

МОДЕЛИРОВАНИЕ АВТОКОЛЕБАНИЙ В ГЕНЕРАТОРЕ С ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИМ РЕЗОНАТОРОМ

© 2003 В.В. Зайцев, О.В. Зайцев, А.В. Никулин, Г.П. Яровой¹

Разработаны математические модели различной степени сложности для струнного автогенератора, являющегося основным конструктивным элементом частотных акселерометров. Модели имеют форму уравнений движения динамической системы с одной или со многими степенями свободы и допускают применение стандартных методов численного интегрирования систем ОДУ. Определены условия самовозбуждения автоколебательной системы. Показано, что в струнном автогенераторе наблюдается эффект затягивания гармоник автоколебаний высшими модами колебаний электромеханического резонатора.

Автогенераторы с электромеханическими резонаторами, выполненными на основе колеблющейся в магнитном поле металлической струны, — струнные автогенераторы — широко используются при конструировании частотных датчиков ускорений (акселерометров) [1]. Такие акселерометры в настоящее время считаются наиболее точными [2] и широко используются, например, в системах автоматического управления движением объектов по заданной траектории. Достижение минимального времени реагирования, дальнейшее повышение точности и совершенствование конструкции акселерометров возможны лишь на основе детальных исследований переходных процессов и флуктуационных явлений в струнных автогенераторах.

В настоящем сообщении описаны математические модели струнного автогенератора и представлены некоторые результаты численного моделирования.

Колебательной системой автогенератора является проводящая ток струна, помещенная в постоянное во времени, неоднородное магнитное поле с индукцией $b(x)$, зависящей от координаты x , отсчитываемой вдоль струны. Колебания струны в плоскости, перпендикулярной силовым линиям магнитного поля, сопровождаются возбуждением переменной ЭДС электромагнитной индукции. При включении такой электромеханической системы в цепь переменного тока импеданс, измеренный на ее выводах, имеет ярко выраженную резонансную зависимость от частоты с максимумами на частотах

¹Зайцев Валерий Васильевич (zaitsev@ssu.samara.ru), Зайцев Олег Валерьевич, Никулин Андрей Валентинович, Яровой Геннадий Петрович, кафедра радиофизики и компьютерного моделирования радиосистем Самарского государственного университета, 443011, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

собственных колебаний струны. Таким образом, система "струна — магнитное поле" представляет собой электромеханический резонатор (ЭМР). При включении ЭМР в цепь обратной связи активного элемента (АЭ) с достаточно высоким коэффициентом усиления в схеме, изображенной на рис. 1, возбуждаются незатухающие квазигармонические колебания.

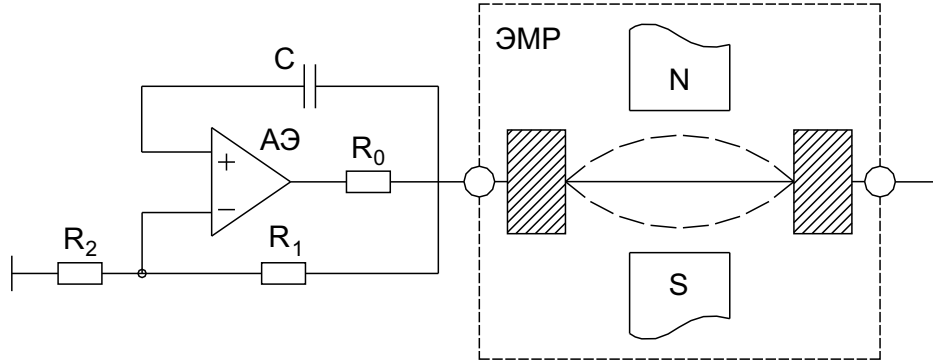


Рис. 1. Эквивалентная схема струнного автогенератора

На основе анализа движения элементов нерастяжимой струны в плоскости, перпендикулярной силовым линиям магнитного поля, под действием силы упругости и силы Ампера для отклонения струны от положения равновесия $u(x, t)$ в точке x в момент времени t удастся получить следующее нелинейное интегро-дифференциальное уравнение с частными производными:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), \quad v(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}, \quad (1)$$

$$f(x, t) = \rho^{-1} g_0 b(x) \left(1 - \beta \left(\int_0^l b(x) v(x, t) dx \right)^2 \right) \int_0^l b(x) v(x, t) dx.$$

Здесь ρ — плотность струны, $c = \sqrt{F/\rho}$ — скорость волны в струне с натяжением F , α — показатель потерь энергии волны в струне — параметры модели. Кроме того, при выводе уравнения использована неполная кубическая аппроксимация нелинейности АЭ с малосигнальной проводимостью g_0 и коэффициентом нелинейности β :

$$I_a = g_0(1 - \beta U_a^2) U_a,$$

где I_a — ток на выходе АЭ, а U_a — напряжение на его входе.

