УДК 517.928

АППРОКСИМАЦИЯ ОДНОЙ МАКРОЭКОНОМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ТОЧНЫМ СВЕРХУ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ[1]

© 2003 Н.А. Зайчикова[2]

В статье рассмотрена задача построения точного сверху дифференциального включения для макроэкономической модели, которая описывает влияние основных производственных фондов на рост валового продукта. Приведены примеры построения точного сверху дифференциального включения для одно- и многопродуктовой моделей.

Введение

В предлагаемой статье изучается эволюция макроэкономической модели под влиянием медленных изменений параметров. Обычно эволюция таких моделей исследуется с помощью дифференциальных уравнений, которые, как известно, описывают детерминированные системы (см., например, [1, 2]). Для анализа можно использовать также стохастические модели, при этом необходимо сделать некие априорные предположения о вероятностных характеристиках изучаемой системы.

Удобным и общим средством описания недетерминированных систем (систем с неточно заданной или неполной информацией) являются дифференциальные включения (см., например, [3, 4]). Они позволяют описывать динамику системы, не используя вероятностных характеристик. Модель такого рода обобщает ряд вероятностных моде-

[1] Представлена доктором физико-математических наук профессором О.П. Филатовым.

[2] Зайчикова Надежда Анатольевна (zajna@yandex.ru, zana@ssu.samara.ru), кафедра уравнений математической физики Самарского государственного университета, 443011, Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

лей. В этом смысле она является более грубой. Однако результаты исследования позволяют сразу оценить сверху все результаты вероятностных моделей, что иногда оказывается достаточным в прикладных исследованиях.

При анализе исходная задача заменяется другой, более простой, которая описывает изменение медленных переменных на асимптотически большом промежутке времени $T(t_0, \mu) = [t_0, t_0 + 1/\mu], \quad \mu \to \quad 0.$ *Медленные переменные* характеризуются малым параметром μ при многозначном векторном поле скоростей, остальные переменные носят название *быстрых.* Утверждение о близости решений исходной и аппроксимирующей (усредненной) системы по медленным переменным в промежутке $T(t_0, \mu)$ носит название *принципа усреднения.*

Как отмечается, например, в [5], траектория роста экономической системы складывается из трех составляющих: тренда, колебательного движения и случайной компоненты. Исследование особенностей экономического развития показывает, что основную информацию о свойствах системы несут средние значения, составляющие тренд. Он является конкретным способом выражения основной тенденции развития системы.

Анализ специфических форм, в которых проявляется колебательное движение, говорит о том, что его возникновению способствуют следующие факторы: появление новых технологий; изменение спроса на определенные виды товаров; освоение новых основных фондов; различия, возникающие между отдельными сферами экономики в отношении производительности труда, расхода сырья, материалов, энергии, топлива; несоблюдение сроков выполнения плановых заданий по выпуску продукции, капитальному строительству; природные явления, имеющие форму помех, например, наводнения и т.д. Но тренд превалирует над другими признаками и направлениями, несущественными по отношению к росту всей системы. Таким образом, усредненная задача будет нести основную информацию о свойствах системы.

Применительно к дифференциальным включениям принцип усреднения формулируется в виде трех самостоятельных задач: аппроксимации снизу, аппроксимации сверху и взаимной аппроксимации [4]. Мы будем рассматривать задачу аппроксимации сверху. В ней требуется, чтобы любое решение исходной системы приближалось по медленным переменным некоторым решением аппроксимирующего дифференциального включения на асимптотически большом промежутке времени.

Задача построения аппроксимирующего сверху дифференциального включения может быть решена, вообще говоря, неоднозначно. Поэтому возникает проблема выбора "наилучшего" в определенном смысле аппроксимирующего дифференциального включения, что приводит к понятию точного сверху дифференциального включения.

