МАТЕМАТИКА

УДК 517.946

МЕТОДЫ СИНГУЛЯРИЗАЦИИ ПОЛНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО РОДА С ЯДРОМ КОШИ. 2[1]

© 2003 Ю.С. Бабурин[2]

Эта статья является непосредственным продолжением работы [1], поэтому в ней сохранена терминология, а нумерация формул и теорем продолжена. Выявлена структура сингуляризатора слева K_l и сингуляризатора справа K_r для исходного СИ-оператора K_1 вида (1) в простейшем случае, когда регулярная часть его ядра $k_1(t,\tau)$ допускает однозначные и голоморфные аналитические продолжения по каждой из переменных t и τ с контура L в ограниченную им конечную и односвязную область $D^+{}_L$. Приведены примеры, в том числе и решаемые в замкнутой форме только методами сингуляризации полных СИУ-2К.

§ 7. Переходя теперь к вопросу о явных выражениях СИ-операторов K_l и K_r, отметим следующее:

а) в соответствии с результатами § 2 и теоремы 3 коэффициент $a_2(t)$ используемого СИ-оператора K_2 вида (3) целесообразно всегда считать произвольной функцией класса Гельдера $H^{(\mu)}(L)$, не обращающейся в нуль при всех $t \in L$;

б) в соответствии с результатами § 2 и § 3 данной работы коэффициент $b_2(t)$ используемого СИ-оператора K_2 вида (3) следует выбирать из соображений целесообразности дальнейшего решения (например, чтобы не загромождать дальнейшие выкладки; чтобы нормальному случаю исходного полного уравнения (1) соответствовал тоже нормальный случай эквивалентного характеристического СИУ-2К вида (11) или (12));

в) решение каждого из полных СИУ-2К вида (14) или (17) относительно вспомогательной функции $k_2(t,\tau)$ — задача, во многих случаях не менее простая, чем решение исходного полного СИУ-2К вида (1) относительно искомой функции $\phi(t)$, и в общем случае — не всегда разрешимая в замкнутой форме: ведь известными в настоящее время научными методами и средствами удается решить в замкнутой форме далеко не всякое полное СИУ-2К,

[1]Представлена доктором физико-математических наук профессором Ю.Н. Радаевым.

[2]Бабурин Юрий Степанович, кафедра высшей математики и информатики Самарского государственного университета, 443011, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

особенно — полные СИУ-2К с разомкнутым контуром интегрирования. Начавшаяся более пятидесяти лет тому назад работа по выявлению тех частных классов полных СИУ-2К, которые можно решить в замкнутой форме (например, [3]), в настоящее время активно продолжается (например, [4–10]) и еще далека от своего завершения.

Что же касается полных СИУ-2К с замкнутым контуром интегрирования L, разбивающим расширенную комплексную плоскость $\overline{C_z}$ на непересекающиеся части части $D^+{}_L = \operatorname{int} L$ (внутренняя часть контура L, остающаяся слева при движении по контуру L в положительном направлении) и $D^-{}_L = \operatorname{ext} L$ (внешность контура L), то для одного класса таких полных СИУ-2К явный вид сингуляризаторов слева K_l и сингуляризаторов справа K_r для исходного СИ-оператора K_1 вида (1) можно указать точно, что ниже и делается.

Рассмотрим исходное полное СИУ-2К вида (1) при дополнительных предположениях, что контур интегрирования L замкнут; что коэффициенты $a_1(t)$ и $b_1(t)$ — функции класса $H^{(\mu)}(L)$, допускающие с контура L на $\overline{C_z}$ такие однозначные аналитические продолжения $a_{+,1}(z)$ и $b_{+,1}(z)$, что функции $a_{+,1}(z) - b_{+,1}(z)$ и $a_{+,1}(z) + b_{+,1}(z)$ голоморфны в области $D^+{}_L$ и не обращаются в нуль (в дальнейшем и не исчезают) при всех $z \in (D^+{}_L \cup L)$; что регулярная часть $k_1(t,\tau)$ ядра исходного СИ-оператора K_1 как по переменной t, так и по переменной τ однозначно и голоморфно аналитически продолжаема с контура L в область $D^+{}_L$.

Для интеграла Коши

$$W(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{\omega(\tau)}{\tau - z}\, d\tau$$

по такому контуру L и с плотностью $\omega(\tau) = \lim\limits_{z \to\ \tau \in L} \omega(z) \in H^{(\mu)}(L)$ справедливы (см. [2, с. 16]) интегральные формулы Коши:

$$W(z) = \begin{cases} \omega(z), & z \in D^+{}_L \\ 0, & z \in D^-{}_L \end{cases},$$

при

$$\omega(z) \in C^{(\infty)}(D^+{}_L) \cup H^{(\mu)}(L), \tag{33}$$

$$W(z) = \begin{cases} \omega(\infty), & z \in D^+{}_L \\ \omega(\infty) - \omega(z), & z \in D^-{}_L \end{cases},$$

при

$$\omega(z) \in C^{(\infty)}(D^-{}_L) \cup H^{(\mu)}(L). \tag{34}$$

Согласно же известной (см. [2, с. 39]) формуле Ю.В. Сохоцкого главное в смысле Коши значение в точке $t \in L$ интеграла типа Коши с плотностью $\omega(\tau) \in H^{(\mu)}(L)$ равно полусумме его предельных на контуре L значений $W^+(t)$ и $W^-(t)$, то есть

$$W(t) = (\text{v.p.})\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_L \frac{\omega(\tau)}{\tau - t}\, d\tau = \frac{1}{2}\left\{ \lim_{z \in D^+{}_L, z \to t} W(z) + \lim_{z \in D^-{}_L, z \to t} W(z) \right\}. \tag{35}$$

Отсюда объединением результатов (33) и (35), (34) и (35) приходим к формуле

$$\frac{1}{\pi i}\oint_L \frac{\omega(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = \begin{cases} \omega(t),\ \omega(z) \in C^{(\infty)}(D^+{}_L) \cap H^{(\mu)}(L), \\ 2\omega(\infty) - \omega(t), \omega(z) \in C^{(\infty)}(D^-{}_L) \cap H^{(\mu)}(L) \end{cases},\ t \in L, \tag{36}$$

с помощью которой в простейших случаях можно вычислить точно (не приближенно) все интегралы в каждом из уравнений (14) и (17). Это позволяет доказать следующие две теоремы.

