

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАНДЕНА ОБОБЩЕННЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ЯКОБИ И РЯДЫ АППЕЛЯ

© 2003 Х.А. Чиханов¹

В статье вводится новый класс эллиптических функций, обобщающих классические функции Якоби, и изучаются преобразования типа Ландена в связи с некоторыми соотношениями для ряда Аппеля F_1 .

Эллиптические функции Якоби являются "неполноценными" эллиптическими функциями, так как их нельзя использовать в случае произвольных периодов.

Мы рассмотрим ниже обобщение функций Якоби, следуя схеме, изложенной в монографии Гурвица [3, глава 3]. Обозначим новые функции, соответственно, через $\text{sne}(u)$, $\text{cne}(u)$ и $\text{dne}(u)$. Мы будем также учитывать зависимость от параметров, вводя три аргумента:

$$\text{sne}(u) = \text{sne}(u, \beta, \kappa), \quad \text{cne}(u) = \text{cne}(u, \beta, \kappa), \quad \text{dne}(u) = \text{dne}(u, \beta, \kappa).$$

Итак, пусть

$$\begin{aligned} \sqrt{\wp(u) - e_1} &= \frac{\sigma_1(u)}{\sigma(u)} = \frac{\text{cne}(u)}{\text{sne}(u)}, & \sqrt{\wp(u) - e_2} &= \frac{\sigma_2(u)}{\sigma(u)} = \frac{\text{dne}(u)}{\text{sne}(u)}, \\ \sqrt{\wp(u) - e_3} &= \frac{\sigma_3(u)}{\sigma(u)} = \frac{1}{\text{sne}(u)}, & \beta &= \sqrt{e_1 - e_3}, \quad \kappa = \sqrt{e_2 - e_3}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\wp(u)$ — "пэ"-функция Вейерштрасса, а $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma$ — известные целые функции [1, табл. 10], связанные с тэта-рядами. Следуя Гурвицу, получаем

$$\begin{aligned} e_1 - e_2 &= \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 \theta_0^4, \quad \beta = \sqrt{e_1 - e_3} = \left(\frac{\pi}{2\omega}\right) \theta_3^2, \quad \kappa = \sqrt{e_2 - e_3} = \left(\frac{\pi}{2\omega}\right) \theta_2^2, \\ \text{sne}(u) &= \frac{2\omega}{\pi\theta_2\theta_3} \frac{\theta_1(v)}{\theta_0(v)}, \quad \text{cne}(u) = \frac{\theta_0}{\theta_2} \frac{\theta_2(v)}{\theta_0(v)}, \quad \text{dne}(u) = \frac{\theta_0}{\theta_3} \frac{\theta_3(v)}{\theta_0(v)}, \\ \text{sne}^2(u) + \beta^2 \text{sne}^2(u) &= 1, \quad \text{dne}^2(u) + \kappa^2 \text{sne}^2(u) = 1. \end{aligned} \quad (2)$$

Отличие наших формул от классических только в том, что $\beta^2 \neq 1$ (вообще говоря). Используя дифференциальное уравнение для функции Вейерштрасса, приходим к системе дифференциальных уравнений:

$$\frac{d}{du} \text{sne}(u) = \text{cne}(u) \text{dne}(u), \quad \frac{d}{du} \text{cne}(u) = -\beta^2 \text{sne}(u) \text{dne}(u),$$

¹Чиханов Хамит Александрович, кафедра уравнений математической физики Самарского государственного университета, 443011, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

$$\frac{d}{du} \text{dne}(u) = -\kappa^2 \text{sne}(u) \text{cne}(u). \quad (3)$$

