

ВЫЧИСЛЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ ВИНЕРОВСКИХ ПРОЦЕССОВ¹

© 2003 Ю.В. Солодянников, Д.П. Кожан²

Рассмотрены функционалы свертки от стандартного винеровского процесса. Получены аналитические выражения для характеристических функций (х.ф.) и плотностей распределений рассматриваемых случайных функционалов от винеровских процессов и броуновских мостов. Приведены результаты численного расчета функций распределений и моментов функционалов свертки.

Предварительные сведения

Функционалы от винеровских процессов и броуновских мостов возникают во многих технических и статистических приложениях, в частности, при оценке свертки $\int_{-\infty}^{\infty} F(t)dF(x-t)$ сигнала $F(t)$ в присутствии броуновского шума, а также при вычислении предельного распределения некоторой непараметрической статистики в духе Колмогорова—Смирнова—Мизеса.

Определение 1. Стандартным винеровским процессом, выходящим из нуля, называется случайный процесс w_t , $0 \leq t < \infty$, обладающий свойствами:

- 1) $w_0 = 0$;
- 2) при любом выборе $0 < t_1 < \dots < t_n$ величины $(w_{t_1} - w_{t_0}), \dots, (w_{t_n} - w_{t_{n-1}})$ независимы;

¹ Представлена доктором физико-математических наук профессором С.В. Асташкиным.

² Солодянников Юрий Васильевич (samdi@samara.ru), Кожан Дмитрий Петрович (kd@ssu.samara.ru), кафедра функционального анализа и теории функций Самарского государственного университета, 443011, Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

3) случайная величина $w_t - w_s$, $0 \leq s \leq t$, имеет нормальное распределение с параметрами $(0, t - s)$.

Определение 2. Случайный процесс $\xi(t) = w(t) - tw(1)$, который можно интерпретировать как винеровский процесс, обращающийся в нуль при $t = 1$, называют броуновским мостом (по той причине, что у него закреплены оба конца).

Приняв обозначение $\varphi_X(t)$ — х. ф. случайной величины (с. в.) X , сформулируем основные результаты вычислений характеристических функций свертков гауссовских процессов, которые получены в работах [2–4, 6].

$$1. \quad X = w * w + L(w) = \int_0^1 w(1-t)w(t)dt + \int_0^1 g(t)dw(t),$$

$$\varphi_X(t) = \sqrt{\frac{1+i}{\operatorname{ch} \sqrt{t} + i \cos \sqrt{t}}} \exp \left(-\frac{t^2}{2} \int_0^1 g^2(x)dx - \frac{it^3}{4} F(t) \right),$$

где $F(t) =$

$$= \frac{(1-i)(\sin \sqrt{t} - \operatorname{sh} \sqrt{t})P^2 + 4PQ + (1+i)(\sin \sqrt{t} + \operatorname{sh} \sqrt{t})Q^2}{4\sqrt{t}(\operatorname{ch} \sqrt{t} + i \cos \sqrt{t})} +$$

$$+ \frac{1}{(1+i)\sqrt{t}} \int_{-1/2}^{1/2} G^+(u) e^{(1+i)u\sqrt{t}} du \int_{-u}^u G^+(v) e^{(1+i)v\sqrt{t}} dv +$$

$$+ \frac{1}{(1-i)\sqrt{t}} \int_{-1/2}^{1/2} G^-(u) e^{(1-i)u\sqrt{t}} du \int_{-u}^u G^-(v) e^{(1-i)v\sqrt{t}} dv,$$

$$P = \int_{-1/2}^{1/2} G^+(u) e^{(1+i)u\sqrt{t}} du, \quad Q = i \int_{-1/2}^{1/2} G^-(u) e^{(1-i)u\sqrt{t}} du,$$

$$G^+(u) = g\left(\frac{1}{2} - u\right) + g\left(\frac{1}{2} + u\right), \quad G^-(u) = g\left(\frac{1}{2} - u\right) - g\left(\frac{1}{2} + u\right),$$

$g(t)$ — неслучайная функция из пространства L_2 .

$$2. \quad X = w * w + qw(1) = \int_0^1 w(1-t)w(t)dt + qw(1),$$

$$\varphi(t) = \sqrt{\frac{1+i}{\operatorname{ch} \sqrt{t} + i \cos \sqrt{t}}} \exp \left[-\frac{iq^2 t \sqrt{t} (\operatorname{sh} \sqrt{t} + i \sin \sqrt{t})}{2(\operatorname{ch} \sqrt{t} + i \cos \sqrt{t})} \right],$$

где q — действительная константа.

$$3. \quad X = \xi * \xi = \int_0^1 \xi(1-t)\xi(t)dt, \quad \varphi(t) = \sqrt{\frac{(1+i)\sqrt{t}}{\operatorname{sh} \sqrt{t} + i \sin \sqrt{t}}}.$$

Формулы 2 и 3 следуют из формулы 1.