В дальнейшем целесообразно перейти в уравнении (1) к нормированным функциям и переменным:

$$T = \frac{t}{\tau} = \frac{ct}{l}, \quad X = \frac{x}{l}, \quad B(X) = \frac{b(lX)}{b_{\max}}, \quad U(X, T) = \frac{u(lX, cT)}{u_*},$$

где $u_* = b_{\max}^{-1} \sqrt{\rho/(\beta F)}$ — характерный масштаб отклонения струны в автоколебательной системе. В новых обозначениях уравнение (1) имеет вид

$$\frac{\partial^2 U}{\partial T^2} + 2\delta \frac{\partial U}{\partial T} - \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} = 2\gamma B(X) \times$$

$$\times \left(1 - \left[\int_0^1 B(X) \frac{\partial U(X, T)}{\partial T} dX \right]^2 \right) \left[\int_0^1 B(X) \frac{\partial U(X, T)}{\partial T} dX \right]. \quad (2)$$

При этом параметр $\delta = \alpha\tau$ характеризует потери в резонаторе, а параметр $\gamma = g_0 b_{\max}^2 l^2 / (2\rho c)$ — глубину положительной обратной связи.

Традиционный подход к исследованию распределенных автоколебательных систем состоит в разложении решения по модам собственных колебаний резонатора (см., например, [3]). Для уравнения (2) разложение по модам собственных колебаний закрепленной на концах струны имеет вид

$$U(X, T) = \sum_{m=1}^M A_m(T) \sin(\pi m X). \quad (3)$$

При этом следует отметить, что для симметричного относительно плоскости $X = 0,5$ распределения магнитного поля в разложении (3) можно учитывать лишь нечетные моды. После подстановки решения (3) в уравнение (2) с учетом ортогональности модовых функций $\Psi_m(X) = \sin(\pi m X)$ нетрудно получить систему обыкновенных дифференциальных уравнений для модовых коэффициентов $A_m(T)$:

$$\frac{d^2 A_m}{dT^2} + 2\delta \frac{dA_m}{dT} + \omega_m^2 A_m = \gamma \chi_m \left[1 - \frac{1}{4} \left(\frac{dP}{dT} \right)^2 \right] \frac{dP}{dT}, \quad (4)$$

$$P(T) = \sum_{m=1}^M \chi_m A_m(T), \quad m = 1, 2, \dots, M.$$

Здесь $\chi_n = 2 \int_0^1 B(X) \sin(\pi n X) dX$ — коэффициенты разложения индукции магнитного поля по модам ЭМР, $\omega_n = \pi n$ — нормированная частота колебаний моды. Для симметричного относительно $X = 0,5$ поля все коэффициенты χ_m с четными номерами равны нулю и, следовательно, все четные уравнения системы (4) описывают затухающие колебания четных мод резонатора. Как было сказано выше, эти моды в разложение (3) можно не включать.

Линейное приближение системы уравнений (4)

$$\frac{d^2 A_m}{dT^2} + 2\delta \frac{dA_m}{dT} + \omega_m^2 A_m = \gamma \chi_m \sum_{k=1}^M \chi_k \frac{dA_k}{dT}$$

позволяет исследовать условия самовозбуждения автогенератора. Например, для ЭМР с однородным магнитным полем b_0 в одномодовом приближении получим следующее условие самовозбуждения автоколебаний на низшей (основной) моде:

$$\gamma > \frac{2\delta}{\chi_1^2} \quad \text{или} \quad \frac{8g_0 b_0^2 l^2}{\pi^3 \rho c} > \frac{1}{Q_1}. \quad (5)$$

В правой части этого неравенства символом Q_1 обозначена собственная добротность основной моды колебаний струны: $Q_1 = \pi/2\delta$. Заметим, что левую часть неравенства следует рассматривать как обратную величину добротности, вносимой в моду колебаний струны замкнутой петлей обратной связи. Для третьей моды неравенство, аналогичное (5), имеет вид

$$\gamma > \frac{2\delta}{\chi_3^2} \quad \text{или} \quad \frac{8g_0 b_0^2 l^2}{27\pi^3 \rho c} > \frac{1}{Q_3}. \quad (6)$$

Здесь $Q_3 = 3\pi/2\delta$ — собственная добротность третьей моды колебаний струны. Из сопоставления неравенств (5) и (6) следует, что, несмотря на большую добротность, условия самовозбуждения третьей моды более жесткие, чем первой. Физически это объясняется меньшей эффективностью переноса энергии цепью обратной связи в третью моду, чем в первую, за счет наличия в третьей моде участков струны, колеблющихся в противофазе. Понятно, что условия самовозбуждения для высших мод: $\gamma > 2\delta/\chi_m^2$, $m = 5, 7, 9, \dots$ — еще более жесткие. Поэтому струнный генератор возбуждается из нулевого начального состояния на основной моде ЭМР.