Теорема 11. *Если в уравнении (1)* L *— гладкий или кусочно-гладкий и замкнутый контур, разбивающий плоскость* $\overline{C}_z$ *на непересекающиеся части* $D^+{}_L$ *и* $D^-{}_L$*; коэффициент* $b_1(t) \in H^{(\mu)}(L)$ *и допускает с контура* L *на* $\overline{C}(z)$ *однозначное аналитическое продолжение* $b_{+,1}(z)$*, голоморфное в области* $D^+{}_L$ *(в дальнейшем* $b_{+,1}(z) \in C^{(\infty)}(D^+{}_L)$*); разность* $a_1(t) - b_1(t) \in H^{(\mu)}(L)$ *и допускает с контура* L *в область* $D^+{}_L$ *однозначное аналитическое продолжение* $a_{+,1}(z) - b_{+,1}(z)$*, голоморфное в области* $D^+{}_L$ *и не исчезающее при* $z \in (D^+{}_L \cup L)$*; регулярная часть ядра* $k_1(t, \tau) \in H^{(\mu)}\{(z,\tau) :\ z \in L,\ \tau \in L,\ z \neq \tau\}$ *и допускает с контура* L *в область* $D^+{}_L$ *по переменной* t *однозначное аналитическое продолжение* $k_{+,1}(z, \tau) \in C_z^{(\infty)}\{(z, \tau) :\ z \in D^+{}_L,\ \tau \in L\} \cap H^{(\mu)}\{(z, \tau) :\ z \in L,\ \tau \in L,\ z \neq \tau\}$*, а по переменной* τ *— однозначное аналитическое продолжение* $k_{1,+}(t, w) \in C_w^{(\infty)}\{(t, w) :\ t \in L,\ w \in D^+{}_L\} \cap H^{(\mu)}\{(t, w) :\ t \in L,\ w \in L,\ t \neq w\}$*, то при любом значении индекса* $w_1 \leqslant 0$ *исходного полного СИУ-2К (1) сингуляризатором слева для СИ-оператора* K_1 *вида (1) является СИ-оператор* K_l*, определяемый формулой*

$$(K_l\psi)(t) = a_2(t)\psi(t) + \frac{b_2(t)}{\pi i}\oint_L \frac{a_1(t) - b_1(t)}{a_1(\tau) - b_1(\tau)}\frac{\psi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau - \\ - \oint_L \frac{a_2(t) + b_2(t)}{a_1(\tau) - b_1(\tau)}k_1(t,\tau)\psi(\tau)\,d\tau, \tag{37}$$

где $a_2(t)$ *и* $b_2(t)$ *— произвольные функции класса* $H^{(\mu)}(L)$.

Доказательство. Применяя к обеим частям уравнения (1) СИ-оператор K_l вида (37), приходим к полному СИУ-2К вида

$$(K_lK_1\phi)(t) = a_2(t)a_1(t)\phi(t) + a_2(t)\frac{b_1(t)}{\pi i}\oint_L \frac{\phi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau + \\ + \oint_L a_2(t)k_1(t,\tau)\phi(\tau)\,d\tau + \frac{b_2(t)}{\pi i}\oint_L \frac{a_1(t) - b_1(t)}{\tau - t}\phi(\tau)\,d\tau + \\ + \frac{b_2(t)}{\pi i}\oint_L \frac{a_1(t) - b_1(t)}{a_1(\tau) - b_1(\tau)}\frac{b_1(\tau)}{\tau - t}\phi(\tau)\,d\tau + \\ + \frac{b_2(t)}{\pi i}\oint_L \frac{b_1(s)}{\pi i}\frac{a_1(t) - b_1(t)}{a_1(s) - b_1(s)}\frac{ds}{s - t}\oint_L \frac{\phi(\tau)}{\tau - s}\,d\tau -$$

$$-\oint_L \frac{b_1(s)}{\pi i}\frac{a_2(t)+b_2(t)}{a_1(s)-b_1(s)}k_1(t,s)\,ds\oint_L \frac{\phi(\tau)}{\tau-s}\,d\tau-$$
$$-\oint_L \frac{a_2(t)+b_2(t)}{a_1(s)-b_1(s)}k_1(t,s)\,ds\oint_L k_1(s,\tau)\phi(\tau)\,d\tau+$$
$$+\frac{b_2(t)}{\pi i}\oint_L \frac{a_1(t)-b_1(t)}{a_1(s)-b_1(s)}\frac{ds}{s-t}\oint_L k_1(s,\tau)\phi(\tau)\,d\tau-$$
$$-\oint_L \frac{a_2(t)+b_2(t)}{a_1(\tau)-b_1(\tau)}k_1(t,\tau)\phi(\tau)\,d\tau=(K_1f)(t),\quad t\in L.$$

Переставив порядок интегрирований в повторных интегралах и использовав формулу (36), полученное уравнение переписываем в виде (4), где коэффициенты $a_{2,1}(t)$ и $b_{2,1}(t)$ определяются по-прежнему формулами (5), а регулярная часть ядра принимает значение

$$k_{2,1}(t,\tau)=a_2(t)k_1(t,\tau)-\frac{a_2(t)+b_2(t)}{a_1(\tau)-b_1(\tau)}a_1(\tau)k_1(t,\tau)+$$
$$+\frac{b_2(t)}{\pi i}\oint_L \frac{a_1(t)-b_1(t)}{a_1(s)-b_1(s)}\frac{k_1(s,\tau)}{s-t}\,ds+$$
$$+\oint_L \frac{b_1(s)}{\pi i}\frac{a_2(t)+b_2(t)}{a_1(s)-b_1(s)}\frac{k_1(t,s)}{s-\tau}\,ds-\oint_L \frac{a_2(t)+b_2(t)}{a_1(s)-b_1(s)}k_1(t,s)k_1(s,\tau)\,ds=$$
$$=a_2(t)k_1(t,\tau)++b_2(t)k_1(t,\tau)-\frac{a_2(t)+b_2q(t)}{a_1(\tau)-b_1(\tau)}a_1(\tau)k_1(t,\tau)+$$
$$+\frac{a_2(t)+b_2(t)}{a_1(\tau)-b_1(\tau)}b_1(\tau)k_1(t,\tau)\equiv 0,\quad t\in L,\quad \tau\in L,\quad t\neq\tau.$$

Здесь при вычислении двух первых интегралов мы использовали формулу (36), а при вычислении последнего — основную теорему о вычетах. Таким образом, полученное уравнение является характеристическим СИУ-2К относительно той же искомой функции $\phi(t)$, и теорема 11 доказана.