Построение правой части аппроксимирующего дифференциального включения связано с вычислением усредненной опорной функции [4]

$$M\{c(F,\psi)\}(\chi_0) = \lim_{\Delta\to\infty} \frac{1}{\Delta} \int\limits_{\tau_0}^{\tau_0+\Delta} c(F(t,\chi_0),\psi)\,dt, \tag{1}$$

где предел существует равномерно по векторам $\psi \in \mathbb{R}^m$, $\|\psi\| = 1$, и начальным параметрам $(\tau_0,\chi_0) \in D$, где $D = \mathbb{R}_+ \times P$, область $P \subset \mathbb{R}_+{}^m$.

Для задач с быстрыми и медленными переменными в [6] рассмотрено построение точного сверху дифференциального включения для исходного включения с липшицевой правой частью и показано, что если предел (1) не существует, то усредненную опорную функцию можно определить следующим образом:

$$M\{c(F,\psi)\}(\chi_0) = \overline{\lim_{\Delta\to\infty}} \frac{1}{\Delta} \int\limits_{\tau_0}^{\tau_0+\Delta} c(F(t,\chi_0),\psi)\,dt,$$

где верхний предел существует равномерно по векторам $\psi \in \mathbb{R}^m$, $\|\psi\| = 1$, и $(\tau_0,\chi_0) \in D$.

В данной статье используется теорема о построении точного сверху дифференциального включения для задачи с медленными переменными и непрерывной правой частью [7].

1. Постановка задачи

Для исследования многопродуктовой макромодели, описывающей влияние основных фондов на скорость роста валового продукта, поставим задачу Коши для дифференциального включения (ДВ)

$$dx/dt \in \mu F(t,x), \quad x(t_0) = x_0, \tag{2}$$

где $x \in \mathbb{R}^m_+$ — валовой продукт, $F : D \to Kv(\mathbb{R}^m)$ — макроэкономическая производственная функция, которая определяет многозначное векторное поле допустимых скоростей и принимает непустые компактные выпуклые значения из евклидова пространства $\mathbb{R}^m$, $D = \mathbb{R}_+ \times P$, область $P \subset \mathbb{R}^m_+$. Малый параметр $\mu \in (0,a]$, $a > 0$, — коэффициент фондоотдачи. Начальные данные $(t_0,x_0) \in \mathbb{R}_+ \times P$. Множество всех решений типа Каратеодори задачи (2), определенных на отрезке $T(t_0,\mu) = [t_0, t_0+1/\mu]$, $\mu > 0$, будем обозначать символом $X(t_0,x_0,\mu)$.

Поясним смысл коэффициента μ в случае, когда функция F характеризует капитальные вложения. Коэффициент μ имеет размерность [1/время], поскольку размерность dx/dt равна [руб./время^2], а размерность элементов множества капитальных вложений F [руб./время]. Если параметр μ равен, например, $1/4$ [1/год], то вложения интенсивностью 4 [руб./год] обеспечивают за год прирост интенсивности валового выпуска на 1 [руб./год].

Напомним, что *валовой продукт* определяется как сумма валовых выпусков всех учитываемых производственных ячеек (предприятий сферы материального производства) за определенный период времени.

Класс средств производства (машины, оборудование, здания, сооружения и т.п.), вовлеченных в каждый производственный цикл и не теряющих в нем полностью вещественной формы и функциональных свойств, образует *основные производственные фонды.*

Возьмем функцию F из класса $\mathcal{N}(m, D)$, который составляют измеримые по $t \in \mathbb{R}_+$ отображения $F : D \to Kv(\mathbb{R}^m)$ такие, что

1) для некоторой постоянной $C = C(F) > 0$ имеет место неравенство $|F(t, x(t))| = \sup\{ \|f\|_m : \ f \in F(t, x) \} \leqslant C$ почти всюду по $t \in \mathbb{R}_+$ и при любом $x \in P$, то есть отображение F равномерно ограничено с константой C;
2) $\forall x_0, x \in P \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ такое, что если $\|x - x_0\| < \delta$, то выполняется неравенство $\alpha(F(t, x), F(t, x_0)) < \varepsilon$ сразу для всех $t \in \mathbb{R}_+$, то есть отображение F непрерывно по x равномерно относительно t в области P. Здесь $\alpha(A, B) = \max\{ \beta(A, B), \beta(B, A) \}$ — *отклонение по Хаусдорфу* двух непустых компактных множеств $A, B \subset K(\mathbb{R}^m)$, $\beta(A, B) = \inf\{ \varepsilon > 0 : \ A \subset [B]^\varepsilon \}$ — *полуотклонение* множеств A и B, где $[B]^\varepsilon$ — замкнутая ε−окрестность множества B.