$$4. \quad X = \operatorname{Re} \int_0^\tau z(1-t)z(t)dt,$$

$$\varphi(t) = \frac{4}{t^2} e^{\tau t} (\operatorname{ch}(at) + vt/a \operatorname{sh}(at))^{-1} (\operatorname{ch}(bt) + vt/b \operatorname{sh}(bt))^{-1},$$

где $z(t) = x(t) + iy(t)$ — комплекснозначный гауссовский процесс, при этом $x(t)$ удовлетворяет уравнению $dx(t) + vx(t)dt = dw(t)$, $v > 0$, $\tau > 0$, a, b — действительные константы.

$$5. \quad X = \eta(t) + w_1(t) + w_2(t),$$

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z, t) &= M \exp \{ixw_1(t) + iyw_2(t) + iz\eta(t)\} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}(tz)}} \exp \left\{ -\frac{x^2 + y^2}{2z} \operatorname{th}(tz) - i \frac{2xy}{z} \frac{\operatorname{sh}^2(tz/2)}{\operatorname{ch}(tz)} \right\}, \end{aligned}$$

где $\eta(t) = \int_0^t w_1(s)dw_2(s)$, а $w_1(t)$ и $w_2(t)$ — два стандартных независимых винеровских процесса, $t \geq 0$. Результаты 1–3 опубликованы в работах [3, 4], 4 и 5 — в статьях [2, 6].

1. Вычисление распределения случайной величины

$$I = \int_0^1 w(t)dw(1-t)$$

Теорема 1.1. *Характеристическая функция случайной величины $I = w \otimes w = \int_0^1 w(t)dw(1-t)$, где w_t — стандартный винеровский процесс, равна*

$$\varphi(t) = (\operatorname{ch} t + i \operatorname{sh} t)^{-1/2}. \quad (1.1)$$

Доказательство. В работе [3] характеристическая функция случайной величины $X = \int_0^1 w(t)w(1-t)dt$ вычислена по определению как предельная для бесконечной квадратичной формы. Мы найдем х. ф. с. в. $I = \int_0^1 w(t)dw(1-t)$ с помощью решения дифференциального уравнения. Аналогично [4], интеграл I представляется в виде $I = \sum_{i=1}^\infty \lambda_i \xi_i^2$,

где $\xi_i = \int_0^1 \psi_i(t) dw(t)$ — независимые стандартные нормальные с. в., λ_i и ψ_i — собственные значения и ортонормированные собственные функции самосопряженного компактного оператора

$$A(f) = \int_0^1 K(s, t) f(t) dt,$$

где

$$K(s, t) = \begin{cases} -1, & s + t \leq 1; \\ 0, & s + t > 1. \end{cases}$$

Очевидно, что $A(f) = - \int_0^{1-s} f(t) dt$. По определению,

$$\int_0^1 K(s, t) \psi_k(t) dt = \lambda_k \psi_k(s).$$

Следуя [3], запишем характеристическую функцию

$$\varphi(t) = \prod_{k=-\infty}^{\infty} (1 - 2it\lambda_k)^{-1/2}. \quad (1.2)$$

Уравнения для собственных значений и собственных функций имеют вид

$$- \int_0^{1-s} \psi_k(t) dt = \lambda_k \psi_k(s), \quad (1.3)$$

или, после дифференцирования,

$$\psi_k(1 - s) = \lambda_k \psi'_k(s). \quad (1.4)$$

Из (1.3) следует начальное условие $\psi_k(1) = 0$. Пусть $\lambda_k = \lambda$, $\psi_k = \psi$; предположим, что $\psi(0) = \alpha$; тогда, последовательно дифференцируя (1.4), получим таблицу:

$u = 0$	$u = 1$
$\psi = \lambda$	$\psi = 0$
$\psi' = 0$	$\psi' = \alpha/\lambda$
$\psi^{(2)} = -\alpha/\lambda^2$	$\psi^{(2)} = 0$
$\psi^{(3)} = 0$	$\psi^{(3)} = -\alpha/\lambda^3$
$\psi^{(4)} = \alpha/\lambda^4$	$\psi^{(4)} = 0$
$\psi^{(5)} = 0$	$\psi^{(5)} = \alpha/\lambda^5$
$\dots$	$\dots$

Восстановим разложение функции ψ в точках $u = 0$ и $u = 1$:

$$\begin{aligned}\psi(u) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi^{(k)}(0)}{k!} u^k = \alpha \left(1 - \frac{(u/\lambda)^2}{2!} + \frac{(u/\lambda)^4}{4!} - \frac{(u/\lambda)^6}{6!} + \dots \right) = \alpha \cos(u/\lambda); \\ \psi(u) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi^{(k)}(1)}{k!} (u-1)^k = \alpha \left(\frac{u-1}{\lambda} - \frac{((u-1)/\lambda)^3}{3!} + \frac{((u-1)/\lambda)^5}{5!} - \dots \right) = \\ &= \alpha \sin((u-1)/\lambda).\end{aligned}$$

Запишем

$$\psi(u) = \begin{cases} \alpha \cos(u/\lambda), & u < 1/2, \\ \alpha \sin((u-1)/\lambda), & u \geq 1/2. \end{cases}$$

Склеим решение в точке $u = 1/2$:

$$\psi(1/2 - 0) = \psi(1/2 + 0),$$

или

$$\cos(1/2\lambda) + \sin(1/2\lambda) = 0,$$

откуда

$$\lambda_k = \frac{2}{(4k-1)\pi}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Тогда, подставив значения λ_k в (1.2) и воспользовавшись разложением

$$\frac{\sin(\pi(x+a))}{\sin(\pi a)} = \frac{x+a}{a} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{k-a} \right) \left(1 + \frac{x}{k+a} \right)$$

(см. [7]), после преобразований получим (1.1).

