

УСТОЙЧИВОСТЬ ЗАДАЧ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРЕДЕЛОВ МАКСИМАЛЬНЫХ СРЕДНИХ

© 2003 О.П. Филатов¹

Приводятся условия, которые позволяют приближенно вычислять пределы максимальных средних с помощью максимальных средних на отрезке для дифференциального включения с возмущенной правой частью.

1. Постановка задачи и определения

Для функции $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ рассмотрим предел максимального среднего

$$M_f(G) = \lim_{\Delta \rightarrow \infty} \sup_{\gamma} \frac{1}{\Delta} \int_0^{\Delta} f(\gamma(t)) dt, \quad (1)$$

где точная верхняя грань вычисляется по всем решениям в смысле Каратеодори дифференциального включения

$$\dot{\gamma} \in G(\gamma), \quad \gamma(0) = \gamma_0. \quad (2)$$

Здесь $G : \mathbb{R}^m \rightarrow P(\mathbb{R}^m)$ — отображение в множество всех непустых подмножеств из $\mathbb{R}^m$. Предполагается, что решения задачи (2) определены в промежутке $t \geq 0$ для любого начального вектора $\gamma_0 \in \mathbb{R}^m$ и любого отображения $G \in H_f$, где (H_f, ρ) — метрическое пространство с метрикой ρ ($B(G_0, r) = \{G \in H_f : \rho(G, G_0) < r\}$ — открытый шар с центром в точке $G_0 \in H_f$ радиуса $r > 0$). Множество всех таких решений задачи (2) обозначается $\Gamma(G, \gamma_0)$.

Например, пусть $H_f = K(\mathbb{R}^m)$ — множество всех непустых компактов из пространства $\mathbb{R}^m$ с евклидовой нормой. Тогда в качестве метрики ρ можно взять метрику Хаусдорфа α , при этом правая часть дифференциального включения (2) будет постоянным компактом из $\mathbb{R}^m$.

Как следует из постановки задачи, свойства функции f и дифференциального включения (2) должны быть такими, чтобы композиция $f \circ \gamma$ была локально интегрируемой (по Лебегу) для любого

¹ Филатов Олег Павлович (filt@ssu.samara.ru), кафедра уравнений математической физики Самарского государственного университета, 443011, Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

решения дифференциального включения (2) с произвольной правой частью $G \in H_f$. В таком случае будем говорить, что дифференциальное включение допустимо для данной функции f (обозначение H_f напоминает об этом).

Кроме того, считаем функцию f ограниченной: $|f(\gamma)| \leq f_0 \quad \forall \gamma \in \mathbb{R}^m$, где f_0 — постоянная.

Изучение пределов максимальных средних в первую очередь связано с приложениями к теории усреднения. При построении правых частей усредненных дифференциальных включений в системах с быстрыми и медленными переменными задача (2) играет роль порождающей задачи по быстрым переменным, при этом медленные переменные становятся постоянными параметрами. Если усредненная опорная функция, которая определяется как предел максимального среднего вдоль решений порождающей задачи, не зависит, причем равномерно, от начального вектора быстрых переменных, то можно корректно определить правую часть усредненного дифференциального включения.

Нас будет интересовать задача о вычислении приближенного значения $M_f(G_0)$ для некоторого отображения $G_0 \in H_f$ с помощью максимального среднего

$$M_f(G, \gamma_0, \Delta) = \sup_{\gamma \in \Gamma(G, \gamma_0)} \frac{1}{\Delta} \int_0^\Delta f(\gamma(t)) dt$$

на отрезке $[0, \Delta]$ при достаточно большом $\Delta > 0$, при этом отображение $G \in H_f$ может отличаться от данного G_0 . Это связано с тем, что в приложениях нередко приходится аппроксимировать отображение G_0 и тем самым вносить погрешность вычисления предела максимального среднего. Важно, чтобы соответствующие приближения были близки к точному значению, если отображения G и G_0 достаточно мало отличаются в соответствующей метрике. С этой точки зрения естественно следующее определение.