Так как функции $\theta_2(v), \theta_3(v), \theta_0(v)$ — четные, а $\theta_1(v)$ — нечетная, то функции $\text{cne}(u)$ и $\text{dne}(u)$ — четные, а $\text{sne}(u)$ — нечетная. По аналогии с функциями Якоби зададим нормировку $\text{cne}(0) = \text{dne}(0) = 1$, $\text{sne}(0) = 0$. Теперь, интегрируя уравнения (3), получаем 3 эллиптических интеграла

$$u = \int_0^s \frac{dt}{\sqrt{(1-\beta^2 t^2)(1-\kappa^2 t^2)}}, \quad u = \int_c^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(\beta^2 - \kappa^2 + \kappa^2 t^2)}},$$

$$u = \int_\delta^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(\beta^2 t^2 + \kappa^2 - \beta^2)}}, \quad (4)$$

являющихся обращениями функций $s = \text{sne}(u)$, $c = \text{cne}(u)$ и $\delta = \text{dne}(u)$, соответственно.

Выпишем преобразования новых функций при сдвигах аргумента (используя преобразования тэта-рядов) [3, Часть 2, Гл. 2, § 8].

Таблица 1

	ω	ω'	$\omega + \omega'$	2ω	$2\omega'$	$2\omega + 2\omega'$
sne	$\frac{1}{\beta} \frac{\text{cne}}{\text{dne}}$	$\frac{1}{\beta\kappa} \frac{1}{\text{sne}}$	$\frac{1}{\kappa} \frac{\text{dne}}{\text{cne}}$	$-\text{sne}$	sne	$-\text{sne}$
cne	$-\kappa' \frac{\text{sne}}{\text{dne}}$	$-\frac{i}{\kappa} \frac{\text{dne}}{\text{sne}}$	$-\frac{i\kappa'}{\kappa} \frac{1}{\text{cne}}$	$-\text{cne}$	$-\text{cne}$	cne
dne	$\frac{\kappa'}{\beta} \frac{1}{\text{dne}}$	$-\frac{i}{\beta} \frac{\text{cne}}{\text{sne}}$	$i\kappa' \frac{\text{sne}}{\text{cne}}$	dne	$-\text{dne}$	$-\text{dne}$

Из табл. 1 следует, что введенные функции являются двоякопериодическими, причем периоды те же, что и у соответствующих функций Якоби. Более того, порядок и расположение нулей и полюсов также совпадают. Существуют также формулы сложения, двойного и половинного аргумента, что позволяет вычислить новые функции в некоторых точках (см. табл. 2). Здесь $\kappa' = \sqrt{\beta^2 - \kappa^2}$.

Таблица 2

	0	$\frac{\omega}{2}$	ω	$\frac{3\omega}{2}$	2ω	$\frac{5\omega}{2}$	3ω	$\frac{7\omega}{2}$
sne	0	$\frac{1}{\sqrt{\beta(\kappa'+\beta)}}$	$\frac{1}{\beta}$	$\frac{1}{\sqrt{\beta(\kappa'+\beta)}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{\beta(\kappa'+\beta)}}$	$-\frac{1}{\beta}$	$-\frac{1}{\sqrt{\beta(\kappa'+\beta)}}$
cne	1	$\sqrt{\frac{\kappa'}{\kappa'+\beta}}$	0	$-\sqrt{\frac{\kappa'}{\kappa'+\beta}}$	-1	$-\sqrt{\frac{\kappa'}{\kappa'+\beta}}$	0	$\sqrt{\frac{\kappa'}{\kappa'+\beta}}$
dne	1	$\sqrt{\frac{\kappa'}{\beta}}$	$\frac{\kappa'}{\beta}$	$\sqrt{\frac{\kappa'}{\kappa'+\beta}}$	1	$\sqrt{\frac{\kappa'}{\beta}}$	$\frac{\kappa'}{\kappa'+\beta}$	$\sqrt{\frac{\kappa'}{\kappa'+\beta}}$