Система нелинейных дифференциальных уравнений (4) не имеет точных аналитических решений. Таким образом, для дальнейшего исследования автоколебаний в струнном генераторе следует либо использовать метод усреднения (или другие, родственные ему асимптотические методы теории нелинейных колебаний [4]), либо численно интегрировать систему (4). Для обеспечения высоких динамических характеристик при изменении параметров резонатора генератор должен работать при высоких уровнях возбуждения. В этих условиях метод усреднения дает, как правило, лишь качественные результаты. Количественные характеристики автоколебаний удастся получить лишь путем численного интегрирования системы (4). Очевидно, что вычислительные затраты при этом напрямую связаны с числом уравнений в системе — количеством мод в представлении (3) колебаний струны.

Интересно отметить, что в одномодовом приближении система (4) содержит единственное уравнение

$$\frac{d^2 A_1}{dT^2} + 2\delta \frac{dA_1}{dT} + \omega_1^2 A_1 = \gamma \chi_1^2 \left[1 - \frac{\chi_1^2}{4} \left(\frac{dA_1}{dT} \right)^2 \right] \frac{dA_1}{dT}, \quad (7)$$

которое хорошо известно в теории нелинейных колебаний как уравнение Рэля, описывающее автоколебательную систему с одной степенью свободы — осциллятор Рэля [4]. Но осциллятор Рэля не может быть адекватной моделью струнного автогенератора. Дело в том, что кубическая нелинейность АЭ является источником нечетных гармоник колебаний основной частоты, в первую очередь — третьей гармоники. Третья гармоника находится в резонансе с третьей модой ЭМР, которая имеет высокую добротность. Взаимодействие мод и гармоник должно быть учтено в модели струнного автогенератора.

Это можно сделать в рамках неполного трехмодового приближения

$$U(X, T) = A_1(T) \sin(\pi X) + A_3(T) \sin(3\pi X).$$

Здесь вторая мода резонатора не учитывается, исходя из предположения о симметрии магнитного поля $B(X)$. В данном приближении система уравнений (4) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 A_1}{dT^2} + 2\delta \frac{dA_1}{dT} + \omega_1^2 A_1 &= \gamma \chi_1 \left[1 - \frac{1}{4} \left(\chi_1 \frac{dA_1}{dT} + \chi_3 \frac{dA_3}{dT} \right)^2 \right] \times \\ &\times \left(\chi_1 \frac{dA_1}{dT} + \chi_3 \frac{dA_3}{dT} \right), \\ \frac{d^2 A_3}{dT^2} + 2\delta \frac{dA_3}{dT} + \omega_3^2 A_3 &= \gamma \chi_3 \left[1 - \frac{1}{4} \left(\chi_1 \frac{dA_1}{dT} + \chi_3 \frac{dA_3}{dT} \right)^2 \right] \times \\ &\times \left(\chi_1 \frac{dA_1}{dT} + \chi_3 \frac{dA_3}{dT} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Уравнения (8) можно интерпретировать как уравнения движения двух осцилляторов Рэля, взаимодействующих через общую цепь обратной связи.

Результаты моделирования автоколебаний в одно- и трехмодовом приближениях будем сопоставлять численными решениями, полученными на основе гибридной вычислительной схемы, в которой разностная аппроксимация производных проводится в уравнении (2) лишь по пространственной переменной [5]. В вычислительной математике это метод известен как метод прямых [6]. Результатом такого подхода является система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\frac{dU_n}{dT} &= V_n, \\ \frac{dV_n}{dT} &= \frac{U_{n-1} - 2U_n + U_{n+1}}{h^2} - 2\delta V_n + 2\gamma B_n(1 - W^2)W, \\ W &= \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{N-1} (B_i V_i + B_{i+1} V_{i+1}), \quad n = 1, 2, \dots, N-1,\end{aligned}\tag{9}$$

где $U_n = U(X_n, T)$ — смещения струны в N узловых точках X_n , $B_n = B(X_n)$. Причем для жестко закрепленной струны $U_0 = U_N = V_0 = V_N = 0$. Заметим также, что использованной при записи системы уравнений (5) трехточечной аппроксимации второй пространственной производной по точности соответствует аппроксимация интеграла формулой трапеций. Уравнения системы (9) имеют стандартную форму уравнений движения динамической системы и, следовательно, их численное интегрирование не вызывает затруднений.