Рассмотрим *задачу аппроксимации сверху* [4] дифференциального включения (2) в некоторой области $P_0 \subset P$ с помощью более простой задачи

$$d\xi/dt \in \mu F_0(\xi), \quad \xi(t_0) = x_0, \tag{3}$$

где $F_0 : P \to Kv(\mathbb{R}^m)$. Это означает, что $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \mu_0 > 0 \quad \forall \mu \in (0, \mu_0]$ выполняется условие: для любого решения $x(t)$ задачи (2) существует решение $\xi(t)$ задачи (3) такое, что

$$\|x(t) - \xi(t)\|_m < \varepsilon \quad \forall t \in T(t_0, \mu)$$

для любых начальных условий $(t_0, x_0) \in D_0$, $D_0 = \mathbb{R}_+ \times P_0$. Здесь $\| \cdot \|_m$ — евклидова норма в пространстве $\mathbb{R}^m$ со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Отображение F_0 берется из класса $\mathcal{L}_0(m,P)$, который образуют измеримые по t отображения $F_0 : P \to Kv(\mathbb{R}^m)$ такие, что

1) отображение F_0 равномерно ограничено с константой $C = C(F_0)$;
2) функция F_0 удовлетворяет условию Липшица с общей постоянной $l = l(F_0)$, то есть $\forall x_1, x_2 \in P$ выполняется $\alpha(F(x_1), F(x_2)) \leqslant \leqslant l\|x_1 - x_2\|$ почти для всех $t \in \mathbb{R}_+$.

Дифференциальное включение (3) будем называть *точным в задаче аппроксимации сверху дифференциального включения (2) в классе* $\mathcal{L}_0(m,P)$, если включение (3) аппроксимирует сверху задачу (2), при этом любая другая аппроксимирующая сверху исходное ДВ задача из класса $\mathcal{L}_0(m,P)$ аппроксимирует сверху также и ДВ (3). Дифференциальное включение (3) называется *точным в области* $P_0 \subset P$, если начальное условие x_0 в задачах (2), (3) можно взять произвольно в области P_0.

Напомним, что $c(A,\psi) = \sup\{\langle a,\psi\rangle : \; a \in A\}$ называется *опорной функцией* компактного множества $A \subset K(\mathbb{R}^m)$ в направлении вектора $\psi \in \mathbb{R}^m$.

Определим теперь *усредненную опорную функцию* [4]

$$M\{c(F,\psi)\}(\chi_0) = \overline{\lim_{\Delta\to\infty}} \frac{1}{\Delta} \int\limits_{\tau_0}^{\tau_0+\Delta} c(F(t,\chi_0),\psi)\, dt, \tag{4}$$

где верхний предел равномерен по векторам $(\tau_0,\chi_0) \in D$ и $\psi \in \mathbb{R}^m$, $\|\psi\| = 1$.

Таким образом, введена функция $M\{c(F,\psi)\}$, которая является опорной к множеству $F_0(\xi)$ и определяет правую часть дифференциального включения (3) в классе $\mathcal{L}_0(m,P)$.

Для построения точного сверху аппроксимирующего дифференциального включения будем использовать следующий результат.

Теорема 1 [7]. *Пусть отображение F из ДВ (2) принадлежит классу $\mathcal{N}(m,D)$, и выполняются условия :*
а) для некоторой непустой области $P_0 \subset P$ $\exists \rho_0 > 0$ такое, что для любого $x \in X(t_0,x_0,\mu)$ выполняется включение $[x(t)]^{\rho_0} \subset P$ $\forall t \in T(t_0,\mu)$;
б) равномерно по векторам $(\tau_0,\chi_0) \in D$ и $\psi \in \mathbb{R}^m$, $\|\psi\| = 1$, существует верхний предел (4);
в) отображение F_0, определяемое усредненной опорной функцией (4), принадлежит классу $\mathcal{L}_0(m,P)$.