	$\frac{\omega'}{2}$	$\frac{\omega+\omega'}{2}$	$\omega + \frac{\omega'}{2}$	$\frac{3\omega+\omega'}{2}$	$2\omega + \frac{\omega'}{2}$	$\frac{5\omega+\omega'}{2}$	$3\omega + \frac{\omega'}{2}$	$\frac{7\omega+\omega'}{2}$
sne	$\frac{i}{\sqrt{\beta\kappa}}$	$\sqrt{\frac{\kappa+i\kappa'}{\kappa\beta^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{\beta\kappa}}$	$\sqrt{\frac{\kappa-i\kappa'}{\kappa\beta^2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{\beta\kappa}}$	$-\sqrt{\frac{\kappa-i\kappa'}{\kappa\beta^2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{\beta\kappa}}$	$-\sqrt{\frac{\kappa-i\kappa'}{\kappa\beta^2}}$
cne	$\sqrt{\frac{\kappa+\beta}{\kappa}}$	$\sqrt{\frac{-i\kappa'}{\kappa}}$	$\sqrt{\frac{\kappa-\beta}{\kappa\beta}}$	$-\sqrt{\frac{i\kappa'}{\kappa}}$	$-\sqrt{\frac{\kappa+\beta}{\kappa}}$	$-\sqrt{\frac{-i\kappa'}{\kappa}}$	$-\sqrt{\frac{\kappa-\beta}{\kappa\beta}}$	$\sqrt{\frac{i\kappa'}{\kappa}}$
dne	$\sqrt{\frac{\beta+\kappa}{\beta}}$	$\sqrt{\frac{\kappa'}{\kappa'+i\kappa}}$	$\sqrt{\frac{\kappa-\beta}{\kappa}}$	$\sqrt{\frac{\kappa'}{\kappa'-i\kappa}}$	$\sqrt{\frac{\beta+\kappa}{\beta}}$	$\sqrt{\frac{\kappa'}{\kappa'+i\kappa}}$	$\sqrt{\frac{\kappa-\beta}{\kappa}}$	$\sqrt{\frac{\kappa'}{\kappa'-i\kappa}}$

Для вывода преобразования Ландена и аналогичных преобразований удобно модифицировать известные формулы [1, табл. 1 8–23] с учетом возможного появления параметра β . Так как $\text{cne}^2(u) = 1 - \beta^2 \text{sne}^2(u)$ и $\text{dne}^2(u) = 1 - \kappa^2 \text{sne}^2(u)$, то достаточно использовать только $\text{sne}(u)$. Запишем первый из интегралов (2) в виде:

$$u = \frac{1}{2} \int_0^{s^2} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau(1-\beta^2\tau)(1-\kappa^2\tau)}} = sF_1\left(\begin{matrix} 1/2; 1/2, 1/2 \\ 3/2 \end{matrix} \middle| \beta^2 s, \kappa^2 s\right), \quad (5)$$

где F_1 — ряд Аппеля

$$\begin{aligned} F_1\left(\begin{matrix} \alpha; \beta, \beta' \\ \gamma \end{matrix} \middle| x, y\right) &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{m+n}(\beta)_m(\beta')_n}{(\gamma)_{m+n} m!n!} x^m y^n = \\ &= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^1 \tau^{\alpha-1} (1-\tau)^{\gamma-\alpha-1} (1-\tau x)^{-\beta} (1-\tau y)^{-\beta'} d\tau. \end{aligned} \quad (6)$$

Таким образом, справедливы формулы обращения

$$x = \operatorname{sne}^2(u), \quad u = \sqrt{x} F_1 \left(\frac{1/2; 1/2, 1/2}{3/2} \middle| \beta^2 x, \kappa^2 x \right). \quad (7)$$

Эти формулы являются частным случаем взаимосвязи эллиптических функций и эллиптических интегралов. В них заключен достаточно глубокий смысл. А именно: всякие функциональные соотношения для $\operatorname{sne}(u)$ превращаются в соответствующие функциональные соотношения для ряда Аппеля F_1 . Обратно, формулы, содержащие указанный подкласс рядов F_1 , можно трактовать как соотношения для обобщенных функций Якоби $\operatorname{sne}(u)$. Рассмотрим теперь поподробнее вывод преобразования Ландена для $\operatorname{sne}(u)$ и соответствующих формул для F_1 .