Следствие.

$$I = w \otimes w = \frac{2}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{X_k^2}{4k-1},$$

где X_k — стандартные нормальные с.в.

Отсюда получаем, что

$$M(I) = \frac{1}{2}, \quad D(I) = \frac{5}{8}.$$

Запишем разложение х. ф. в ряд

$$\varphi(t) = 1 - \frac{1}{2} it - \frac{5}{8} t^2 + \frac{29}{48} it^3 + O(t^4),$$

из которого также можно найти значения моментов с. в. I .

Теорема 1.2. Плотность распределения случайной величины $I = w \otimes w$ определяется формулой

$$f_I(x) = \frac{2^{1/4}}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} \sum_{j=0}^{\infty} C_{-1/2}^j \frac{2^{j+1} \Gamma(j+1)}{(4k+1)^{j+1}} \left(e^{-(4j+1)\pi i/8} - (-1)^{j+1} e^{(4j+1)\pi i/8} \right), \quad (1.5)$$

где $-\infty < x < \infty$, а коэффициенты $C_{-1/2}^k$ задаются равенством:

$$C_{-1/2}^k = \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)\dots(-\frac{1}{2}-k+1)}{k!}. \quad (1.6)$$

Доказательство.

$$f_I(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \frac{dt}{\sqrt{\operatorname{ch} t + i \operatorname{sh} t}} dt = \frac{1}{2^{1/4}\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \frac{dt}{\sqrt{\operatorname{ch}(t + \frac{\pi i}{4})}}.$$

Используя разложение

$$(1+z)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} C_\alpha^k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} z^k, \quad |z| < 1,$$

можно записать:

$$\left(\operatorname{ch}\left(t + \frac{\pi i}{4}\right)\right)^{-1/2} = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} C_{-\frac{1}{2}}^k e^{-(4j+1)\pi i/8}, & t > 0, \\ \sum_{k=0}^{\infty} C_{-\frac{1}{2}}^k (-1)^k e^{(4j+1)\pi i/8}, & t < 0. \end{cases}$$

Тогда в силу равномерной сходимости этих рядов и ряда

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!},$$

а также используя формулу

$$\int_0^{\infty} e^{-at} t^k dt = \frac{\Gamma(k+1)}{a^{k+1}},$$

(см. [1, с. 122]), получаем

$$\begin{aligned} f_I(x) &= \frac{2^{1/4}}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} \int_{-\infty}^0 \sum_{j=0}^{\infty} C_{-\frac{1}{2}}^j (-1)^j e^{(4j+1)(1+4t)\pi i/8} t^j dt + \\ &+ \frac{2^{1/4}}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} \int_0^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} C_{-\frac{1}{2}}^j e^{-(4j+1)(1+4t)\pi i/8} t^j dt = \\ &= \frac{2^{1/4}}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} \sum_{j=0}^{\infty} C_{-1/2}^j \frac{2^{j+1}\Gamma(j+1)}{(4k+1)^{j+1}} (e^{-(4j+1)\pi i/8} - (-1)^{j+1} e^{(4j+1)\pi i/8}). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Приведем небольшую таблицу квантилей распределения $F_I(x)$ случайной величины $I = w \otimes w$, вычисленных по формуле (1.5) :

$P\{X < x\}$	0,0023	0,01	0,1	0,5	0,9	0,99	0,99255
x	-1	-0,97	-0,67	-0,16	0,36	0,95	1

2. Вычисление характеристической функции случайной величины

$$I = \int_0^1 (w(1-t) + a + b - at) dw(t)$$

Теорема 2.1. *Характеристическая функция случайной величины*

$$I = (w + at + b) \circledast w = w \circledast w + \int_0^1 (a + b - at) dw(t)$$