Определение 1. Задача (1), (2) для отображения $G_0 \in H_f$ устойчива, если предел максимального среднего $M_f(G_0)$ существует, не зависит от начального вектора $\gamma_0 \in \mathbb{R}^m$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $\delta > 0$ и $\Delta_0 > 0$ такие, что $\forall G \in B(G_0, \delta) \quad \forall \Delta \geq \Delta_0$ и любого начального вектора $\gamma_0 \in \mathbb{R}^m$ выполняется неравенство

$$|M_f(G_0) - M_f(G, \gamma_0, \Delta)| \leq \varepsilon. \quad (3)$$

Следующий пример показывает, что при сколь угодно малом возмущении правой части дифференциального включения G_0 предел максимального среднего существует, но оказывается зависимым от начальных условий.

Рассмотрим систему

$$\dot{\gamma}_1 \in [1, 2], \quad \dot{\gamma}_2 = 0, \quad \dot{\gamma}_3 = 1$$

с начальными условиями $\gamma_j(0) = \gamma_{j,0}$, $j = 1, 2, 3$, и функцию

$$f(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \sin \gamma_1 + \sin \gamma_2 \sin \gamma_3.$$

Здесь компакт

$$G_0 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x_1 \leq 2, x_2 = 0, x_3 = 1\}$$

из касательного пространства $\mathbb{R}^3$ является отрезком, для которого предел максимального среднего

$$M_f(G_0) = M_{\sin}([1, 2])$$

не зависит от начальных данных [1] и определяется отношением $2/1 = 2$.

Если теперь в качестве множества допустимых скоростей дифференциального включения взять прямоугольник

$$G(\delta) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x_1 \leq 2, x_2 = 0, 1 - \delta \leq \dot{x}_3 \leq 1 + \delta\},$$

где $0 < \delta < 1$, то предел максимального среднего

$$M_f(G(\delta), \gamma_{2,0}) = |\sin \gamma_{2,0}| M_{\sin}([1 - \delta, 1 + \delta]) + M_{\sin}([1, 2])$$

существует и зависит от начального значения $\gamma_{2,0}$, при этом равномерно по начальным условиям имеет место предельное равенство

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} M_f(G(\delta), \gamma_{2,0}) = M_f(G_0).$$

Определение 2. Предел максимального среднего для данного отображения $G_0 \in H_f$ существует и равномерно не зависит от начальных условий, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\Delta_0(\varepsilon)$ такое, что при $\Delta \geq \Delta_0(\varepsilon)$ и любом $\gamma_0 \in \mathbb{R}^m$ выполняется неравенство

$$|M_f(G_0) - M_f(G_0, \gamma_0, \Delta)| \leq \varepsilon. \quad (4)$$

Далее нам потребуется свойство равномерной по начальному вектору $\gamma_0 \in \mathbb{R}^m$ непрерывной зависимости среднего

$$I_f(G, \gamma_0, \Delta, \gamma) = \frac{1}{\Delta} \int_0^\Delta f(\gamma(t)) dt$$

от правой части $G \in H_f$ дифференциального включения (2) в точке $G_0 \in H_f$, которое мы сформулируем в следующем виде.

Определение 3. Среднее $I_f(G, \gamma_0, \Delta, \gamma)$ равномерно по начальным условиям непрерывно зависит от G в точке $G_0 \in H_f$, если для любых $\varepsilon > 0$ и $\Delta > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon, \Delta) > 0$ такое, что для любого

отображения $G \in B(G_0, \delta) \forall \gamma_0 \in \mathbb{R}^m$ и любого решения $\gamma_{G_0} \in \Gamma(G_0, \gamma_0)$ существует решение $\gamma_G \in \Gamma(G, \gamma_0)$, для которых имеет место оценка

$$|I_f(G_0, \gamma_0, \Delta, \gamma_{G_0}) - I_f(G, \gamma_0, \Delta, \gamma_G)| \leq \varepsilon. \quad (5)$$

Наоборот, $\forall \gamma_G \in \Gamma(G, \gamma_0) \exists \gamma_{G_0} \in \Gamma(G_0, \gamma_0)$ с той же оценкой (5).