Для удобства читателя мы сохраняем двойное обозначение полупериодов из теории эллиптических функций (по Гурвицу): $\omega = K$ и $\omega' = iK'$. Как известно, функция Якоби $\operatorname{sn}(u|\kappa)$ имеет периоды $4K$ и $2iK'$ (то есть полупериод K является четверть-периодом для $\operatorname{sn}(u|\kappa)$). Таблица преобразований $\operatorname{sn}(u|\kappa)$ при сдвигах аргумента является частным случаем табл. 1 при $\beta = 1$. Из нее следует, что функция $\operatorname{sn}^2(u|\kappa)$ имеет периоды $2K$ и $2iK'$. Преобразование Ландена имеет вид:

$$\operatorname{sn} \left(\frac{u}{M} \middle| \lambda \right) = \frac{1}{M} \frac{\operatorname{sn}(u|\kappa) \operatorname{cn}(u|\kappa)}{\operatorname{dn}(u|\kappa)}, \quad \text{где } M = \frac{1}{1 + \kappa'}, \quad \lambda = \frac{1 - \kappa'}{1 + \kappa'}. \quad (8)$$

Здесь функция $\operatorname{sn}(u/M | \lambda)$ связана с полупериодами $\omega = L$, $\omega' = iL'$, а функция $\operatorname{sn}(u|\kappa)$ — с полупериодами $\omega = K = 2LM$, $\omega' = iK' = iL'M$.

Так как нули и полюсы новых функций находятся в тех же точках, что и у функций Якоби, то естественно искать преобразование Ландена для новых функций в виде

$$\operatorname{sne} \left(\frac{u}{M} \middle| \beta_n, \kappa_n \right) = A \frac{\operatorname{sne}(u|\beta, \kappa) \operatorname{cne}(u|\beta, \kappa)}{\operatorname{dne}(u|\beta, \kappa)}. \quad (9)$$

Постоянные β_n , κ_n , A находятся по значениям функций в отдельных точках. В окрестности нулей и полюсов надо брать главные части разложений. Отметим попутно разложения в окрестности точки $u = 0$:

$$\begin{aligned} \operatorname{sne}(u|\beta, \kappa) &= u - \frac{\beta^2 + \kappa^2}{6} u^3 + \frac{\beta^4 + 14\beta^2 \kappa^2 + \kappa^4}{120} u^5 - \\ &\quad - \frac{\beta^6 + 135\beta^4 \kappa^2 + 135\beta^2 \kappa^4 + \kappa^6}{5040} u^7 + O(u^9), \\ \operatorname{cne}(u|\beta, \kappa) &= 1 - \frac{\beta^2}{2} u^2 + \frac{\beta^4 + 4\beta^2 \kappa^2}{24} u^4 - \frac{\beta^6 + 44\beta^4 \kappa^2 + 16\beta^2 \kappa^4}{720} u^6 + O(u^8), \\ \operatorname{dne}(u|\beta, \kappa) &= \operatorname{cne}(u|\kappa, \beta) = 1 - \frac{\kappa^2}{2} u^2 + \frac{\kappa^4 + 4\beta^2 \kappa^2}{24} u^4 + O(u^6). \end{aligned} \quad (10)$$

Вычисляя (9) в точках $u = K, iK', K/2$, получим, соответственно:

$$\frac{1}{M} = A, \quad \frac{M}{\beta_n \kappa_n} = \frac{1}{M}, \quad \frac{1}{\beta_n} = \frac{1}{M(\beta + \kappa')}.$$

Отсюда $A = 1/M$, $\beta_n = M(\beta + \kappa')$, $\kappa_n = M\kappa^2/(\beta + \kappa')$. Таким образом, преобразование Ландена для новых функций имеет вид:

$$\operatorname{sne}\left(\frac{u}{M} \middle| M(\beta + \kappa'), \frac{M\kappa^2}{\beta + \kappa'}\right) = \frac{1}{M} \frac{\operatorname{sne}(u|\beta, \kappa) \operatorname{cne}(u|\beta, \kappa)}{\operatorname{dne}(u|\beta, \kappa)}. \quad (11)$$