Теорема 12. *Если в исходном уравнении (1) L — простой гладкий или кусочно-гладкий замкнутый контур, ограничивающий конечную и односвязную область $(D^+{}_L)$; коэффициент $b_1(t)\in H^{(\mu)}(L)$ и допускает с контура L на $\overline{C}_{(}z)$ однозначное аналитическое продолжение $b_{+,1}(z)$, голоморфное в области $D^+{}_L$; сумма коэффициентов $a_1(t)+b_1(t)\in H^{(\mu)}(L)$ и допускает с контура L в область $D^+{}_L$ однозначное аналитическое продолжение $a_{+,1}(z)+b_{+,1}(z)$, голоморфное в области $D^+{}_L$ и не исчезающее при $z\in(D^+{}_L\cup L)$; регулярная часть ядра $k_1(t,\tau)\in H^{(\mu)}\{(t,\tau):\ t\in L,\tau\in L,$ $t\neq\tau\}$ и допускает с контура L в область $D^+{}_L$ по переменной t однозначное аналитическое продолжение $k_{+,1}(z,\tau)\in C_z^{(\infty)}\{(z,\tau):\ z\in D^+{}_L,$ $\tau\in L\}\cap H^{(\mu)}\{(z,\tau):\ z\in L,\ \tau\in L,\ z\neq\tau\}$, а по переменной τ — однозначное аналитическое продолжение $k_{1,+}(t,w)\in C_w^{(\infty)}\{(t,w):\ t\in L,w\in D^+{}_L\}\cap$ $\cap H^{(\mu)}\{(t,w):\ t\in L,\ w\in L,t\neq w\}$, то при любом значении индекса $w_1\geqslant 0$*

исходного полного СИУ-2К (1) сингуляризатором справа для СИ-оператора K_1 *вида (1) является СИ-оператор* K_r, *определяемый формулой*

$$(K_r\psi)(t) \equiv a_2(t)\psi(t) + \oint_L \left\{ \frac{b_2(t)}{\pi i}\frac{1}{\tau - t} + \right.$$
$$\left. + \left[\frac{1}{\pi i}\frac{b_1(t)}{\tau - t} + k_1(t,\tau)\right][b_2(\tau) - a_2(\tau)]\right\} \frac{\psi(\tau)\,d\tau}{a_1(t) + b_1(t)}, \quad t \in L, \tag{38}$$

где $a_2(t) = \lim\limits_{z\to\ t\in L} a_{+,2}(z)$ *и* $b_2(t) = \lim\limits_{z\to\ t\in L} b_{+,2}(z)$, *а* $a_2(z)$ *и* $b_2(z)$ — *произвольные функции класса* $C^{(\infty)}(D^+{}_L) \cap H^{(\mu)}(L)$.

Доказательство. Полагая в исходном уравнении (1) $\phi(t) = (K_r\psi)(t)$, $t \in L$, где K_r — СИ-оператор вида (38), приходим к полному СИУ-2К относительно функции $\psi(t)$, которое с помощью перестановки порядка интегрирований в повторных интегралах и применения формулы (36) приводим к виду (9), где коэффициенты $a_{1,2}(t)$ и $b_{1,2}(t)$ снова вычисляются по формулам (5), а регулярная часть ядра принимает значение

$$k_{1,2}(t,\tau) = a_1(t)\frac{b_2(\tau) - a_2(\tau)}{a_1(t) + b_1(t)}\left[\frac{1}{\pi i}\frac{b_1(t)}{\tau - t} + k_1(t,\tau)\right] -$$
$$-\frac{b_1(t)}{\pi i}\frac{b_{1,2}(t)}{a_1(\tau) + b_1(\tau)}\frac{1}{\tau - t} + a_2(\tau)k_1(t,\tau) + \frac{b_1(t)}{\pi i}\frac{a_2(\tau)}{\tau - t} -$$
$$-b_1(t)\frac{b_1(\tau)}{\pi i}\frac{b_2(\tau) - a_2(\tau)}{a_1(\tau) + b_1(\tau)}\frac{1}{\tau - t} + \frac{b_1^2(t)}{\pi i}\frac{b_2(\tau) - a_2(\tau)}{a_1(t) + b_1(t)}\frac{1}{\tau - t} +$$
$$+\frac{b_1(t)}{\pi i}\oint_L b_1(s)\frac{k_1(s,\tau)}{s - t}\,ds - \frac{1}{\pi i}\oint_L \frac{b_{1,2}(s)}{a_1(s) + b_1(s)}\frac{k_1(t,s)}{s - \tau}\,ds +$$
$$+\oint_L \left[\frac{-1}{\pi i}\frac{b_1(s)}{s - \tau} + k_1(s,\tau)\right]\frac{b_2(\tau) - a_2(\tau)}{a_1(s) + b_1(s)}k_1(t,s)\,ds.$$

Поскольку

$$a_1(t)b_1(t)\frac{b_2(\tau) - a_2(\tau)}{a_1(t) + b_1(t)} + b_1(t)a_2(\tau) + b_1^2(t)\frac{b_2(\tau) - a_2(\tau)}{a_1(t) + b_1(t)} = b_1(t)b_2(\tau);$$
$$\frac{b_1(t)a_1(\tau)b_2(\tau) + b_1(t)a_2(\tau)b_1(\tau) + b_1(t)b_1(\tau)b_2(\tau) - b_1(t)a_2(\tau)b_1(\tau)}{a_1(\tau) + b_1(\tau)} =$$
$$= b_1(t)b_2(\tau)$$

и с помощью формулы (36) имеем

$$\frac{1}{\pi i}\oint_L \frac{k_1(s,\tau)}{a_1(s) + b_1(s)}\frac{ds}{s - t} = \frac{k_1(t,\tau)}{a_1(t) + b_1(t)};$$
$$\frac{1}{\pi i}\oint_L \frac{b_{1,2}(s)}{a_1(s) + b_1(s)}\frac{k_1(t,s)}{s - \tau}\,ds = \frac{a_1(\tau)b_2(\tau) + a_2(\tau)b_1(\tau)}{a_1(\tau) + b_1(\tau)}k_1(t,\tau);$$
$$\frac{1}{\pi i}\oint_L \frac{b_1(s)}{a_1(s) + b_1(s)}\frac{k_1(t,s)}{s - \tau} = \frac{b_1(\tau)}{a_1(\tau) + b_1(\tau)}k_1(t,\tau),$$

а с помощью основной теоремы о вычетах получаем, что

$$\oint\limits_L \frac{k_1(s,\tau)k_1(t,s)}{a_1(s)+b_1(s)}\,ds = 2\pi i\sum_j \mathrm{res}_{z=z_j\in D^+{}_L}\frac{k_{+,1}(z,\tau)k_{1,+}(t,z)}{a_{+,1}(z)+b_{+,1}(z)} \equiv 0,$$

то в результате приведения подобных членов приходим к тождеству $k_{1,2}(t,\tau) \equiv 0$, $t \in L$, $\tau \in L, t \neq \tau$. Таким образом, полученное здесь уравнение является характеристическим СИУ-2К относительно новой искомой функции $\psi(t)$, и теорема 12 доказана.