Тогда ДВ (3) является точным сверху для задачи (2) в области $P_0 \subset P$ в классе отображений $\mathcal{L}_0(m,P)$.

Заметим, что если существует равномерно по векторам $(\tau_0,\chi_0) \in D$ и $\psi \in \mathbb{R}^m$, $\|\psi\| = 1$, предел (1) и выполнены все остальные условия теоремы 1, то по усредненной опорной функции $M\{c(F,\psi)\}$ также можно построить дифференциальное включение, которое будет точным в задаче аппроксимации сверху.

2. Многопродуктовые модели

В [2] многомерная модель задана как система одномерных моделей для обыкновенных дифференциальных уравнений. В терминах дифференциальных включений эту задачу можно сформулировать таким образом:

$$dx_i/dt \in \mu_i F_i(t, x_i), \quad x_i(t_0) = x_0^i, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

где $x_i \in \mathbb{R}_+$ — валовой продукт i-го вида, $F_i : D \to Kv(\mathbb{R})$ — i-я макроэкономическая производственная функция, $D = \mathbb{R}_+ \times P$, область $P \subset \mathbb{R}_+$, малый параметр $\mu_i \in (0, a]$, $a > 0$, — соответствующий коэффициент фондоотдачи.

Заметим, что система одномерных моделей может быть получена как частный случай модели (2), когда функция F представляет собой декартово произведение $F_1(t, x_1) \times F_2(t, x_2) \times \ldots \times F_m(t, x_m)$.

Экономическое развитие, вызванное ростом валовых выпусков в одной отрасли, особенно при интенсификации производства, связано с ростом валовых выпусков в других отраслях. Межотраслевые связи захватывают сопряженные области (например, самолетостроение стимулирует производство специальных сплавов, пластмасс, приборов и т.п.; атомная энергетика — машиностроение; интенсификация сельского хозяйства — машиностроение, производство удобрений, гербицидов, микробиологическую промышеленность и т.д.).

Для того чтобы отразить взаимосвязи между различными видами валовых выпусков, возьмем общую макроэкономическую функцию $F(t, x)$ и рассмотрим дифференциальное включение (2). В этом случае правая часть включения (2) может иметь сложную структуру, поэтому здесь целесообразно воспользоваться анализом аппроксимирующего дифференциального включения.

Представим $F(t, x)$ в виде алгебраической суммы:

$$F(t, x) = F_I(t, x) + F_B(t, x), \tag{5}$$

где $F_I : D \to Kv(\mathbb{R}^m)$, $F_B : D \to Kv(\mathbb{R}^m)$, $F_I(t, x) + F_B(t, x) = \{a + b : a \in F_I(t, x),\ b \in F_B(t, x)\}$. Здесь F_I — множество, характеризующее часть дополнительных валовых инвестиций, направленных на развитие производственных возможностей, F_B — множество, элементы которого определяют запас производственных фондов и базовые инвестиции, направленные на поддержание действующих основных фондов, их реконструкцию, смену технологий, освоение новых фондов и др.

Особенностями дополнительных инвестиций являются ограниченное время воздействия и тенденция к убыванию, поэтому естественно для отображения $F_I(t,x)$ потребовать выполнение следующего условия: равномерно по начальным параметрам $(\tau_0,\chi_0)\in D$ и векторам $\psi\in\mathbb{R}^m$, $\|\psi\|=1$, существует предел

$$\lim_{\Delta\to\infty}\frac{1}{\Delta}\int\limits_{\tau_0}^{\tau_0+\Delta} c(F_I(t,\chi_0),\psi)\,dt=0.$$

Заметим, что в экономической структуре весь *поток производственных инвестиций* воплощен в соответствующих инвестиционных благах — станках, оборудовании, зданиях, сооружениях, им должны соответствовать мощности инвестиционно-монтажной базы, машиностроения, производства конструкционных материалов и т.д. В результате деятельности этого комплекса обеспечивается функционирование производственных фондов — как вновь сооруженных и реконструированных, так и действующих. Проектирование, создание, ввод в эксплуатацию и поддержание определенных производственно-технических систем — заводов, комплексов предприятий — образуют единый инвестиционный процесс, охватывающий полный цикл данной производственно-технологической системы [2].