Теперь уже несложно получить формулы:

$$\operatorname{cne}\left(\frac{u}{M} \middle| M(\beta + \kappa'), \frac{M\kappa^2}{\beta + \kappa'}\right) = \frac{\operatorname{cne}^2(u|\beta, \kappa) - \beta\kappa' \operatorname{sne}^2(u|\beta, \kappa)}{\operatorname{dne}(u|\beta, \kappa)}, \quad (12)$$

$$\operatorname{dne}\left(\frac{u}{M} \middle| M(\beta + \kappa'), \frac{M\kappa^2}{\beta + \kappa'}\right) = \frac{\operatorname{cne}^2(u|\beta, \kappa) + \beta\kappa' \operatorname{sne}^2(u|\beta, \kappa)}{\operatorname{dne}(u|\beta, \kappa)}. \quad (13)$$

При $\beta_n = \beta - 1$ получаются известные формулы. Однако при этом появляется ограничение $M = 1/(1 + \kappa')$. Как мы увидим ниже, в формулах (10–13) параметр M — произвольный, что также говорит о пользе введения новых функций вместо функций Якоби.

Перейдем теперь, согласно (7), в формуле (11) к F_1 . Имеем:

$$x_n = \operatorname{sne}^2\left(\frac{u}{M} \middle| \beta_n, \kappa_n\right), \quad u = \frac{\sqrt{x_n}}{M} F_1\left(\frac{1/2; 1/2, 1/2}{3/2} \middle| \beta_n^2 x_n, \kappa_n^2 x_n\right),$$

$$x_n = \frac{x(1 - \beta^2 x)}{M^2(1 - \kappa^2 x)}, \quad \beta_n = M(\beta + \kappa'), \kappa_n = \frac{M\kappa^2}{\beta + \kappa'}. \quad (14)$$

Пусть $\xi = \beta^2 x$, $\eta = \kappa^2 x$. Исключая из (7) и (14) промежуточные переменные, получаем образ преобразования Ландена на рядах F_1 :

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{1 - \eta}{1 - \xi}} F_1\left(\frac{1/2; 1/2, 1/2}{3/2} \middle| \xi, \eta\right) = \\ & = F_1\left(\frac{1/2; 1/2, 1/2}{3/2} \middle| \frac{1 - \xi}{1 - \eta} [\sqrt{\xi} + \sqrt{\xi - \eta}]^2, \frac{1 - \xi}{1 - \eta} [\sqrt{\xi} - \sqrt{\xi - \eta}]^2\right). \end{aligned} \quad (15)$$

Замена $\xi = x^2$, $\eta = x^2 - y^2$ приводит к более удобной форме:

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{1 - x^2 + y^2}{1 - x^2}} F_1\left(\frac{1/2; 1/2, 1/2}{3/2} \middle| x^2, x^2 - y^2\right) = \\ & = F_1\left(\frac{1/2; 1/2, 1/2}{3/2} \middle| \frac{(1 - x^2)(x + y)^2}{1 - x^2 + y^2}, \frac{(1 - x^2)(x - y)^2}{1 - x^2 + y^2}\right). \end{aligned} \quad (16)$$

При $y = 0$ получаем тождество, а при $x = 0$ известную формулу авто-трансформации для гипергеометрической функции Гаусса. Следует отметить, что ряд F_1 — единственный из рядов Аппеля, обладающий одномерным интегральным представлением и поэтому имеющий богатую группу преобразований 120-го порядка (автору удалось построить аналог схемы Римана для F_1). Формула (16) дает преобразование высшего порядка.

Теперь мы приведем без вывода другие формулы для новых функций, аналогичные (11).