§ 8. Приведем теперь примеры на применение изложенной здесь части теории по методам сингуляризации полных СИУ-2К вида (1).

Пример 1. В допустимом классе интегрируемых на контуре L функций решить в замкнутой форме уравнение

$$(K_1\phi)(t) \equiv \mathrm{ch}(at)\phi(t) + \frac{\mathrm{sh}(at)}{\pi i}\oint\limits_L \frac{\phi(\tau)\,d\tau}{\tau - t} + \oint\limits_L \frac{t}{\tau}\frac{\cos(t+\tau)}{2\pi i}\phi(\tau)\,d\tau =$$

$$= (t+B)e^{at} + Bt\ \mathrm{ch}(t),\quad t\in L, \tag{39}$$

где L — проходимая против часовой стрелки единичная окружность с центром $z=0$, a и B — комплексные постоянные, причем $|a| < \pi/2$.

Решение. Так как $a_1^2(t) - b_1^2(t) = \mathrm{ch}^2(at) - \mathrm{sh}^2(at) = 1$ при всех $t \in L$, то имеем нормальный случай полного СИУ-2К с простым, гладким и замкнутым контуром интегрирования L, разбивающим расширенную комплексную плоскость $\overline{C_z}$ на непересекающиеся части $D^+{}_L = \{z : |z| < 1\}$ и $D^-{}_L = \{z : |z| > 1\}$; с коэффициентами $a_1(t) = \mathrm{ch}(at)$ и $b_1(t) = \mathrm{sh}(at)$, принадлежащими классу Гельдера $H^{(\mu)}(L)$ и допускающими с контура L в круг $D^+{}_L$ однозначные и голоморфные аналитические продолжения $a_{+,1}(z) = \mathrm{ch}(az)$ и $b_{+,1}(z) = \mathrm{sh}(az)$, причем функции $a_{+,1}(z) - b_{+,1}(z) = e^{-az}$ и $a_{+,1}(z) + b_{+,1}(z) = e^{az}$ голоморфны в круге $D^+{}_L$ и не обращаются в нуль при всех $z \in (D^+{}_L \cup L) = \{z : |z| \leqslant 1\}$; со свободным членом $f(t) = (t+B)e^{at} + Bt\ \mathrm{ch}(t) \in H^{(\mu)}(L)$ и с вырожденной регулярной частью $k_1(t,\tau) = t\ \mathrm{ch}\,t\left[\dfrac{1}{\tau}\dfrac{\mathrm{ch}\,\tau}{2\pi i}\right] + t\ \mathrm{sh}\,t\left[\dfrac{1}{\tau}\dfrac{\mathrm{sh}\,\tau}{2\pi i}\right]$ ядра класса $H^{(\mu)}\{(t,\tau) : |t| = 1, |\tau| = 1, t \neq \tau\}$, которая по переменной t допускает с контура L в круг $D^+{}_L$ однозначное аналитическое продолжение $k_{+,1}(z,\tau) = [z\ \mathrm{ch}(z+\tau)]/(2\pi i\tau)$, голоморфное по переменной z в области $D^+{}_L$ при всех $\tau \in L$, а по переменной τ — однозначное аналитическое продолжение $k_1(t,z) = t\ \mathrm{ch}(t+z)/(2\pi i z)$, имеющее простой полюс в точке $z=0$ области $D^+{}_L$. Таким образом, уравнение (39) не подчиняется всем условиям теорем 11 или 12. Так как уравнение (39) имеет индекс $w_1 = \mathrm{Ind}_L\dfrac{a_1(t)-b_1(t)}{a_1(t)+b_1(t)} = \mathrm{Ind}_L e^{-2at} = 0$, то оно, безусловно, разрешимо в допустимом классе интегрируемых на контуре L функций. Это подтверждается и второй теоремой Ф. Нетера, ибо союзное к нему уравнение

$$(K_1'\omega)(t) \equiv \mathrm{ch}(at)\,\omega(t) - \oint\limits_L \frac{\mathrm{sh}(a\tau)}{\pi i}\frac{\omega(\tau)\,d\tau}{\tau - t} + \oint\limits_L \frac{\tau}{t}\frac{\mathrm{ch}(\tau+t)}{2\pi i}\omega(\tau)\,d\tau = 0 \tag{40}$$

имеет только тривиальное решение $\omega(t) \equiv 0$, $t \in L$. В этом легко убедиться непосредственно, решая уравнение (40) как союзное к полному СИУ-2К с вырожденной регулярной частью ядра.

Способ 1. Если, чтобы иметь средство контроля, исходное уравнение (39) решать как полное СИУ-2К с вырожденной регулярной частью ядра, то с помощью формулы (36) легко получаем, что в выбранном нами ДКдИФ общим решением полного СИУ-2К вида (39) является функция

$$\phi(t) = t + B, \quad t \in L, \tag{41}$$

где B — входящая в правую часть уравнения (39) комплексная постоянная.

Способ 2. Методом Карлемана—Векуа регуляризации полных СИУ-2К (см. [2, с. 232]) исходное уравнение (39) приводится к эквивалентному ему неоднородному ИУФ-2

$$\phi(t) + e^{-at} \oint\limits_L \frac{t}{\tau} \frac{\mathrm{ch}(t+\tau)}{2\pi i} \phi(\tau)\, d\tau = t + B + Bt\ \mathrm{ch}(t)\, e^{-at}, \quad t \in L \tag{42}$$

с вырожденным ядром. Поэтому уравнение (42) легко решается в замкнутой форме, что и приводит к тому же результату (41).

Способ 3. Применение алгоритма сингуляризации слева полных СИУ-2К к исходному уравнению (39) приводит к полному СИУ-2К

$$\begin{aligned}(K_2 K_1 \phi)(t) \equiv a(t)\phi(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \oint\limits_L \frac{\phi(\tau)\, d\tau}{\tau - t} + \\ + \oint\limits_L k_{2,1}(t,\tau)\phi(\tau)\, d\tau\, d\tau = (K_l f)(t)\end{aligned} \tag{43}$$

с коэффициентами

$$a(t) = a_2(t)\,\mathrm{ch}(at) + b_2(t)\,\mathrm{sh}(at), b(t) = a_2(t)\,\mathrm{sh}(at) + b_2(t)\,\mathrm{ch}(at) \tag{44}$$

и регулярной частью ядра

$$\begin{aligned}k_{2,1}(t,\tau) = a_2(t)\frac{t}{\tau}\frac{\mathrm{ch}(t+\tau)}{2\pi i} + \mathrm{ch}(a\tau) k_l(t,\tau) + \frac{b_2(t)}{\pi i}\frac{\mathrm{ch}(a\tau) - \mathrm{ch}(at)}{\tau - t} - \\ - \frac{b_2(t)}{\pi i} \oint\limits_L \frac{1}{\pi i}\frac{\mathrm{sh}(as)}{s-\tau}\frac{ds}{s-t} + \oint\limits_L \frac{s}{\tau}\frac{\mathrm{ch}(s+\tau)}{2\pi i}\frac{ds}{s-t} - \\ - \oint\limits_L \frac{\mathrm{sh}(as)}{\pi i}\frac{k_l(t,s)}{s-\tau}\, ds + \oint\limits_L \frac{s}{\tau}\frac{\mathrm{ch}(s+\tau)}{2\pi i} k_l(t,s)\, ds,\end{aligned}$$

что вполне согласуется с формулами (4), (5) и (7).