Например, если функция f будет равномерно непрерывной, а решения дифференциального включения равномерно по начальным условиям непрерывно зависят от его правой части [2], то среднее $I_f(G, \gamma_0, \Delta, \gamma)$ также равномерно по $\gamma_0 \in \mathbb{R}^m$ непрерывно зависит от правой части дифференциального включения.

В [3] вопросы устойчивости (корректности) вычисления пределов максимальных средних изучались для почти периодических функций, когда соответствующие пределы существуют равномерно по начальным условиям для невырожденных дифференциальных включений [4] (если правая часть $G \subset \mathbb{R}^m$ дифференциального включения является компактом, то невырожденность означает, что этот компакт не принадлежит подпространству размерности $m - 1$).

В этом случае определение устойчивой задачи удобно давать в терминах непрерывной зависимости пределов максимальных средних от правой части дифференциального включения [3, определение 1.4, с. 40].

Заметим, что для приведенного выше примера компакт G_0 оказывается вырожденным. Следовательно, приведенное в данной статье определение устойчивости задачи позволяет охватить и вырожденные случаи, для которых пределы максимальных средних при возмущении дифференциального включения могут зависеть от начальных условий или не существовать.

2. Основной результат и существенность условий теоремы

Теорема 1. Пусть функция $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ограничена, дифференциальное включение (2) является допустимым для функции f , а среднее $I_f(G, \gamma_0, \Delta, \gamma)$ равномерно по начальным условиям непрерывно зависит от G в точке $G_0 \in H_f$.

Тогда задача (1), (2) для отображения G_0 устойчива, если и только если предел максимального среднего $M_f(G_0)$ существует и равномерно не зависит от начальных условий.

В частности, из этой теоремы следует устойчивость задачи вычисления предела максимального среднего для почти периодической функции $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ и невырожденного дифференциального включения, так как существование равномерного по начальным данным

предела максимального среднего $M_f(G_0)$ в этом случае вытекает из [4, теорема 1] (постоянная правая часть), [3, теорема 1.5].

Следующий критерий является следствием теоремы 1 и теоремы 1.1 из [3, с. 16]. Для его формулировки воспользуемся понятием равномерной сверху асимптотической независимости среднего $I_f(G, \gamma_0, \Delta, \gamma)$ от начальных условий, которая означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\Delta_0 > 0$ такое, что для произвольных начальных векторов $\gamma_{01}, \gamma_{02} \in \mathbb{R}^m$ и любого решения $\gamma_1 \in \Gamma(\gamma_{01}, G)$ существует решение $\gamma_2 \in \Gamma(\gamma_{02}, G)$, для которого

$$I_f(G, \gamma_{01}, \Delta, \gamma_1) \leq I_f(G, \gamma_{02}, \Delta, \gamma_2) + \varepsilon,$$

если только $\Delta \geq \Delta_0$.

Теорема 2. В условиях теоремы 1 задача (1), (2) для отображения G_0 устойчива, если и только если среднее $I_f(G_0, \gamma_0, \Delta, \gamma)$ равномерно сверху асимптотически не зависит от начальных условий.

Действительно, на основании [3, теорема 1.1, с. 16] делаем вывод, что условие равномерной сверху асимптотической независимости среднего от начального вектора эквивалентно существованию предела максимального среднего $M_f(G_0)$ для отображения $G_0 \in H_f$ и его равномерной независимости от начальных условий. Поэтому остается воспользоваться теоремой 1.

Теорема 2 удобна для практической проверки корректности задачи (1), (2) для данного отображения G_0 .