1. Первое главное преобразование первой степени.

$$[K = LM, iK' + K = iL'M], \quad \kappa' = \sqrt{\beta^2 - \kappa^2},$$

$$\operatorname{sne}\left(\frac{u}{M} \middle| M\kappa', M\kappa\right) = \frac{1}{M} \frac{\operatorname{sne}(u|\beta, \kappa)}{\operatorname{dne}(u|\beta, \kappa)},$$

$$\operatorname{cne}\left(\frac{u}{M} \middle| M\kappa', M\kappa\right) = \frac{1}{M} \frac{\operatorname{cne}(u|\beta, \kappa)}{\operatorname{dne}(u|\beta, \kappa)},$$

$$\operatorname{dne}\left(\frac{u}{M} \middle| M\kappa', M\kappa\right) = \frac{1}{M} \frac{1}{\operatorname{dne}(u|\beta, \kappa)}. \quad (17)$$

Преобразование образов [2, 5.11.(3)]:

$$F_1\left(\frac{1/2; 1/2, 1/2}{3/2} \middle| x, y\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-y}} F_1\left(\frac{1/2; 1/2, 1/2}{3/2} \middle| \frac{x-y}{1-y}, \frac{y}{y-1}\right). \quad (18)$$

2. Второе главное преобразование первой степени.

$$[iK' = LM, K = -iL'M],$$

$$\operatorname{sne}\left(\frac{u}{M} \middle| -iM\beta, -iM\kappa'\right) = \frac{1}{M} \frac{\operatorname{sne}(u|\beta, \kappa)}{\operatorname{cne}(u|\beta, \kappa)},$$

$$\operatorname{cne}\left(\frac{u}{M} \middle| -iM\beta, -iM\kappa'\right) = \frac{1}{M} \frac{1}{\operatorname{cne}(u|\beta, \kappa)},$$

$$\operatorname{dne}\left(\frac{u}{M} \middle| -iM\beta, -iM\kappa'\right) = \frac{1}{M} \frac{\operatorname{dne}(u|\beta, \kappa)}{\operatorname{dne}(u|\beta, \kappa)}. \quad (19)$$

Преобразование образов — [2, 5.11.(2)] (аналогичное (18)).

3. Преобразование Гаусса.

$$[iK' = 2iL'M, K = LM],$$

$$\operatorname{sne}\left(\frac{u}{M} \middle| M(\beta + \kappa), 2M\sqrt{\beta\kappa}\right) = \frac{1}{M} \frac{\operatorname{sne}(u|\beta, \kappa)}{1 + \beta\kappa \operatorname{sne}^2(u|\beta, \kappa)},$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sne}\left(\frac{u}{M} \middle| M(\beta + \kappa), 2M\sqrt{\beta\kappa}\right) &= \frac{1}{M} \frac{\operatorname{sne}(u|\beta, \kappa) \operatorname{dne}(u|\beta, \kappa)}{1 + \beta\kappa \operatorname{sne}^2(u|\beta, \kappa)}, \\ \operatorname{sne}\left(\frac{u}{M} \middle| M(\beta + \kappa), 2M\sqrt{\beta\kappa}\right) &= \frac{1}{M} \frac{1 - \beta\kappa \operatorname{sne}^2(u|\beta, \kappa)}{1 + \beta\kappa \operatorname{sne}^2(u|\beta, \kappa)}. \end{aligned} \quad (20)$$

Преобразование образов:

$$\begin{aligned} F_1\left(\frac{1/2; 1/2, 1/2}{3/2} \middle| x^2, y^2\right) &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+xy}} F_1\left(\frac{1/2; 1/2, 1/2}{3/2} \middle| \frac{(x+y)^2}{(1+xy)^2}, \frac{4xy}{(1+xy)^2}\right). \end{aligned} \quad (21)$$

При $y = x$ получается формула

$$F\left(\frac{1/2, 1}{3/2} \middle| x^2\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} F\left(\frac{1/2, 1}{3/2} \middle| \frac{4x^2}{(1+x^2)^2}\right), \quad (22)$$

которая вытекает из квадратичного преобразования [2, 2.11(1)] с помощью автотрансформации.