Регулярную часть $k_l(t,\tau)$ ядра искомого сингуляризатора слева K_l для исходного СИ-оператора K_1 вида (39) будем строить в допустимом классе функций $H^{(\mu)}\{(t,\tau) : |t| = |\tau| = 1, t \neq \tau\}$, допускающих по переменной τ с контура L на $\overline{C}_w$ однозначное аналитическое продолжение, имеющее в круге $D^+{}_L = \{w : |w| < 1\}$ только одну особую точку $w = 0$, то есть $k_l(t,\tau) = \lim\limits_{w\to\ \tau\in L} k_l(t,w)$ и $\mathrm{sh}(aw)\, k_l(t,w)$ — функция класса $C_w^{(\infty)}\{(t,w) : |t| = 1, |w| < 1\} \cap$

$\cap H_w^{(\mu)}\{(t,w):\ |t|=1,\ |w|=1,\ t\neq w\}$. Тогда с помощью формулы (36) и основной теоремы о вычетах соответствующее этому примеру уравнение (14) приводится к равносильному алгебраическому уравнению, линейному относительно функции $k_l(t,\tau)$. Именно так и получаем, что сингуляризатор слева K_l для исходного СИ-оператора K_1 вида (39) определяется формулой

$$(K_l\psi)(t)\equiv a_2(t)\psi(t)+\frac{b_2(t)}{\pi i}\oint\limits_L\frac{e^{-at}}{e^{-a\tau}}\psi(\tau)\frac{d\tau}{\tau-t}-$$
$$-\frac{a_2(t)+b_2(t)}{2\pi i}\oint\limits_L\frac{t}{\tau}\frac{\operatorname{ch}(t+\tau)}{e^{-a\tau}}\psi(\tau)\,d\tau,\quad t\in L,$$

являющейся частным случаем формулы (37). Считая с этого момента $K_2\equiv K_l$, в уравнении (43) получаем $k_{2,1}(t,\tau)\equiv 0$ при $t\in L,\ \ \tau\in L,\ t\neq\tau$, а общее решение характеристического СИУ-2К

$$a(t)\phi(t)+\frac{b(t)}{\pi i}\oint\limits_L\frac{\phi(\tau)\,d\tau}{\tau-t}=[a_2(t)+b_2(t)](t+B)e^{at}\equiv(K_lf)(t),\quad t\in L$$

ищем в предположпении, что $a_2(t)=\lim\limits_{z\to\ t\in L}a_{+,2}(z), b_2(t)=\lim\limits_{z\to\ t\in L}b_{+,2}(z)$, где $a_{+,2}(z)$ и $b_{+,2}(z)$ — функции класса $C^{(\infty)}\{z:|z|<1\}\cap H^{(\mu)}\{z:|z|=1\}$, удовлетворяющие условию $a_{+,2}^2(z)-b_{+,2}^2(z)\neq 0$ при всех $|z|\leqslant 1$, и получаем в виде $\phi(t)=t+B,\ \ t\in L$, причем B — та же, что и в уравнении (39), комплексная постоянная.

Поскольку при сингуляризации слева полных СИУ-2К потери решений исходного полного СИУ-2К не происходит, а функция $\phi(t)=t+B,\ \ t\in L$ удовлетворяет исходному уравнению (39) при произвольных значениях постоянной B, в чем нетрудно убедиться непосредственной проверкой, то отсюда заключаем, что $\phi(t)=t+B,\ \ t\in L$ — общее решение исходного уравнения (39) в избранном нами ДКдИФ. Этот вывод подтверждается и результатом (41), полученным ранее классическими способами.

Способ 4. Применение алгоритма сингуляризации справа полных СИУ-2К к исходному уравнению (39) приводит к полному СИУ-2К относительно новой искомой функции $\psi(t)$ с теми же коэффициентами $a(t)$ и $b(t)$ вида (44), с исходным свободным членом $f(t)$ и регулярной частью ядра

$$k_{1,2}(t,\tau)=\operatorname{ch}(at)\,k_r(t,\tau)+\frac{a_2(\tau)}{2\pi i}\frac{t}{\tau}\operatorname{ch}(t+\tau)+\frac{\operatorname{sh}(at)}{\pi i}\frac{a_2(\tau)-a_2(t)}{\tau-t}+$$
$$+\oint\limits_L\left[\frac{1}{\pi i}\frac{\operatorname{sh}(at)}{s-t}+\frac{t}{s}\frac{\operatorname{ch}(t+s)}{2\pi i}\right]\left[\frac{-1}{\pi i}\frac{b_2(s)}{s-\tau}+k_r(s,\tau)\right]ds,$$

что вполне согласуется с формулами (5), (9) и (10).

Стремясь получить равносильный сингуляризатор справа K_r для исходного СИ-оператора K_1 вида (39) и нормальный случай равносильного характеристического СИУ-2К вида (12), в соответствии с результатами § 2 и теоремы 10 данной работы уравнение (17) относительно функции $k_r(t,\tau)$ решаем в предположениях, что:

а) $a_2(t) = \lim\limits_{z\to\, t\in L} a_{+,2}(z)$, $b_2(t) = \lim\limits_{z\to\, t\in L} b_{+,2}(z)$, где $a_{+,2}(z)$ и $b_{+,2}(z)$ — функции класса $C^{(\infty)}\{z : |z| < 1\} \cap H^{(\mu)}\{z : |z| = 1\}$, удовлетворяющие условию $a^2_{+,2}(z) - b^2_{(+,2}(z) \neq 0$ при всех $|z| \leqslant 1$ и $a_{+,2}(t)\ \mathrm{ch}(at) + b_{+,2}(t)\ \mathrm{sh}(at) \neq 0$ при $|t| = 1$;

б) $k_r(t,\tau) = \lim\limits_{z\to\, t\in L} k_{+,2}(z,\tau)$, где $k_{+,2}(z,\tau)$ — функция класса $C_z^{(\infty)}\{(z,\tau) : |z| < 1, |\tau| = 1\} \cap H_z^{(\mu)}\{(z,\tau) : |z| = 1,\ |\tau| = 1,\ z \neq \tau\}$.