Эволюция F_B отражает изменение рыночной стоимости запаса основных фондов и базовых инвестиций. Она зависит от многих из перечисленных во введении факторов, таких как изменение конъюнктуры рынка, диспропорции в различных отраслях экономики, запаздывание в реализации инвестиций.

В соответствии с шумпетеровской концепцией технологических изменений [8] существуют периоды стабильной технологии, которые отделяются друг от друга переломными моментами (или переходными периодами). Существует методика статистического выделения технологических периодов. Они могут происходить не обязательно через равные промежутки времени, поэтому периодические функции F для описания свойств системы (как это было сделано в [3]) в этом случае не подходят. Они также могут быть такими, что условие (1) не выполняется. Поэтому здесь может оказаться полезным условие (4) теоремы о построении точного сверху дифференциального включения.

В сделанных выше предположениях зависимость скорости роста валового продукта от влияния технологических периодов описывается многозначным отображением F_B (5).

Теорема 2. *Пусть многозначное отображение* $F(t,x)=F_I(t,x)+$ $+F_B(t,x)$ *из ДВ (2), характеризующее основные фонды, принадлежит*

классу $\mathcal{N}(m, D)$, *и выполняются условия:*
а) для некоторой непустой области $P_0 \subset P$ *существует* $\rho_0 > 0$ *такое, что для любого* $x \in X(t_0, x_0, \mu)$ *имеет место включение* $[x(t)]^{\rho_0} \subset P$ $\forall t \in T(t_0, \mu)$;
б) равномерно по $(\tau_0, \chi_0) \in D$ *и* $\psi \in \mathbb{R}^m$, $\|\psi\| = 1$, *существует предел*

$$\lim_{\Delta\to\infty} \frac{1}{\Delta} \int_{\tau_0}^{\tau_0+\Delta} c(F_I(t, \chi_0), \psi)\, dt = 0; \tag{6}$$

в) равномерно по векторам $(\tau_0, \chi_0) \in D$ *и* $\psi \in \mathbb{R}^m$, $\|\psi\| = 1$, *существует верхний предел*

$$\overline{\lim_{\Delta\to\infty}} \frac{1}{\Delta} \int_{\tau_0}^{\tau_0+\Delta} c(F_B(t, \chi_0), \psi)\, dt = c(F_0(\chi_0), \psi). \tag{7}$$

Тогда дифференциальное включение

$$d\xi/dt \in \mu F_0(\xi), \quad \xi(t_0) = x_0 \tag{8}$$

является точным сверху для задачи (2) в области $P_0 \subset P$ *в классе отображений* $\mathcal{L}_0(m, P)$.

Доказательство. Согласно теореме 1, усредненная опорная функция

$$M\{c(F, \psi)\}(\chi_0) = \overline{\lim_{\Delta\to\infty}} \frac{1}{\Delta} \int_{\tau_0}^{\tau_0+\Delta} c(F(t, \chi_0), \psi)\, dt =$$

$$= \overline{\lim_{\Delta\to\infty}} \frac{1}{\Delta} \int_{\tau_0}^{\tau_0+\Delta} c(F_B(t, \chi_0), \psi)\, dt = c(F_0(\chi_0), \psi).$$

По свойствам опорных функций $c(F_0, \psi)$ определяет правую часть ДВ (8) в классе $\mathcal{L}_0(m, P)$. Поскольку все условия теоремы 1 выполнены, ДВ (8) является точным сверху для ДВ (2) в области $P_0 \subset P$ в классе отображений $\mathcal{L}_0(m, P)$.

Пример 1. Рассмотрим многопродуктовую макромодель

$$dx/dt \in \mu F(t, x), \quad x(0) = x_0, \tag{9}$$

где $x \in \mathbb{R}_+{}^m$, $F : D \to Kv(\mathbb{R}^m)$, $D = \mathbb{R}_+ \times P$, область $P \subset \mathbb{R}_+{}^m$, малый параметр $\mu \in (0, a]$, $a > 0$, — коэффициент фондоотдачи.