Если предел максимального среднего $M_f(G_0, \gamma_0)$ зависит также и от начального вектора $\gamma_0 \in \mathbb{R}^m$, даже при условии равномерной по $\gamma_0 \in \mathbb{R}^m$ сходимости, то соответствующее обобщение приведенной теоремы будет ошибочным (при этом в определении корректной задачи, естественно, нужно заменить $M_f(G_0)$ на $M_f(G_0, \gamma_0)$). Покажем это на примере в одномерном случае. Рассмотрим задачу $\dot{\gamma} = 0$, $\gamma(0) = \gamma_0$, и функцию $f(\gamma) = \sin(\gamma)$. Здесь множество $G_0 = \{0\}$ является одноточечным. Поэтому $M_f(G_0, 0) = 0$ для начального значения $\gamma_0 = 0$. Если теперь для произвольного $\delta > 0$ вычислить предел максимального среднего $M_f(G(\delta))$ для дифференциального включения $\dot{\gamma} = [\delta, 2\delta]$, $\gamma(0) = \gamma_0$, с правой частью $G(\delta) = [\delta, 2\delta]$, то получим значение $M_f(G(\delta)) = M_{\sin}([\delta, 2\delta]) > 0$, которое зависит только от отношения $2\delta/\delta = 2$, как это следует из [1, теорема 1, равенство (6)]. Остается заметить, что расстояние по Хаусдорфу $\alpha(G, G(\delta)) = 2\delta$ можно сделать сколь угодно малым за счет δ .

Покажем теперь, что в приведенной теореме нельзя отбросить и условие равномерности существования предела максимального среднего по начальным условиям, даже если понимать *под корректной*

задачей такую, в которой неравенство (3) выполняется только при $\Delta \geq \Delta_0(\gamma_0, \varepsilon)$. Для этого рассмотрим на плоскости систему

$$\dot{\gamma}_1 = 0, \quad \dot{\gamma}_2 = 1, \quad \gamma_1(0) = \gamma_{1,0}, \quad \gamma_2(0) = \gamma_{2,0}, \quad (6)$$

для которой множество $G_0 = \{(0, 1)\}$ является одноточечным, а функция

$$f(\gamma_1, \gamma_2) = \sin(\gamma_1)g(\gamma_2), \quad (7)$$

где отображение $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ определим так, чтобы его среднее

$$M_g(\{1\}) = \lim_{\Delta \rightarrow \infty} M_g(\{1\}, t_0, \Delta), \quad M_g(\{1\}, t_0, \Delta) = \frac{1}{\Delta} \int_0^\Delta g(t_0 + t) dt,$$

было равно 0, причем не равномерно по $t_0 \in \mathbb{R}$.

При $t < 0$ считаем $g(t) = 0$, а для задания функции g при $t \geq 0$ рассмотрим последовательность $\Delta_n = (n+3)n$, $n = 0, 1, \dots$, для которой $\Delta_{n+1} - \Delta_n = 2(n+2)$. На отрезке $[\Delta_n, \Delta_{n+1}]$ считаем функцию g нечетной относительно середины отрезка Δ_n^c , при этом ее график в промежутке $[\Delta_n, \Delta_n^c]$ является равнобокой трапецией, высота которой равна 1, а углы при основании равны $\pi/4$. Таким образом, площадь трапеции $\mu_n = n+1$, поэтому при $\Delta_n < \Delta < \Delta_{n+1}$ справедлива оценка

$$|M_g(\{1\}, 0, \Delta)| \leq \mu_n / \Delta_n = (n+1)/(n^2 + 3n) \leq 1/(n+1),$$

а значит $M_g(\{1\}) = 0$, так как $M_g(\{1\}, 0, \Delta_n) = 0$ при любом $n = 1, 2, \dots$. Следовательно, предел максимального среднего (который равен среднему значению функции)

$$M_f(G_0) = \sin(\gamma_{1,0}) \lim_{\Delta \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta} \int_0^\Delta g(\gamma_{2,0} + t) dt = \sin(\gamma_{1,0}) M_g(\{1\}) = 0$$

не зависит от начальных данных, но не является равномерным по $\gamma_{2,0} \in \mathbb{R}$.

Заметим также, что среднее значение модуля функции g равно 1:

$$M_{|g|}(\{1\}) = 1, \quad (8)$$

и это значение сохранится, если на любом из отрезков $[\Delta_n, \Delta_{n+1}]$ изменить функцию в пределах от -1 до 1 на некотором множестве, мера которого ограничена сверху общей для любого целого n постоянной. Это простое замечание будет использовано ниже.