определяется равенством

$$\begin{aligned} \varphi(t) = \exp \left[\frac{\left(a^2/4 - (b + 1/2 a)^2 t^2 - ia(b + 1/4 a)t \right) \operatorname{sh} t}{8t(\operatorname{ch} t + i \operatorname{sh} t)} \right] \times \\ \times \exp \left[\frac{\operatorname{ch} t \left((1/4 ia + ib)t - 1/4 a \right) at}{8t(\operatorname{ch} t + i \operatorname{sh} t)} \right] (\operatorname{ch} t + i \operatorname{sh} t)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Доказательство. Запишем с. в. I в виде

$$I = \sum_k \lambda_k \xi_k^2 + a_k \xi_k,$$

где $a_k = \int_0^1 g(t) \psi_k(t) dt$, а $\xi_k = \int_0^1 \psi_k(t) dw(t)$ — независимые стандартные нормальные с. в., $\lambda_k = \frac{2}{(4k-1)\pi}$, $\psi_k(t) = \cos \frac{(4k-1)\pi t}{2}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (см. § 1). Тогда характеристическая функция примет вид

$$\begin{aligned} \varphi_I(t) &= \prod_{k=-\infty}^{\infty} M \left\{ \exp \left(\lambda_k \xi_k^2 it + a_k \xi_k it \right) \right\} = \\ &= \prod_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left((\lambda_k x_k^2 it + a_k x_k it) - \frac{x_k^2}{2} \right) dx \right\} = \\ &= \prod_{k=-\infty}^{\infty} (1 - 2it\lambda_k)^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{(a_k t)^2}{2(1 - 2it\lambda_k)} \right\} = \\ &= (\operatorname{ch}(t) + i \operatorname{sh}(t))^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{t^2}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{a_k^2}{1 - 2it\lambda_k} \right\}. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$a_k = \frac{4a - 2b\pi(4k-1)}{\pi^2(4k-1)^2},$$

вычислим сумму ряда в экспоненте:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2(-b\pi + 4bk\pi - 2a)^2 t^2}{\pi^3(4it - 4\pi k + \pi)(4k-1)^3} = \\ & = \frac{(a^2/4 - (b + 1/2a)^2 t^2 - ia(b + 1/4a)t) \operatorname{sh}(t)}{8t(\operatorname{ch}(t) + i \operatorname{sh}(t))} + \\ & + \frac{\operatorname{ch}(t)((1/4ia + ib)t - 1/4a)at}{8t(\operatorname{ch}(t) + i \operatorname{sh}(t))}, \end{aligned}$$

что и доказывает теорему 2.1.

Следствие 1.

$$I = w \otimes w + (at + b) \otimes w = \frac{2}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\xi_k^2}{4k-1} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2a - b\pi(4k-1)}{(4k-1)^2} \xi_k,$$

где ξ_k — независимые стандартные нормальные с. в.

Отсюда получаем, что $MI = 1/2$, $DI = 5/8 + 1/3 a^2 + b^2 + ba$. Запишем разложение х. ф. в ряд

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= 1 - 1/2 it - (5/8 + 1/3 a^2 + b^2 + ba) t^2 + \\ &+ \left(\frac{5}{12} ia^2 + \frac{4}{3} iab + ib^2 - \frac{1}{2} i \left(-\frac{1}{3} a^2 - b^2 - ba \right) + \frac{29}{48} i \right) t^3 + O(t^4), \end{aligned}$$

из которого также можно найти значения моментов с.в. I .

Следствие 2. Характеристическая функция случайной величины

$$I = w \otimes w + bw(1)$$

равна

$$\varphi_I(t, s) = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch} t + i \operatorname{sh} t}} \exp \left\{ \frac{b^2 s^2 \operatorname{sh} t}{2t(\operatorname{ch} t + i \operatorname{sh} t)} \right\} \quad (2.2)$$

Теорема 2.2. Характеристическая функция случайной величины

$$I = \xi \otimes \xi = \int_0^1 \xi(1-t) d\xi(t),$$

где ξ — броуновский мост на $[0, 1]$, определяется равенством

$$\varphi_I(t) = \sqrt{\frac{t}{\operatorname{sh} t}}.$$

Доказательство. По определению, все статистические характеристики броуновского моста $\xi(t)$ совпадают с условными характеристиками винеровского процесса $w(t)$ при условии $w(1) = 0$, то есть

$$\varphi_I(t) = M(e^{it\xi*\xi}) = M(e^{itw*w} | w(1) = 0).$$

Условное математическое ожидание вычисляется по формуле

$$M(e^{itY}|X=x)f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} \varphi_{X,Y}(t,s) ds, \quad (2.3)$$

где $\varphi_{X,Y}(t,s) = M(e^{isX+itY})$ — совместная х. ф. с. в. X и Y , а $f_X(x)$ — плотность распределения с. в. X . Докажем (2.3):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} \varphi_{X,Y}(t,s) ds &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{is(X-x)+itY} f(X,Y) dXdYds = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itY} \delta(X-x) f(X,Y) dXdY = \\ &= M(e^{itY}|X=x) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(X-x) f(X,Y) dXdY = M(e^{itY}|X=x) f_X(x). \end{aligned}$$

Совместная х. ф. с. в. $w * w$ и $w(1)$ получается из (2.2) при условии $b = 1$:

$$\varphi_{X,Y}(t,s) = (\operatorname{ch} t + i \operatorname{sh} t)^{-1/2} \exp \left\{ \frac{s^2 \operatorname{sh} t}{2t(\operatorname{ch} t + i \operatorname{sh} t)} \right\}.$$