Пусть

$$F(t, x) = H(t, x) + \overline{B}(0, r(t)), \tag{10}$$

$H : D \to Kv(\mathbb{R}^m)$, $H \in \mathcal{N}(m, D)$, $\overline{B}(0, r(t))$ — замкнутый шар в пространстве $\mathbb{R}^m_+$ с центром в нуле радиуса $r(t)$, где $r : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$.

Основные производственные фонды структурированы, как было описано выше: $H(t,x)$ — часть валовых инвестиций F_I, $\overline{B}(0,r(t))$ — запас основных фондов и базовые инвестиции F_B.

Дополнительные вливания рассчитаны на определенный промежуток времени, следовательно, соответствующий поток инвестиций имеет тенденцию к убыванию, и выполняется условие *б* теоремы 2

$$\lim_{\Delta\to\infty}\frac{1}{\Delta}\int\limits_{\tau_0}^{\tau_0+\Delta}c(H(t,\chi_0),\psi)\,dt=0$$

равномерно по $(\tau_0,\chi_0)\in D$ и $\psi\in\mathbb{R}^m$, $\|\psi\|=1$.

В этом примере влияние технологических периодов на скорость роста валового продукта описывается многозначным отображением $\overline{B}(0,r(t))$ из представления (10) функции F.

Рассмотрим более общий случай, когда среднего от опорной функции отображения $\overline{B}(0,r(t))$ не существует (если предел (1) существует, также можно воспользоваться приведенными выше теоремами).

$$r(t)=\begin{cases} r_{max}, & t\in[\Delta_{2n},\Delta_{2n+1}],\\ r_{min}, & t\in(\Delta_{2n+1},\Delta_{2n+2}),\quad n=0,1,2,\ldots,\end{cases}$$

где $0\leqslant r_{min}<r_{max}$ и $r_{max}-r_{min}>1$.

Здесь

$$\frac{1}{\Delta_{2j}}\int\limits_0^{\Delta_{2j}}r(t)\,dt=p_j,\qquad \frac{1}{\Delta_{2j+1}}\int\limits_0^{\Delta_{2j+1}}r(t)\,dt=q_j,$$

$$p_j=r_{min}+1/(2j),\quad q_j=r_{max}-1/(2j+1),\quad j=1,2,3,\ldots$$

Тогда

$$\varliminf_{\Delta\to\infty}\frac{1}{\Delta}\int\limits_0^{\Delta}r(t)\,dt=r_{min},\qquad \varlimsup_{\Delta\to\infty}\frac{1}{\Delta}\int\limits_0^{\Delta}r(t)\,dt=r_{max},$$

и для функции $r(t)$ выполняются условия:

$$\Delta_{2n}=\frac{2n\{(2n-1)[r_{max}-r_{min}]-1\}}{(2n-1)}\Delta_{2n-1},\qquad n=1,2,3,\ldots,\tag{11}$$

$$\Delta_{2n+1}=\frac{(2n+1)\{2n[r_{max}-r_{min}]-1\}}{2n}\Delta_{2n},\qquad n=1,2,3,\ldots,\tag{12}$$

$$\Delta_0=0,\ \ \Delta_1=1.$$

Опорная функция из условия *в* теоремы 2 определяется равенством (7):

$$c(F_0,\psi)=\varlimsup_{\Delta\to\infty}\frac{1}{\Delta}\int\limits_{\tau_0}^{\tau_0+\Delta}c(F(t,\chi_0),\psi)\,dt=\lim_{j\to\infty}q_j\|\psi\|=r_{max}\|\psi\|$$

и позволяет однозначно восстановить правую часть ДВ

$$d\xi/dt \in \mu\overline{B}(0, r_{max}), \quad \xi(0) = x_0. \tag{13}$$

Поскольку отображения F и F_0 удовлетворяют условиям теоремы 2, то ДВ (13) является точным сверху для ДВ (9) $\mathcal{L}_0(m, P)$.

Приведем пример, когда опорная функция $c(F_0(\chi_0), \psi)$ из (7) зависит от ψ.