Возьмем теперь произвольное число $\delta > 0$ и рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{\gamma}_1 \in [0, \delta], \quad \dot{\gamma}_2 = 1, \quad \gamma_1(0) = \gamma_{1,0}, \quad \gamma_2(0) = \gamma_{2,0} \quad (9)$$

с правой частью $G = G(\delta) = [0, \delta] \times \{1\}$. Покажем, что предел максимального среднего $M_f(G) = 1$.

Для доказательства заметим, что $M_f(G) \leq 1$, так как $|f| \leq 1$. Остается построить решение $\gamma_G = (\gamma_{1,G}, \gamma_{2,G})$ задачи (9), на котором среднее значение функции f равно 1.

Так как $\gamma_{2,G}(t) = \gamma_{2,0} + t$, то требуется определить только первую координату решения. Сначала заметим, что, стартуя из произвольной начальной точки $a_1 \in \mathbb{R}$ в момент времени $t = \tau_1$, решение $a_1 + (t - \tau_1)\delta$ дифференциального включения

$$\dot{\gamma}_1 \in [0, \delta] \quad (10)$$

в некоторый ближайший к τ_1 момент времени $t = t^+(\tau_1, a_1) \geq \tau_1$ совпадет с числом $\pi/2 + 2\pi k$, где k — целое, при этом

$$0 \leq t^+(\tau_1, a_1) - \tau_1 < 2\pi/\delta.$$

Аналогичный вывод можно сделать о совпадении указанного решения в момент времени $t = t^-(\tau_1, a_1) \geq \tau_1$ с числом $-\pi/2 + 2\pi l$, где l — целое.

Пусть

$$t_n = \Delta_n - \gamma_{2,0}, \quad t_n^c = \Delta_n^c - \gamma_{2,0}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Выберем теперь минимальное из целых чисел n_1 , для которого $t_{n_1} \geq 0$ и $n_1 + 1 \geq 2\pi/\delta$. Так как длина каждого из отрезков $[t_n + 1, t_n^c - 1]$, $[t_n^c + 1, t_{n+1} - 1]$, на которых функция $g(\gamma_{2,G}(t))$ принимает значения соответственно 1 и -1 , равна n , то при $n \geq n_1$ будут выполняться неравенства

$$t_n \leq t^+(a, t_n) \leq t_n^c - 1, \quad t_n^c - 1 \leq t^-(a, t_n^c - 1) \leq t_{n+1} - 1$$

для произвольного начального значения $a = \gamma_1(t_n)$ или $a = \gamma_1(t_n^c - 1)$ решения дифференциального включения (10), стартующего из соответствующей точки с постоянной скоростью δ .

На основании этих замечаний решение $\gamma_{1,G}(t)$ дифференциального включения (10) будем определять следующим образом.

Положим $\tau_1 = t_{n_1}$ и на отрезке $[0, \tau_1]$ примем

$$\gamma_{1,G}(t) = \gamma_{1,0}, \quad t \in [0, \tau_1].$$

Далее последовательно продолжаем функцию $\gamma_{1,G}$ на промежутки

$$(\tau_1, \tau_2], \quad (\tau_2, \tau_3], \quad (\tau_3, \tau_4], \quad (\tau_4, t_{n+1}]$$

так, чтобы на втором и последнем из них она совпадала соответственно с постоянными $\pi/2 + 2\pi k$ и $-\pi/2 + 2\pi l$, где k, l — целые, а на первом и третьем промежутках ее скорость изменения равнялась δ .