Используя формулу (36), основную теорему о вычетах, а при вычислении одного интеграла — формулу Ю.В. Сохоцкого и интегральные формулы (33) и (34) данной работы, мы соответствующее рассматриваемому примеру уравнение (17) приводим к линейному алгебраическому уравнению относительно функции $k_r(t,\tau)$; из последнего и получаем единственное искомое значение

$$k_r(t,\tau) = e^{-at}\left\{\frac{\mathrm{sh}(at)}{\pi i}\left[\frac{b_2(\tau) - b_2(t)}{\tau - t} - \frac{a_2(\tau) - a_2(t)}{\tau - t}\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{b_2(\tau) - a_2(\tau)}{2\pi i}\frac{t}{\tau}\,\mathrm{ch}(t+\tau) - \frac{b_{+,2}(0)}{\pi i}\frac{t}{\tau}\,\mathrm{ch}(t)\right\}$$

регулярной части ядра равносильного сингуляризатора справа, использование которого переводит исходное полное уравнение (39) в эквивалентное ему характеристическое уравнение вида

$$a(t)\psi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\oint\limits_L \frac{\psi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = (t + B)e^{at} + Bt\ \mathrm{ch}(t), \quad t \in L. \tag{45}$$

Так как в допустимом классе функций, интегрируемых на контуре L, общее решение характеристического уравнения (45) дается формулой $\psi(t) = [t + B + Bt\ \mathrm{ch}(t)\,e^{-at}]/[a_2(t) + b_2(t)]$, $t \in L$, то по формуле (8) общее решение исходного уравнения (39) получаем снова в виде (41).

На наш взгляд, заслуживает внимания и

Способ 5 решения исходного уравнения (39), состоящий в непосредственном применении формулы (36) к вычислению всех входящих в исходное уравнение (39) интегралов. Ведь если известно, что все решения $\phi(t)$ исходного уравнения (39) следует искать только в классе функций, удовлетворяющих условию Гельдера на замкнутом контуре L и допускающих с контура L в круг $D^+{}_L$ однозначное и голоморфное аналитическое продолжение $\phi_+(z)$, то с помощью равенств

$$\frac{1}{\pi i}\oint\limits_L \frac{\phi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau \equiv \frac{1}{\pi i}\oint\limits_L \frac{\phi_+(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = \phi(t), \quad t \in L;$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_L \frac{t}{\tau}\,\mathrm{ch}(t+\tau)\phi(\tau)\,d\tau = t\,\mathrm{res}_{z=0}\left\{\frac{\mathrm{ch}(t+z)}{z}\phi_+(z)\right\} =$$
$$= t\ \mathrm{ch}(t)\,\phi_+(0), \quad t \in L$$

исходное уравнение (39) приводим к линейному соотношению

$$e^{at}\phi(t) + t\ \mathrm{ch}(t)\,\phi_+(0) = (t + B)e^{at} + Bt\ \mathrm{ch}(t),\quad t \in L, \tag{46}$$

связывающему искомую функцию $\phi(t)$ со значением $\phi_+(0)$ в точке $z = 0 \in \in D^+{}_L$ ее однозначного аналитического продолжения $\phi_+(z)$ с контура L в ограниченную им область $D^+{}_L$. Так как для однозначного вычисления значений двух неизвестных $\phi(t)$ и $\phi_+(0)$ одного соотношения (46) явно недостаточно, то, продолжив аналитически обе части соотношения (46) по переменной t с замкнутого контура L в замыкание $D^+{}_L \cup L$ области $D^+{}_L$, приходим к справедливому тождеству

$$e^{az}\phi_+(z) + z\ \mathrm{ch}(z)\,\phi_+(0) = (z + B)e^{az} + Bz\ \mathrm{ch}(z),\quad z \in D^+{}_L \cup L.$$

Переходя здесь к пределу при $z \to 0$, легко получаем, что $\phi_+(0) = B$; теперь из линейного соотношения (46) общее решение исходного уравнения (39) снова получаем в виде (41), что идентично с результатами, полученными ранее классическими методами и методами сингуляризации полных СИУ-2К.

Пример 2. В нормальном случае полного СИУ-2К с вырожденной регулярной частью ядра, но с индексом $w_1 = -2$, которое опять не подчиняется всем условиям теоремы 11:

$$\begin{aligned}(K_1^*\phi)(t) \equiv \phi(t) - \frac{2-t^2}{2+t^2}\frac{1}{\pi i}\oint_L \frac{\phi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau - \\ - \oint_L \frac{\tau}{2\pi i}\frac{\cos(\tau - t)}{2+t^2}\phi(\tau)\,d\tau = 2t^2\frac{e^t + t\sin t}{2+t^2},\quad t \in L,\end{aligned} \tag{47}$$

где L — проходимая против часовой стрелки единичная окружность с центром $z = 0$, сингуляризатор справа K_r для исходного полного СИ-оператора K_1 вида (47) не существует (это можно доказать!), а равносильный сингуляризатор слева K_l для СИ-оператора K_1 вида (47) имеет регулярную часть ядра

$$\begin{aligned}k_l(t,\tau) = \frac{1}{\pi i}\frac{b_2(t)}{2+t^2}\left[\tau + t + \frac{\tau^3 + 2\tau}{8}\cos(\tau - t)\right] - \\ -\alpha\frac{2+\tau^2}{16\,\tau}[4 + \tau^2\ \cos(\tau)] - \beta\frac{2+\tau^2}{16\,\tau^2}[4 + \tau^3\ \sin(\tau)],\end{aligned}$$

где α и β — произвольные комплексные постоянные, а $b_2(t) = \lim\limits_{z\to\ t\in L} b_{+,2}(z)$ и $b_{+,2}(z) \in C^{(\infty)}\{z : |z| < 1\} \cap H^{(\mu)}\{z : |z| = 1\}$, причем $b_{+,2}(z) \neq 1$ и $b_{+,2}(z) \neq \neq -1$ при всех $z \in (D^+{}_L \cup L) = \{z : |z| \leqslant 1\}$.

Метод непосредственной сингуляризации слева с помощью такого сингуляризатора слева K_l и способы 1, 2, 3 и 5 (см. предыдущий пример 1) решения в замкнутой форме уравнения (47) дают один и тот же результат: решение уравнения (47) существует, единственно и дается формулой $\phi(t) = e^t + t\ \sin(t),\quad t \in L$.