Используя то, что стандартная нормальная плотность в нуле равна $1/\sqrt{2\pi}$, получим

$$\begin{aligned} \varphi_I(t) &= M(e^{itw*w}|w(1)=0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{X,Y}(t,s) ds = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (\operatorname{ch} t + i \operatorname{sh} t)^{-1/2} \exp \left\{ \frac{s^2 \operatorname{sh} t}{2t(\operatorname{ch} t + i \operatorname{sh} t)} \right\} ds = \sqrt{\frac{t}{\operatorname{sh} t}}. \end{aligned}$$

Характеристическая функция случайной величины $I = \xi \otimes \xi$ раскладывается в ряд

$$\varphi_{\xi \otimes \xi}(t) = 1 - \frac{1}{12}t^2 + \frac{1}{160}t^4 + O(t^6),$$

откуда

$$MI = 0, DI = 1/12.$$

Следствие.

$$\xi \otimes \xi = \frac{2}{\pi} \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} \frac{\xi_k^2}{k},$$

где ξ_k — независимые стандартные нормальные с. в.

Теорема 2.3. Плотность распределения случайной величины $\xi \otimes \xi$ определяется формулой

$$f_{\xi \otimes \xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k C_{-1/2}^k \left(\frac{4}{(4k+1)^2 + 4x^2} \right)^{3/4} \cos\left(\frac{3}{2} \operatorname{arctg} \frac{2x}{4k+1}\right), \quad (2.4)$$

где коэффициенты $C_{-1/2}^k$ задаются равенством

$$C_{-1/2}^k = \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)\dots(-\frac{1}{2}-k+1)}{k!}, \quad (2.5)$$

а $-\infty < x < \infty$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} f_{\xi \otimes \xi}(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \sqrt{\frac{t}{\operatorname{sh} t}} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(tx) \sqrt{\frac{t}{\operatorname{sh} t}} dt = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\infty} \sqrt{t} \cos(tx) \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k C_{-1/2}^k e^{-(4k+1)t/2} \right) dt = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k C_{-1/2}^k \left(\int_0^{\infty} \sqrt{t} \cos(tx) e^{-(4k+1)t/2} dt \right), \end{aligned}$$

так как ряд $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k C_{-1/2}^k e^{-(4k+1)t/2}$, где $C_{-1/2}^k$ определяются формулой (2.4), сходится равномерно при $t > 0$. Мы использовали разложение

$$(1+z)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} C_\alpha^k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} z^k, \quad |z| < 1.$$

С помощью формулы

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \sqrt{t} \cos(tx) e^{-at} dt = \frac{\sqrt{2}}{2} (a^2 + x^2)^{-3/4} \cos\left(\frac{3}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}\right)$$

(см. [1, с. 562]) запишем

$$\int_0^{\infty} \sqrt{t} \cos(tx) e^{-(4k+1)t/2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{4}{(4k+1)^2 + 4x^2} \right)^{3/4} \cos\left(\frac{3}{2} \operatorname{arctg} \frac{2x}{4k+1}\right).$$

Упрощая, получаем (2.4). Теорема доказана.

Приведем небольшую таблицу квантилей распределения $F_I(x)$ случайной величины $I = \xi \otimes \xi$, вычисленных по формуле (2.4) :

$P\{X < x\}$	0,0008	0,01	0,1	0,5	0,9	0,99	0,99957
x	-1	-0,91	-0,5	-0,04	0,7	0,96	1

3. Вычисление характеристических функций других функционалов от винеровских процессов

Предложение 1. *Характеристическая функция случайной величины*

$$I = (w_t + a) * (w_t + b),$$

где w_t — стандартный винеровский процесс, a и b — действительные константы, определяется формулой

$$\varphi(t) = \sqrt{\frac{1+i}{\operatorname{ch} \sqrt{t} + i \cos \sqrt{t}}} \exp \left\{ \frac{(a+b)^2 it}{4} \left[\frac{\sin \sqrt{t} + i \operatorname{sh} \sqrt{t}}{\sqrt{t}(\operatorname{ch} \sqrt{t} + i \cos \sqrt{t})} - 1 \right] + abit \right\}. \quad (3.1)$$

Доказательство. Запишем свертку в виде

$$I = (w_t + a) * (w_t + b) = w_t * w_t + (a+b) \int_0^1 (1-t) dw(t) + ab.$$

Тогда, воспользовавшись результатом [4] и учитывая далее, что $g(t) = (a+b)(1-t)$, после преобразований получим (3.1).

Разложим х. ф. в ряд

$$\varphi(t) = 1 + \left(ab + \frac{1}{4}\right)it - \left(\frac{1}{6}a^2 + \frac{7}{12}ab + \frac{1}{6}b^2 + \frac{1}{2}a^2b^2 + \frac{11}{96}\right)t^2 + O(t^2),$$

откуда

$$MX = -\frac{1}{4} - ab, \quad DX = \frac{1}{6}a^2 + \frac{7}{12}ab + \frac{1}{6}b^2 + \frac{1}{2}a^2b^2 + \frac{11}{96}.$$

Из этого результата вытекает ряд следствий.