Проведем данное рассуждение более подробно. Прежде всего, возьмем $\tau_2 = t^+(\tau_1, \gamma_{1,G}(\tau_1))$, тогда

$$\gamma_{1,G}(t) = \gamma_{1,G}(\tau_1) + (t - \tau_1)\delta, \quad t \in (\tau_1, \tau_2].$$

Затем положим $\tau_3 = t_n^c - 1$ и

$$\gamma_{1,G}(t) = \gamma_{1,G}(\tau_2), \quad t \in (\tau_2, \tau_3].$$

Теперь определим $\tau_4 = t^-(\tau_3, \gamma_{1,G}(\tau_3))$ и продолжим функцию $\gamma_{1,G}$ на следующий промежуток:

$$\gamma_{1,G}(t) = \gamma_{1,G}(\tau_3) + (t - \tau_3)\delta, \quad t \in (\tau_3, \tau_4].$$

Наконец, примем

$$\gamma_{1,G}(t) = \gamma_{1,G}(\tau_4), \quad t \in (\tau_4, t_{n+1}].$$

Таким образом, решение $\gamma_{1,G}(t)$ определено на отрезке $[0, t_{n+1}]$, где $n = n_1$. Затем принимаем $\tau_1 = t_{n+1}$ и указанным способом продолжаем решение дифференциального включения (10) на следующий промежуток $(t_{n+1}, t_{n+2}]$. По индукции решение $\gamma_{1,G}$ определяется на полуоси $\mathbb{R}_+$. Мера (Лебега) множества

$$A_j = \{t \in [t_j, t_{j+1}] : |\sin(\gamma_{1,G}(t))g(\gamma_{2,G}(t))| \neq 1\}$$

при любом целом $j \geq n_1$ по построению не превосходит величины

$$\max\{1, 2\pi/\delta\} + \max\{2, 2\pi/\delta\} + 1.$$

Поскольку

$$f(\gamma_G(t)) = \sin(\gamma_{1,G}(t))g(\gamma_{2,G}(t)) = |g(\gamma_{2,G}(t))| = 1, \quad t \in [\Delta_{n_1}, \infty) \setminus \bigcup_{j=n_1}^{\infty} A_j,$$

то на основании (8) получим требуемый результат

$$M_f(G) = M_{|g|}(\{1\}) = 1.$$

Так как расстояние по Хаусдорфу между множествами $G_0 = \{(0, 1)\}$ и $G(\delta) = [0, \delta] \times \{1\}$ равно δ , то задача (6), (7) не является устойчивой даже в ослабленной форме, когда неравенство (3) выполняется при $\Delta \geq \Delta_0(\gamma_0, \varepsilon) \in \mathbb{R}^m$.

3. Доказательство теоремы 1

Если задача (1), (2) устойчива, то из соответствующего определения при $G = G_0$ следует, что предел максимального среднего $M_f(G_0)$ равномерно не зависит от начального вектора $\gamma_0 \in \mathbb{R}^m$.

Допустим теперь, что указанный предел существует равномерно по начальным условиям. Тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ существует $\Delta_0 = \Delta_0(\varepsilon)$ такое, что при $\Delta \geq \Delta_0$ выполняется неравенство (4).

На основании непрерывной зависимости среднего от правой части дифференциального включения существует $\delta = \delta(\varepsilon, \Delta_0) > 0$ такое, что для произвольного отображения $G \in B(G_0, \delta)$ выполняется неравенство (5). Следовательно,

$$|M_f(G_0, \gamma_0, \Delta_0) - M_f(G, \gamma_0, \Delta_0)| \leq \varepsilon. \quad (11)$$

Из (4), (11) получим

$$|M_f(G_0) - M_f(G, \gamma_0, \Delta_0)| \leq 2\varepsilon \quad (12)$$

для любого начального вектора $\gamma_0 \in \mathbb{R}^m$. Более того, для некоторого решения $\gamma_{G,1}$ дифференциального включения (2), определенного на отрезке $[0, \Delta_0]$, выполняются оценки

$$0 \leq M_f(G, \gamma_0, \Delta_0) - I_f(G, \gamma_0, \Delta_0, \gamma_{G,1}) \leq \varepsilon. \quad (13)$$