Среди результатов моделирования остановимся на зависимости частоты автоколебаний от параметра глубины обратной связи γ . На рис. 2 изображены графики данной зависимости, полученные на основе моделей (7)–(9). Моделирование проведено для резонатора с симметричным распределением индукции магнитного поля $B(X) = \exp(-(X - 0,5)^2/0.0625)$ и собственной добротностью $Q_1 = 78,5$. Частоты определялись методом спектрального анализа отрезков реализаций установившихся автоколебаний.

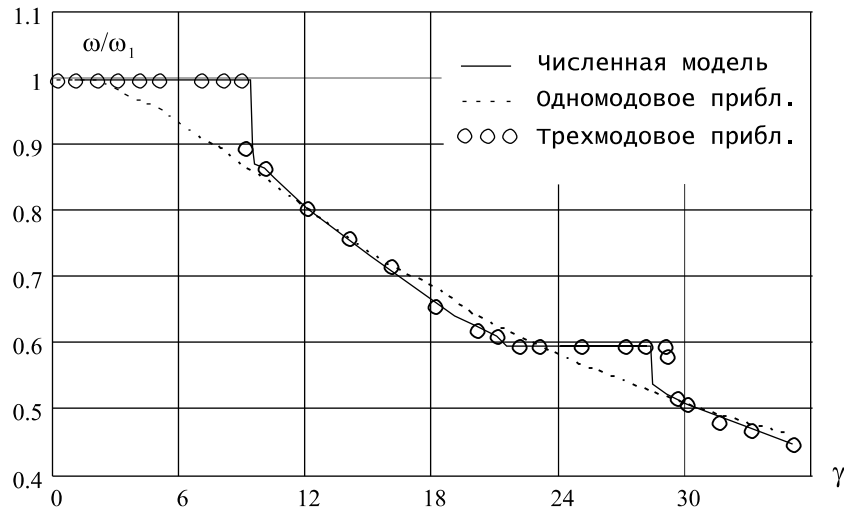


Рис. 2. Зависимость частоты автоколебаний от параметра глубины обратной связи

Зависимость $\omega = \omega(\gamma)$ для модели осциллятора Рэлея показана на рис. 2 пунктирной линией. Как следует из графика, в одномодовом приближении струнный автогенератор представляет собой неизохронную систему. С ростом глубины обратной связи γ , а следовательно, и амплитуды автоколе-

баний, частота автоколебаний понижается. Однако результаты, полученные в рамках трехмодового приближения (на рисунке они отмечены точками), указывают на то, что существуют области значений γ , где генератор ведет себя как изохронная система. Это горизонтальные участки кривой $\omega = \omega(\gamma)$. Существование областей изохронности подтверждается также в рамках численной модели (9) — непрерывная линия на рис. 2. Причем результаты, полученные на основе трехмодового приближения (8) и численной модели (9), практически совпадают.

Возникновение участков изохронности обусловлено взаимодействием гармоник автоколебаний с высшими модами колебаний струны, в первую очередь — с третьей модой. Подтверждением этому служит анализ эволюции спектров автоколебаний при изменении параметра глубины обратной связи γ . На рис. 3 в логарифмическом масштабе представлены амплитудные спектры $|S(\omega)|$ установившихся колебаний струны в точке $X = 0,1667$. Стрелками отмечены спектральные максимумы, соответствующие первой (1G), третьей (3G) и пятой (5G) гармоникам автоколебаний и третьей моде резонатора (3M). Заметим, что колебания первой моды струны всегда происходят с частотой автоколебаний, поэтому спектральный максимум, соответствующий свободным колебаниям первой моды на графиках, отсутствует.