Следствие 1. *Характеристическая функция случайной величины*

$$X = (w_t + a) * (w_t + a)$$

равна

$$\varphi_X(t) = \sqrt{\frac{1+i}{\operatorname{ch} \sqrt{t} + i \cos \sqrt{t}}} \exp \left\{ -\frac{a^2 \sqrt{t}(\operatorname{sh} \sqrt{t} - i \sin \sqrt{t})}{(\operatorname{ch} \sqrt{t} + i \cos \sqrt{t})} \right\}. \quad (3.2)$$

Аналогично

$$\varphi_X(t) = 1 + \left(a^2 + \frac{1}{4}\right)it - \left(\frac{11}{12}a^2 + \frac{1}{2}a^4 + \frac{11}{96}\right)t^2 + O(t^3),$$

$$MX = -\frac{1}{4} - a^2, \quad DX = \frac{11}{12}a^2 + \frac{1}{2}a^4 + \frac{11}{96}.$$

Следствие 2. *Характеристическая функция случайной величины*

$$X = (w_t + Y_\sigma) * (w_t + Y_\sigma),$$

где Y_σ — нормальная с.в. с математическим ожиданием 0 и дисперсией σ^2 , независимая от w_t , равна

$$\varphi_X(t) = \frac{\sqrt{1+i}}{\sqrt{\operatorname{ch} \sqrt{t} + i \cos \sqrt{t} - 2 \sqrt{t} \sigma (\operatorname{sh} \sqrt{t} - i \sin \sqrt{t})}}. \quad (3.3)$$

Проинтегрировав (3.2) по нормальной плотности, получим (3.3). Этот результат можно интерпретировать следующим образом. Винеровский процесс $w(t+s)$ при фиксированном s тождественен сумме $w(t) + Y_{\sqrt{s}}$, где $Y_{\sqrt{s}}$ — нормальная случайная величина с параметрами 0 и s . Тогда х. ф. $I = w(t+s) * w(t+s)$ есть

$$\varphi_I(t) = \sqrt{\frac{1+i}{\operatorname{ch} \sqrt{t} + i \cos \sqrt{t} - 2s \sqrt{t} (\operatorname{sh} \sqrt{t} - i \sin \sqrt{t})}},$$

и ее разложение в ряд

$$\begin{aligned} \varphi_I(t) = & 1 + (-1/4 + 1/4 i) (1/2 - 1/2 i - 2 i s^2 + 2 s^2) t + \\ & + (-1/4 + 1/4 i) (1/3 i s^2 + 1/24 + 1/24 i + 1/3 s^2) t^2 - \\ & - 3/16 i (1/2 - 1/2 i - 2 i s^2 + 2 s^2)^2 t^2, \end{aligned}$$

откуда можно найти значения моментов:

$$MI = -(i/4 + 1/4) (1/2 - 1/2 i - 2 i s^2 + 2 s^2),$$

$$\begin{aligned} DI = & 3/16 i (1/2 - 1/2 i - 2 i s^2 + 2 s^2)^2 + \\ & + (1/4 - 1/4 i) (1/3 i s^2 + 1/24 + 1/24 i + 1/3 s^2). \end{aligned}$$

Следствие 3. Характеристическая функция случайной величины

$$X = (w_t + a) * w_t$$

равна

$$\varphi_X(t) = \sqrt{\frac{1+i}{\operatorname{ch} \sqrt{t} + i \cos \sqrt{t}}} \exp \left\{ \frac{a^2 i t}{4} \left[\frac{\sin \sqrt{t} + i \operatorname{sh} \sqrt{t}}{\sqrt{t} (\operatorname{ch} \sqrt{t} + i \cos \sqrt{t})} - 1 \right] \right\}.$$

Запишем ее разложение в ряд

$$\varphi_X(t) = 1 + \frac{1}{4} i t - \left(\frac{1}{6} a^2 + \frac{11}{96} \right) t^2 + \left(-\frac{2}{15} i a^2 - \frac{311}{5760} i \right) t^3 + O(t^4),$$

откуда

$$MX = -\frac{1}{4}, \quad DX = \frac{1}{6} a^2 + \frac{11}{96}.$$

Следствие 4.1. Характеристическая функция случайной величины

$$X = (w_t + Y_\sigma) * w_t$$

определяется формулой

$$\varphi_X(t) = \frac{\sqrt{2+2i}}{\sqrt{(\operatorname{sh} \sqrt{t} - i \sin \sqrt{t}) \sqrt{t} \sigma^2 + (t \sigma^2 - 2i)(i \operatorname{ch} \sqrt{t} - \cos \sqrt{t})}}.$$

Следствие 4.2. Характеристическая функция случайной величины

$$X = w_{t+s} * w_t$$

равна

$$\varphi_X(t) = \frac{\sqrt{2+2i}}{\sqrt{(\operatorname{sh} \sqrt{t} - i \sin \sqrt{t}) \sqrt{t} s + (ts - 2i)(i \operatorname{ch} \sqrt{t} - \cos \sqrt{t})}},$$

$$\varphi_X(t) = 1 + 1/4 it + ((-1/8 + 1/8 i)(1/12 + 1/12 i + 2/3 s^2 + 2/3 is^2) - 3/32) t^2, \\ MX = -1/4, DX = 3/32 + (1/8 - 1/8 i)(1/12 + 1/12 i + 2/3 s^2 + 2/3 is^2)$$