Заменяем начальный вектор γ_0 в (12) на вектор $\gamma_1 = \gamma_{G,1}(\Delta_0)$. В силу равномерности существования предела максимального среднего по начальным условиям и непрерывной зависимости среднего от правой части дифференциального включения равномерно по $\gamma_0 \in \mathbb{R}^m$, неравенство (12) при такой замене останется справедливым, при этом на отрезке $[0, \Delta_0]$ можно определить решение $\gamma_{G,2}$ дифференциального включения (2), для которого выполняется неравенство, аналогичное (13),

$$0 \leq M_f(G, \gamma_1, \Delta_0) - I_f(G, \gamma_1, \Delta_0, \gamma_{G,2}) \leq \varepsilon.$$

По индукции эту процедуру построения решений можно осуществить для любого $k = 1, 2, \dots$, при этом для построенного решения $\gamma_{G,k}$ имеют место неравенства

$$0 \leq M_f(G, \gamma_{k-1}, \Delta_0) - I_f(G, \gamma_{k-1}, \Delta_0, \gamma_{G,k}) \leq \varepsilon \quad (14)$$

$$\text{и} \quad |M_f(G_0) - M_f(G, \gamma_{k-1}, \Delta_0)| \leq 2\varepsilon, \quad k = 1, 2, \dots \quad (15)$$

Кроме того, по построению, $\gamma_{G,k}(0) = \gamma_{G,k-1}(\Delta_0)$ при любом $k = 1, 2, \dots$

Положим $t_k = k\Delta_0$, $k = 0, 1, \dots$, и определим решение $\gamma_G \in \Gamma(G, \gamma_0)$ при любом $t \geq 0$, полагая $\gamma_G(t) = \gamma_{G,k}(t - t_{k-1})$, если $t \in [t_{k-1}, t_k]$, $k = 1, 2, \dots$. Такое определение корректно, так как дифференциальное включение (2) является автономным. Для решения γ_G задачи (2) на основании (14) имеем

$$\begin{aligned} & M_f(G, \gamma_0, t_k) - I_f(G, \gamma_0, t_k, \gamma_G) = \\ &= \sup_{\gamma \in \Gamma(G, \gamma_0)} \frac{1}{k\Delta_0} \sum_{j=0}^{k-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(\gamma(t)) dt - \frac{1}{k\Delta_0} \sum_{j=0}^{k-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(\gamma_G(t)) dt \leq \\ &\leq \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{k} \left(\sup_{\gamma \in \Gamma(G, \gamma_j)} \frac{1}{\Delta_0} \int_0^{\Delta_0} f(\gamma(t)) dt - \frac{1}{\Delta_0} \int_0^{\Delta_0} f(\gamma_{G,j+1}(t)) dt \right) = \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{k} (M_f(G, \gamma_j, \Delta_0) - I_f(G, \gamma_j, \Delta_0, \gamma_{G,j+1})) \leq \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, при любом $k = 1, 2, \dots$ выполняются соотношения

$$0 \leq M_f(G, \gamma_0, t_k) - I_f(G, \gamma_0, t_k, \gamma_G) \leq \varepsilon. \quad (16)$$

На основании (15), (16) для разности

$$M_f(G, \gamma_0, t_k) - M_f(G_0) =$$

$$= (M_f(G, \gamma_0, t_k) - I_f(G, \gamma_0, t_k, \gamma_G)) + (I_f(G, \gamma_0, t_k, \gamma_G) - M_f(G_0))$$

получим оценку сверху

$$\begin{aligned} M_f(G, \gamma_0, t_k) - M_f(G_0) &\leq \varepsilon + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{k} (M_f(G, \gamma_j, \Delta_0) - M_f(G_0)) \leq \\ &\leq \varepsilon + \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} 2\varepsilon = 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Для получения оценки снизу заметим, что из (14), (15) следует

$$I_f(G, \gamma_{k-1}, \Delta_0, \gamma_{G,k}) - M_f(G_0) \geq -3\varepsilon,$$

поэтому

$$\begin{aligned} I_f(G, \gamma_0, t_k, \gamma_G) - M_f(G_0) &= \frac{1}{k\Delta_0} \sum_{j=0}^{k-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(\gamma_G(t)) dt - M_f(G_0) = \\ &= \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} (I_f(G, \gamma_j, \Delta_0, \gamma_{G,j+1}) - M_f(G_0)) \geq \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} (-3\varepsilon) = -3\varepsilon. \end{aligned}$$

Следовательно, для указанной разности получим оценку снизу

$$M_f(G, \gamma_0, t_k) - M_f(G_0) \geq 0 - 3\varepsilon = -3\varepsilon.$$

Таким образом,

$$|M_f(G, \gamma_0, t_k) - M_f(G_0)| \leq 3\varepsilon \quad (17)$$

при любом $k = 1, 2, \dots$ и произвольном начальном векторе $\gamma_0 \in \mathbb{R}^m$.