Пример 2. Рассмотрим однопродуктовую макромодель

$$dx/dt \in \mu F(t, x), \quad x(0) = x_0, \tag{14}$$

где $x \in \mathbb{R}_+$ — валовой продукт, $F: \ D \to Kv(\mathbb{R})$ — многозначная производственная функция основных фондов, $D = \mathbb{R}_+ \times P$, $P \subset \mathbb{R}_+$, малый параметр $\mu \in (0, a]$, $a > 0$, — коэффициент фондоотдачи.

Основные производственные фонды

$$F(t, x) = H(t, x) + \Theta(t), \tag{15}$$

где отображение $H : D \to Kv(\mathbb{R})$, $H \in \mathcal{N}(m, D)$, описывает дополнительные инвестиции F_I, а отображение $\Theta : \mathbb{R}_+ \to Kv(\mathbb{R})$ — запас основных фондов и базовые инвестиции F_B.

Пусть для $H(t, x)$ выполняется условие *б* теоремы 2

$$\lim_{\Delta\to\infty} \frac{1}{\Delta} \int\limits_{\tau_0}^{\tau_0+\Delta} c(H(t, \chi_0), \psi)\, dt = 0$$

равномерно по $(\tau_0, \chi_0) \in D$ и $\psi \in \mathbb{R}^m$, $\|\psi\| = 1$.

Здесь влияние технологических периодов на скорость роста валового продукта описывается функцией Θ из определения (15) отображения F.

Пусть функция Θ такова, что $\Theta(t) = [0, r(t)]$, где $r(t)$ — функция из примера 1.

Из условия *в* теоремы 2 опорная функция

$$c(F_0, \psi) = \begin{cases} r_{max}\psi, & \psi \geqslant 0, \\ 0, & \psi < 0 \end{cases}$$

определяет правую часть дифференциального включения

$$d\xi/dt \in \mu[0, r_{max}], \quad \xi(0) = x_0. \tag{16}$$

Поскольку отображения F и F_0 удовлетворяют условиям теоремы 2, то ДВ (16) является точным сверху для ДВ (14) в классе $\mathcal{L}_0(m, P)$.

Литература

[1] Булинский В.А. К вопросу математического прогнозирования результатов экономического соревнования // Экономико-математические модели. Сб. 4. М., 1972. С. 3–14.

[2] Кобринский Н.Е., Майминас Е.З., Смирнов А.Д. Экономическая кибернетика. М.: Экономика, 1982. 480 с.

[3] Плотников В.А., Плотников А.В., Витюк А.Н. Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы. Одесса: Астропринт, 1999. 355 с.

[4] Филатов О.П., Хапаев М.М. Усреднение систем дифференциальных включений. М.: Изд-во МГУ, 1998. 160 с.

[5] Мэнеску М. Экономическая кибернетика. М.: Экономика, 1986. 230 с.

[6] Филатов О.П. Точные дифференциальные включения в теории усреднения // Труды Средневолжского матем. об-ва. 1999. Т. 2. №1. С. 28–33.

[7] Зайчикова Н.А. Построение точного сверху дифференциального включения для задач с непрерывной правой частью // Вестник СамГУ. Самара: Изд-во СамГУ, 2002. № 2(24). С. 24–30.

[8] Баркалов Н.Б. Производственные функции в моделях экономического роста. М.: Изд-во МГУ, 1981. 128 с.

A MACROECONOMIC MODEL APPROXIMATION BY EXACT FROM ABOVE DIFFERENTIAL INCLUSION[3]

© 2003 N.A. Zaychikova[4]

In this paper the exact in the problem of upper appoximation differential inclusion construction for a macroeconomic model, describing basic production assets affect gross product growth, is considered. The one-grocery and multigrocery model examples are given.

Поступила в редакцию 20/IV/2003;
в окончательном варианте 27/VI/2003.

[3] Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. O.P. Filatov.

[4] Zaychikova Nadegda Anatolevna (zajna@yandex.ru, zana@ssu.samara.ru), Dept. of Partial Differential Equations, Samara State University, Samara, 443011, Russia.