{1,i}(t) &= O^*(\sqrt{m}) \begin{cases} \frac{1}{ah}, & t \in [t_i, t_{i+1}), \\ -\frac{1}{ah}, & t \in [t_{i+1}, t_{i+2}), \\ 0, & t \notin [t_i, t_{i+2}). \end{cases} \end{aligned} \quad (11.2)$$

Тогда

$$\begin{aligned} |F(N_{1,i}, N_{1,j})| &= |\varepsilon^2(N'_{1,i}, N'_{1,j}) + (c(t)N_{1,i}, N_{1,j})| \leq \\ &\leq \varepsilon^2 \|N'_{1,i}\|_2 \|N'_{1,j}\|_2 + \max_{t \in \text{supp } N_{1,i} \cap \text{supp } N_{1,j}} c(t) = \\ &= \sqrt{\varepsilon^2(N'_{1,i}, N'_{1,i})} \sqrt{\varepsilon^2(N'_{1,j}, N'_{1,j})} + \max_{t \in \text{supp } N_{1,i} \cap \text{supp } N_{1,j}} c(t). \end{aligned} \quad (11.3)$$

Так как

$$\varepsilon^2(N'_{1,i}, N'_{1,i}) = \varepsilon^2 O^*(m) \int_{t_i}^{t_{i+2}} \frac{dt}{a^2 h^2} = O^*(\varepsilon^2 m^2),$$

$$\max_{t \in \text{supp } N_{1,i} \cap \text{supp } N_{1,j}} c(t) = O(1),$$

то оценка (11.3) примет вид

$$|F(N_{1,i}, N_{1,j})| = O^*(\varepsilon^2 m^2) + O(1) = O(1)$$

в силу условия $\varepsilon m \leq 1$. Лемма доказана.

Литература

- [1] Лисейкин В.Д. Методы построения сеток. Springer, 1999.
- [2] Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.
- [3] Блатов И.А., Стрыгин В.В. Элементы теории сплайнов и метод конечных элементов для задач с погранслоем. Воронеж: ВГУ, 1997. 406 с.
- [4] Demko S. Inverses of band matrices and local convergence of spline projection // SIAM J. Numer. Anal. 1977. 14. No. 4. P. 616–619.
- [5] Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1977. 512 с.
- [6] Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. 590 с.
- [7] Шишкин Г.И. Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений. Екатеринбург: УрОРАН, 1992. 192 с.

Поступила в редакцию 8/X/2003;
в окончательном варианте — 8/X/2003.

ON CONVERGENCE OF ALGORITHMS OF ADAPTATION FOR MODELLING A SINGULARLY PERTURBED BOUNDARY VALUE PROBLEM

© 2003 I.A. Blatov³ L.M. Isaeva⁴

The wide range of literary sources is dedicated to algorithms of construction of mobile adaptive grids automatically fine-tuned to features of the solution of a problem [1]. However, to our knowledge, in the literature there are no rigorous mathematical proofs of convergence of such algorithms to limiting splittings, on which one the estimation of error at a given number of clusters would be optimum or close to optimum. In the present study the rigorous mathematical proofs of convergence of algorithm of adaptation for modelling singular perturbed problem are given.

Paper received 8/X/2003;

Paper accepted 8/X/2003.

³Blatov Igor Anatolievich (blatov@ssu.samara.ru), Dept. of the Differential Equations and Theory of Control, Samara State University, Samara, 443011, Russia.

⁴Isaeva Larisa Mikhailovna (larisaisaeva@yandex.ru), Dept. of Higher Mathematics, Povolzhskaya State Academy of Telecommunications and Computer Science, Samara, 443090, Russia.