Пример 3. В нормальном случае полного СИУ-2 с ядром, автоморфным относительно трехчленной нециклической группы $T = \left\{T_j(z), 0 \leqslant j \leqslant 2\right\}$, где $T_0(z) = z$, $T_1(z) = (z+1)/(1-3z)$, $T_2(z) = T_1^{-1}(z) = (z-1)/(1+3z)$, с тем же контуром интегрирования L и с индексом $w_1 = m$ (m — целое число):

$$(K_1\phi)(t) \equiv \phi(t) + \frac{1-t^m}{1+t^m}\frac{1}{\pi i}\oint_L \left\{\frac{1}{\tau - t} + \frac{3t+1}{3t\tau + \tau - t + 1} + \right.$$

$$\left. + \frac{3t-1}{3t\tau - \tau + t + 1} - \frac{18\tau}{9\tau^2 - 1}\right\}\phi(\tau)\,d\tau = \frac{2}{1+t^m} f(t), \quad t \in L, \tag{48}$$

где $f(t)$ — заданная функция класса $H^{(\mu)}(L), 0 < \mu \leqslant 1$, применение при $m \leqslant 0$ к обеим частям исходного неоднородного уравнения (48) равносильного и приведенного сингуляризатора слева K_l^*, определяемого формулой (37):

$$(K_l^*\psi)(t) \equiv \psi(t) + \frac{c(t)}{\pi i}\oint_L \frac{t^m}{\tau^m}\frac{1+\tau^m}{1+t^m}\frac{\psi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau -$$

$$-\frac{1+c(t)}{2\pi i}\oint_L \frac{1-t^m}{1+t^m}\frac{1+\tau^m}{\tau^m}\left\{\frac{3t+1}{3t\tau + \tau - t + 1} + \frac{3t-1}{3t\tau - \tau + t + 1} - \frac{18\tau}{9\tau^2 - 1}\right\}\phi(\tau)\,d\tau,$$

где $t \in L$ и $c(t)$ — произвольная функция класса $H^{(\mu)}(L)$, допускающая с контура L в круг $D^+{}_L$ однозначное и голоморфное аналитическое продолжение $c_+(z)$, причем $1 - c_+{}^2(z) \neq 0$ при $|z| \leqslant 1$, приводит к эквивалентному характеристическому СИУ-2К вида

$$\left[1 + c(t)\frac{1-t^m}{1+t^m}\right]\phi(t) + \left[c(t) + \frac{1-t^m}{1+t^m}\right]\frac{1}{\pi i}\oint_L \frac{\psi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = K_l^*\left[2\frac{f(t)}{1+t^m}\right], \quad t \in L.$$

Это и позволяет получить окончательный результат: при $m \geqslant 0$ безусловно, а при $m < 0$ — лишь при выполнении условий

$$\oint_L K_l^*\left[2\frac{f(t)}{1+t^m}\right]\frac{1+t^m}{1-c(t)}\,t^{j-1}dt = 0, \ 1 \leqslant j \leqslant -m$$

решение уравнения (48) существует, единственно и имеет вид $\phi(t) = f(t)$, $t \in L$. Правильность этого результата подтверждается и непосредственным решением исходного уравнения (48) по методу Гахова—Чибриковой [5, а)], то есть приведением исходного полного уравнения (48) с Т-автоморфным ядром к эквивалентной ему краевой задаче Римана для Т-автоморфной кусочноголоморфной функции

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \sum_{j=0}^{2}\left[\frac{1}{\tau - T_j(z)} - \frac{1}{\tau - T_j(\infty)}\right]\phi(\tau)\,d\tau,$$

имеющей линию скачков $\Gamma = L \cup T_1(L) \cup T_2(L)$ и исчезающей в бесконечности.

Пример 4. В нормальном случае приведенного и с индексом $w_1 = 1$ полного уравнения вида

$$(K_1^*\phi)(t) \equiv \phi(t) + \frac{1}{\pi i}\oint_L \left[\frac{2-t}{\tau - t} + e^{t\tau}\right]\frac{\phi(\tau)}{2+t} = 2\frac{f(t)}{2+t}, \quad t \in L, \tag{49}$$

где $L = \{t : |t| = 1\}$ — тот же контур интегрирования; регулярная часть ядра не является вырожденной и не обладает никакими групповыми свойствами, но по каждой из переменных t и τ допускает с контура L в область $D^+{}_L = \{z : |z| < 1\}$ однозначные аналитические продолжения $k_{+,1}(z,\tau) = \dfrac{1}{\pi i}\dfrac{\exp(z\tau)}{2+z}$ и $k_{1,+}(t,w) = \dfrac{1}{\pi i}\dfrac{\exp(tw)}{2+t}$; функция $f(t) \in H^{(\mu)}(L)$ и допускает с контура L на $\overline{C}_z$ однозначное аналитическое продолжение $f_+(z)$, голоморфное в области $D^+{}_L$, использование равносильного приведенного нормального сингуляризатора слева K_l^*, определяемого формулой

$$(K_l^*\psi)(t) \equiv \psi(t) + \frac{1}{\pi i}\oint_L \left[\frac{c(t)}{\tau - t} - \frac{2}{\tau}\frac{c(t)}{2+t} - \frac{2+\tau}{2\tau}\frac{1+c(t)}{2+t}e^{t\tau}\right]\psi(\tau)\,d\tau, \tag{50}$$

где $c(t)$ — произвольная функция класса $H^{(\mu)}(L)$, допускающая с контура L в круг $D^+{}_L$ однозначное и голоморфное аналитическое продолжение $c_+(z)$, причем $1 - c_+{}^2(z) \neq 0$ при $|z| \leqslant 1$, приводит к эквивалентному характеристическому СИУ-2К вида

$$(K_l^* K_1^*\phi)(t) \equiv \left[1 + c(t)\frac{2-t}{2+t}\right]\phi(t) + \left[c(t) + \frac{2-t}{2+t}\right]\frac{1}{\pi i}\oint_L \frac{\phi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau =$$

$$= \frac{2}{2+t}\{[1 + c(t)]\,[f(t) - f_+(0)] - 2f_+(0)\,c(t)\}, \quad t \in L,$$

что и позволяет в допустимом классе интегрируемых на контуре L функций получить общее решение исходного уравнения (49) в виде

$$\tilde{\phi}(t) = \frac{1}{2}f(t) + \frac{1-t}{t}f_+(0), \quad t \in L, \tag{51}$$

где $f_+(0)$ — произвольная комплексная постоянная.