Следствие 5. Характеристическая функция случайной величины

$$X = (w_t + Y_{\sigma_1}) * (w_t + Y_{\sigma_2}),$$

где Y_{σ_1} и Y_{σ_2} — н. с. в. с математическими ожиданиями 0 и дисперсиями σ_1^2 и σ_2^2 соответственно, причем w_t , Y_{σ_1} и Y_{σ_2} независимые в совокупности, определяется формулой

$$\varphi_X(t) = \frac{\sqrt{1+i}}{\sqrt{(\operatorname{ch} \sqrt{t} + i \cos \sqrt{t})(4 + ita + 3t^2b) + i \sqrt{t}(itb + a)(i \operatorname{sh} \sqrt{t} - \sin \sqrt{t})}},$$

где

$$a = \sigma_1^2 + \sigma_2^2, \quad b = \sigma_1^2 \sigma_2^2.$$

Этот результат получается из (3.1) интегрированием по плотностям распределений Y_{σ_1} и Y_{σ_2} . Следствие 5 аналогично (3.3) можно рассматривать как формулу для х. ф. свертки винеровских процессов $X = w(t+s) * w(t+h)$ при фиксированных s и h , так как

$$w(t+s) * w(t+h) \equiv (w_t + Y_{\sigma_1}) * (w_t + Y_{\sigma_2}).$$

Поэтому

$$\varphi_X(t) = \frac{\sqrt{1+i}}{\sqrt{(\operatorname{ch} \sqrt{t} + i \cos \sqrt{t})(4 + ita + 3t^2b) + i \sqrt{t}(itb + a)(i \operatorname{sh} \sqrt{t} - \sin \sqrt{t})}},$$

где

$$a = h^2 + s^2, \quad b = h^2 s^2.$$

Рассмотрим теперь случаи, когда с. в. Y в выражении

$$X = (w_t + Y) * (w_t + Y)$$

имеет различные распределения.

Следствие 6. Характеристическая функция случайной величины

$$X = (w_t + Y) * (w_t + Y),$$

где Y имеет распределение Коши с плотностью

$$f_Y(y) = \frac{\lambda}{\pi(\lambda^2 + y^2)}, \quad \lambda > 0, y \in \mathbb{R},$$

определяется равенством

$$\varphi_X(t) = \sqrt{\frac{1+i}{\operatorname{ch} \sqrt{t} + i \cos \sqrt{t}}} \exp \left\{ \lambda^2 t \left(\frac{\sin \sqrt{t} - i \operatorname{sh} \sqrt{t}}{(\operatorname{ch} \sqrt{t} + i \cos \sqrt{t})} \right)^2 \right\}.$$

Следствие 7. Характеристическая функция случайной величины

$$X = (w_t + Y) * (w_t + Y),$$

где Y имеет распределение Накагами с плотностью

$$f_Y(y) = \frac{2}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^\alpha y^{2\alpha-1} \exp\{-\alpha y^2/\beta\}, \quad y \geq 0, \alpha > 0, \beta > 0,$$

где

$$MY = \frac{\Gamma(\alpha + 0,5)}{\Gamma(\alpha)} \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}, \quad DY = \beta - (MY)^2,$$

равна

$$\varphi_X(t) = \sqrt{\frac{1+i}{\operatorname{ch} \sqrt{t} + i \cos \sqrt{t}}} \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^\alpha \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\sqrt{t}(\operatorname{sh} \sqrt{t} - i \sin \sqrt{t})}{(\operatorname{ch} \sqrt{t} + i \cos \sqrt{t})} \right)^{-\alpha}.$$

Из распределения Накагами получаются следующие результаты:

Следствие 7.1. При $\alpha = n/2$ и $\beta = na^2$ распределение Накагами совпадает с распределением модуля n -мерного случайного вектора с плотностью

$$f_Y(y) = \frac{2^{1-n/2}}{\Gamma(n/2)} a^{-n} y^{n-1} \exp\{-y^2/2a^2\}, \quad y \geq 0,$$

$$MY = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2)} \sqrt{2a^2}, \quad DY = na^2 - (MY)^2,$$

с координатами $Y_i, i = 1, \dots, n$, где Y_i/a суть стандартные нормальные случайные величины. Тогда характеристическая функция случайной величины

$$X = (w_t + Y) * (w_t + Y)$$

выражается формулой

$$\varphi_X(t) = \sqrt{\frac{1+i}{\operatorname{ch} \sqrt{t} + i \cos \sqrt{t}}} (2a^2)^{-n/2} \left(2a^2 + \frac{\sqrt{t}(\operatorname{sh} \sqrt{t} - i \sin \sqrt{t})}{(\operatorname{ch} \sqrt{t} + i \cos \sqrt{t})} \right)^{-n/2}.$$