4. Первое главное преобразование 4-го порядка (итерация преобразования Ландена).

$$[K = 4LM, \quad iK' = iLM],$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sne}\left(\frac{u}{M} \middle| M(\sqrt{\beta} + \sqrt{\kappa'})^2, \frac{M\kappa^4}{(\sqrt{\beta} + \sqrt{\kappa'})^2(\beta + \kappa')^2}\right) &= \\ \frac{\operatorname{sne}(u|\beta, \kappa) \operatorname{sne}(u|\beta, \kappa) [\operatorname{sne}^2(u|\beta, \kappa) - \beta\kappa' \operatorname{sne}^2(u|\beta, \kappa)]}{M \operatorname{dne}(u|\beta, \kappa) [\operatorname{sne}^2(u|\beta, \kappa) + \beta\kappa' \operatorname{sne}^2(u|\beta, \kappa)]}. \end{aligned} \quad (23)$$

Преобразование образов:

$$\begin{aligned} F_1\left(\frac{1/2; 1/2, 1/2}{3/2} \middle| x^4, x^4 - y^2\right) &= \\ &= \sqrt{P} F_1\left(\frac{1/2; 1/2, 1/2}{3/2} \middle| (x+y)^4 P, (x-y)^4 P\right), \\ \text{где} \quad P &= \frac{1-x^4}{1-x^4+y^4} \left[\frac{(1-x^4-x^2y^2)(x^2+y^2)}{x^2+y^2+x^2y^4-x^6} \right]^2. \end{aligned} \quad (24)$$

При $y = x$ имеем преобразование

$$F\left(\frac{1/2, 1/2}{3/2} \middle| x^4\right) = (1-2x^4) \sqrt{1-x^4} F\left(\frac{1/2, 1/2}{3/2} \middle| 16x^4(1-x^4)(1-2x^4)^2\right), \quad (25)$$

являющееся итерацией квадратичного преобразования [2, 2.11(2)]. При $y = 0$ имеем тождество, а при $x = 0$ — известную формулу автотрансформации гипергеометрической функции Гаусса. При проверке формул возникло также любопытное тождество:

$$\frac{1 - \eta - (1 - \xi)(\sqrt{\xi} + \sqrt{\xi - \eta})^2}{1 - \eta - (1 - \xi)(\sqrt{\xi} - \sqrt{\xi - \eta})^2} \equiv \left[\frac{1 - \xi - \sqrt{\xi(\xi - \eta)}}{1 - \frac{\eta \sqrt{\xi}}{\sqrt{\xi} + \sqrt{\xi - \eta}}} \right]^2. \quad (26)$$

Заключение

При $\beta = 1$ все формулы остаются справедливыми в терминах функций Якоби. Взаимосвязь эллиптических функций и ряда Аппеля F_1 позволит в будущем получить новые соотношения как для F_1 , так и для эллиптических функций. Алгебраические аспекты теории эллиптических функций можно найти в монографии С. Ленга [4] (см. также [5, 6]).

Литература

- [1] Ахиезер Н.И. Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1976. 304 с.
- [2] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. М.: Наука, 1973. 296 с.
- [3] Гурвиц А. Теория аналитических и эллиптических функций. Л.; М.: ГТТИ, 1933. 344 с.
- [4] Ленг С. Эллиптические функции М.: Наука, 1984. 312 с.
- [5] Милн-Томсон Л. Эллиптические функции Якоби и тэта-функции. (в справочнике по специальным функциям под редакцией М. Абрамовича и И. Стиган). М.: Наука, 1979. С. 380–400.
- [6] Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа. М.: ФМ, 1963. 516 с.

Поступила в редакцию 24/X/2003;
в окончательном варианте — 24/X/2003.

**THE LANDEN TRANSFORMATION OF THE
GENERALIZED ELLIPTIC JACOBI FUNCTIONS AND
THE APPEL ROWS**

© 2003 Ch.A. Chikhanov²

In the paper a new class of elliptic functions, generalized the classical Jacobi elliptic functions, and the Landen transformation related to the Appel rows are studied.

Paper received 24/X/2003;
Paper accepted 24/X/2003.

²Chikhanov Chamit Alexandrovich, Dept. of Partial Differential Equations, Samara State University, Samara, 443011, Russia.