Если же в уравнение (49) ввести вместо $\phi(t)$ новую искомую функцию $\psi(t)$, полагая

$$\phi(t) = (K_r^*\psi)(t) \equiv \psi(t) + \frac{c(t)}{\pi i}\oint_L \frac{\psi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau +$$

$$+ \oint_L \left[\frac{2-t}{4\pi i}\frac{c(\tau) - c(t)}{\tau - t} + \frac{c(\tau) - 1}{4\pi i}e^{t\tau}\right]\psi(\tau)\,d\tau, \tag{52}$$

где $c(t)$ — такая же функция, что и в формуле (50), то приходим к эквивалентному характеристическому СИУ-2К вида

$$\left[1 + c(t)\frac{2-t}{2+t}\right]\psi(t) + \left[c(t) + \frac{2-t}{2+t}\right]\frac{1}{\pi i}\oint_L \frac{\psi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = \frac{2f(t)}{2+t}, \quad t \in L. \tag{53}$$

Подставляя в правую часть равенства (52) общее решение в том же ДКдИФ характеристического уравнения (53)

$$\psi(t) = \frac{1}{2}\frac{f(t)}{1+c(t)} + \frac{\lambda_0}{4t}\frac{(2+t)c(t)+2-t}{1+c(t)}, \quad t \in L,$$

где λ_0 — произвольная комплексная постоянная, общее решение исходного полного СИУ-2К вида (49) в допустимом классе интегрируемых на контуре L функций получаем в виде

$$\tilde{\varphi}(t) = \frac{1}{2}f(t) - \lambda_0\frac{1-c_+(0)}{2}\frac{t-1}{t}, \quad t \in L,$$

что, очевидно, совпадает с результатом (51), если принять $2f_+(0) = \lambda_0\,[1-c_+(0)]$. Несмотря на то, что СИ-операторы K_l^* вида (50) и K_r^* вида (52) в данном примере строились непосредственно, нетрудно проверить, что формулы (50) и (52) являются частными случаями формул (37) и (38) соответственно. Вызвано это тем, что высказанные в условиях теорем 11 и 12 требования являются, очевидно, достаточными и вовсе не необходимыми для справедливости утверждений каждой из этих теорем.

Из приведенных здесь примеров следует, что методы сингуляризации полных СИУ-2К вида не только приводят к тем же результатам, что и классические методы решения уравнений рассматриваемого типа (примеры 1, 2 и 3), но являются очень эффективными и в тех случаях, когда классические методы не могут быть использованы (пример 4).

На рассмотрении приведенных здесь примеров мы и закончим данную работу. Имеющие место более точные аналоги теорем 11 и 12 при более слабых ограничениях на заданные функции $a_1(t), b_1(t)$ и $k_1(t,\tau)$ (например, [11]) мы здесь приводить не будем, как и многочисленные приложения их к решению в замкнутой форме полных СИУ-2К более общего, чем (1), вида, но с замкнутым контуром интегрирования L и с однозначно аналитически продолжаемыми заданными функциями.

Литература

[1] Бабурин Ю.С. Методы сингуляризации полных сингулярных интегральных уравнений второго рода с ядром Коши. 1 // Вестник Самарского государственного университета, 2003. №2. С. 5–20.

[2] Гахов Ф.Д. Краевые задачи. 3-е изд. М.: Наука, 1977. 640 с.

[3] Гахов Ф.Д., Чибрикова Л.И. О некоторых типах сингулярных интегральных уравнений, разрешаемых в замкнутой форме // Матем. сб., 1954. №35(77). Т. 3. С. 395–436.

[4] Гахов Ф.Д. О новых типах интегральных уравнений, разрешаемых в замкнутой форме // В сб. "Проблемы механики сплошной среды". Изд-во АН СССР, 1961. С. 101–113.

[5] Чибрикова Л.И. а) О краевой задаче Римана для автоморфных функций // Уч. зап. Казанского ун-та. 1956. Т. 116. Кн. 4. С. 59–110;

б) О решении некоторых полных сингулярных интегральных уравнений // Сб. "Краевые задачи теории аналитических функций". Изд-во Казанского ун-та, 1962. С. 95–124.

[6] Парадоксова И.А. а) Об одном сингулярном интегральном уравнении, связанном с циклической группой дробно-линейных преобразований // Изв. вузов, Матем., 1960. №5. С. 136–143;

б) Об одном полном сингулярном интегральном уравнении, разрешаемом в замкнутой форме // Изв. вузов, Матем., 1961. №1. С. 130–139.

[7] Сакалюк К.Д. Интегральные уравнения со степенными, логарифмическими и полярными ядрами, разрешимые в замкнутой форме: Автореф. дис. канд. физ.-мат. наук. Кишинев, 1963.

[8] Самко С.Г. О разрешимости в замкнутой форме сингулярных интегральных уравнений // ДАН СССР. 1969. №189. Т. 3. С. 483–485.

[9] Мерлин А.В. Интегральные уравнения с ядрами в виде абелевых интегралов // Тр. сем. по краевым задачам. Вып. 7. Изд-во Казанского ун-та, 1970. С. 210–214.

[10] Феттер Э.А. О некоторых сингулярных интегральных уравнениях, приводящихся к уравнениям с периодическими ядрами // Тр. сем. по краевым задачам. Вып. 7. Изд-во Казанского ун-та, 1970. С. 266–270.

[11] Бабурин Ю.С. Методы решения в замкнутой форме полных сингулярных интегральных уравнений второго рода с ядром Гильберта, с промежутком интегрирования $[0, 2\pi]$ и с аналитически продолжаемыми заданными функциями. Куйбышев: Изд-во КГУ, 1989. Деп. в ВИНИТИ 12.07.89. Т. 4638–В89. 195 с.

Поступила в редакцию 27/*VI*/2003;
в окончательном варианте — 27/*VI*/2003.

SINGULARISATION METHODS FOR COMPLETE SINGULAR INTEGRAL EQUATIONS OF THE SECOND TYPE WITH CAUCHY'S KERNEL. 2[3]

© 2003 Y.S. Baburin[4]

This paper continues [1]. Therefore the terminology is kept according to the previous discussion. Formulas and theorems numeration succeeds [1]. The structure of left singularisator K_l and right singularisator K_r for starting complete SI-operator K_1 of type (1) is found in the simplest case, when the regular part of kernel $k_1(t,\tau)$ has onesymbolic analytic continuations $k_{+,1}(z,\tau)$ and $k_{1,+}(t,w)$ are holomorphic in the domain ${D^+}_L$.

Paper received 27/*VI*/2003;
Paper accepted 27/*VI*/2003.

[3]Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. Y.N. Radayev.

[4]Baburin Yuriy Stepanovich, Dept. of Higher Mathematics and Informatics, Samara State University, Samara, 443011, Russia.