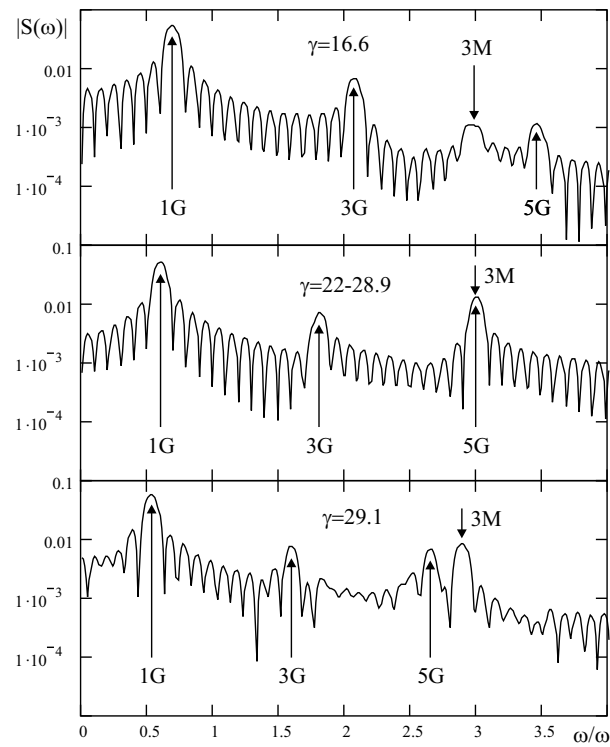


Рис. 3. Амплитудные спектры автоколебаний

В верхней части рис. 3 отражена ситуация, когда частоты третьей и пятой гармоник находятся вдали от частоты третьей моды. Она слабо возбуждена и не взаимодействует с гармониками. С ростом параметра γ частота пятой гармоники приближается к частоте третьей моды. При значении $\gamma \approx 22$ происходит затягивание пятой гармоники автоколебаний высокочастотной третьей модой и в области значений $\gamma \approx 22 \div 28,9$ частота автоколебаний стабилизируется на величине $\omega \approx 0,6\omega_1$. В этой области спектр автоколебаний практически не меняется — он показан в средней части рис. 3. Дальнейшее увеличение γ приводит к выходу из режима затягивания и, как следствие, скачку частоты автоколебаний (нижняя часть рисунка).

Аналогичный анализ спектрального состава колебаний струны показывает, что область изохронности при $\gamma < 8,85$ формируется затягиванием третьей гармоники автоколебаний третьей модой резонатора.

Благодаря наличию областей изохронности, можно ожидать, что при одинаковой амплитуде струнный автогенератор имеет лучшую стабильность частоты, чем модельная автоколебательная система с одной степенью свободы — осциллятор Рэлея. Данное обстоятельство следует учитывать при конструировании струнных акселерометров, поскольку дополнительные меры по стабилизации амплитуды приводят, как правило, к ухудшению динамических характеристик автогенераторов.

На основании проведенных исследований можно сделать следующие выводы о применимости моделей различного уровня сложности для описания струнного автогенератора. Модель в форме осциллятора Рэлея применима только в области малых превышений параметром глубины обратной связи порога генерации. Для описания сильно возбужденного режима струнного автогенератора следует использовать трехмодовую модель в форме системы связанных осцилляторов Рэлея. Численную модель (9), требующую больших вычислительных ресурсов, целесообразно применять для уточнения, если это необходимо, результатов, полученных на основе трехмодовой модели.

Литература

- [1] Вульверт Дж. Датчики в цифровых системах. М.: Энергоиздат, 1981. 200 с.
- [2] Волович А., Волович Г. Интегральные акселерометры // Компоненты и технологии. 2002. №1. С. 66–72.
- [3] Ланда П.С. Автоколебания в распределенных системах. М.: Наука, 1983. 320 с.
- [4] Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 504 с.
- [5] Зайцев В.В., Зайцев О.В., Никулин А.В. Численное моделирование автогенераторов с распределенными обратными связями // Труды I Меж-

дународной научно-технической конференции "Физика и технические приложения волновых процессов". Т. 1. Самара, 2001. С. 123–124.

- [6] Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Методы вычислений. М.: Наука, 1977. Т. 2. 400 с.

Поступила в редакцию 20/XI/2003;
в окончательном варианте — 20/XI/2003.

SELF-OSCILLATIONS MODELLING IN GENERATOR WITH ELECTROMECHANICAL RESONATOR

© 2003 V.V. Zaitsev, O.V. Zaitsev, A.V. Nikulin, G.P. Yarovoy²

Mathematical models of different complexity for string self-oscillator, which is the main structural component of frequency accelerometers, are proposed. The models are based on the motion equations in the form of a dynamic system with one or many degrees of freedom and permit application of standard methods of numerical integration to ODE systems. Self-excitation conditions in self-oscillating system are derived. It is shown that a string self-oscillating system reveals the effect of frequency pulling by higher oscillation modes of electromechanical resonator.

Paper received 20/XI/2003;
Paper accepted 20/XI/2003.

²Zaitsev Valeriy Vasilievich (zaitsev@ssu.samara.ru), Zaitsev Oleg Valerievich, Nikulin Andrei Valentinovich, Yarovoy Gennadiy Petrovich, Dept. of Radiophysics and Computer Modelling of Radiosystems, Samara State University, Samara, 443011, Russia.