Поскольку функция f является ограниченной, то при

$$t \in [t_k, t_{k+1}], \quad k \geq 1,$$

справедливо равенство

$$\begin{aligned} M_f(G, \gamma_0, t) &= \frac{t_k}{t} \sup_{\gamma \in \Gamma(G, \gamma_0)} \left(\frac{1}{t_k} \int_0^{t_k} f(\gamma(\tau)) d\tau + \frac{1}{t_k} \int_{t_k}^t f(\gamma(\tau)) d\tau \right) = \\ &= \frac{t_k}{t} \left(\sup_{\gamma \in \Gamma(G, \gamma_k)} \frac{1}{t_k} \int_0^{t_k} f(\gamma(\tau)) d\tau + \mu(t, t_k) \right), \end{aligned}$$

где функция μ удовлетворяет неравенству

$$|\mu(t, t_k)| \leq \left| \frac{1}{t_k} \int_{t_k}^t f(\gamma(\tau)) d\tau \right| \leq \frac{\Delta_0 f_0}{k\Delta_0} = \frac{f_0}{k}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} &|M_f(G, \gamma_0, t) - M_f(G, \gamma_0, t_k)| = \\ &= \left| \frac{t_k}{t} \sup \frac{1}{t_k} \int_0^{t_k} f(\gamma(\tau)) d\tau + \frac{t_k}{t} \mu(t, t_k) - \sup \frac{1}{t_k} \int_0^{t_k} f(\gamma(\tau)) d\tau \right| \leq \frac{2f_0}{k}, \end{aligned}$$

где $\sup$ вычисляется по всем $\gamma \in \Gamma(G, \gamma_k)$. Отсюда и из (17) получим неравенство

$$|M_f(G_0) - M_f(G, \gamma_0, \Delta)| \leq 3\varepsilon + 2f_0/k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

которое выполняется для любого начального вектора $\gamma_0 \in \mathbb{R}^m$ и любого отображения $G \in B(G_0, \delta)$ при условии, что $\Delta \geq \Delta_0(\varepsilon)$.

Выберем целое k_0 настолько большим, чтобы выполнялось неравенство $2f_0/k_0 \leq \varepsilon$ и примем $\Delta_1 = k_0\Delta_0$. Тогда при $\Delta \geq \Delta_1$ получим требуемую оценку

$$|M_f(G_0) - M_f(G, \gamma_0, \Delta)| \leq 4\varepsilon.$$

Теорема 1 доказана.

Литература

- [1] Филатов О.П. Вычисление пределов максимальных средних // Матем. заметки. 1996. Т. 59, № 5. С. 759–767.
- [2] Благодатских В.И., Филиппов А.Ф. Дифференциальные включения и оптимальное управление // Труды МИАН. 1985. Т. 169. С. 194–252.
- [3] Филатов О.П. Пределы максимальных средних. Самара: Изд-во СамГУ, 2000.
- [4] Филатов О.П. Существование пределов максимальных средних // Матем. заметки. 2000. Т. 67. № 3. С. 433–440.

THE STABILITY OF PROBLEMS OF CALCULATING LIMITES OF MAXIMUM MEANS

© 2003 O.P. Filatov²

The conditions of approximately calculating limits of maximum means by the aid of maximum means on segment for differential inclusions with the perturbed right-hand side are obtained.

Поступила в редакцию 24/IV/2003.

² Filatov Oleg Pavlovich, Dept. of Partial Differential Equations, Samara State University, Samara, 443011, Russia.