Следствие 7.2. При $n = 2$ получаем х. ф. с. в., распределенной по закону Рэлея с плотностью

$$f_Y(y) = \frac{y}{a^2} \exp\{-y^2/2a^2\}, y \geq 0, MY = \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(1)} a \sqrt{2}, DY = 2a^2 - (MY)^2,$$

$$\varphi_X(t) = \sqrt{\frac{(1+i)(\operatorname{ch} \sqrt{t} + i \cos \sqrt{t})}{2a^2(2a^2(\operatorname{ch} \sqrt{t} + i \cos \sqrt{t}) + \sqrt{t}(\operatorname{sh} \sqrt{t} - i \sin \sqrt{t}))}}.$$

Следствие 7.3. При $n = 3$ получаем х. ф. с. в., распределенной по закону Максвелла с плотностью

$$f_Y(y) = \frac{2y^2}{a^3 \sqrt{2\pi}} \exp\{-y^2/2a^2\}, y \geq 0, MY = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{3}{2})} \sqrt{2a^2}, DY = 2a^2 - (MY)^2,$$

$$\varphi_X(t) = \sqrt{\frac{(1+i)(\operatorname{ch} \sqrt{t} + i \cos \sqrt{t})}{2\sqrt{2}a^3(2a^2(\operatorname{ch} \sqrt{t} + i \cos \sqrt{t}) + 2s\sqrt{t}(\operatorname{sh} \sqrt{t} - i \sin \sqrt{t}))^{3/2}}}.$$

Предложение 2. Характеристическая функция случайной величины

$$I = (w_t + a) \otimes w_t,$$

где a — действительная константа, определяется формулой

$$\varphi(t) = (\operatorname{ch}(t) + i \operatorname{sh}(t))^{-1/2} \exp\left\{\frac{a^2 t \operatorname{sh} t}{2(\operatorname{ch} t + i \operatorname{sh} t)}\right\}$$

(см. следствие 2 теоремы 2),

$$\varphi(t) = 1 + 1/2 it - (a^2 + 38)t^2 + O(t^3),$$

$$MX = -1/2, DX = a^2 + 3/8.$$

Аналогично найдем характеристическую функцию случайной величины

$$I = (w_t + X_\sigma) \otimes w_t,$$

где X_σ — нормальная с. в. с математическим ожиданием 0 и дисперсией σ^2 , независимая от w_t :

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{(\operatorname{sh} t(i - t\sigma^2) + \operatorname{ch} t)}}.$$

Так же, как и выше, $w(t+s) \equiv w(t) + X_{\sqrt{s}}$ при фиксированном s . Тогда х. ф. свертки $w(t+s) \otimes w(t)$ есть

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \frac{1}{\sqrt{(\operatorname{sh} t (i - ts) + \operatorname{ch} t)}}; \\ \varphi(t) &= 1 - 1/2 it + (1/2 s^2 - 5/8) t^2 + \\ &+ (11/48 i + 3/8 i(-s^2 + 1/2) - 3/4 i(1/2 s^2 - 1/4)) t^3 + O(t^4), \\ MX &= 1/2, \quad DX = 5/8 - s^2/2.\end{aligned}$$

В работе [6] вычислена совместная характеристическая функция процессов $\eta(t) = \int_0^t w_1(s)dw_2(s)$, $w_1(t)$ и $w_2(t)$, $t \geq 0$:

$$\begin{aligned}\varphi(x, y, z, t) &= M \exp \{ixw_1(t) + iyw_2(t) + iz\eta(t)\} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}(tz)}} \exp \left\{ -\frac{x^2 + y^2}{2z} \operatorname{th}(tz) - i \frac{2xy}{z} \frac{\operatorname{sh}^2(tz/2)}{\operatorname{ch}(tz)} \right\}.\end{aligned}\quad (3.4)$$

Далее $w_1(t)$ и $w_2(t)$ — два стандартных независимых винеровских процесса. Используем (3.4) для вычисления характеристической функции процесса

$$I = \int_0^t w_1(s + \tau)dw_2(s).$$

Сначала найдем х. ф. $I = \eta(t) + aw_1(t) = \int_0^t (w_1(s) + a)dw_2(s)$:

$$\varphi_I(y, z, t) = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}(tz)}} \exp \left\{ -\frac{a^2 y^2}{2z} \operatorname{th}(tz) \right\}.$$

Проинтегрировав это равенство по нормальной плотности $N(0, \sqrt{\tau})$, получим

Предложение 3. *Характеристическая функция процесса*

$$I = \int_0^t w_1(s + \tau)dw_2(s)$$

определяется формулой

$$\varphi(t, z, \tau) = \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{\operatorname{sh}(zt)\tau + z \operatorname{ch}(zt)}},$$

а ее разложение в ряд имеет вид

$$\begin{aligned}\varphi(t, z, \tau) &= \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{\operatorname{sh}(zt)\tau}} - \frac{z^{3/2}}{2 \sqrt{\operatorname{sh}(zt)\tau} \operatorname{sh}(zt)\tau} + \\ &+ \frac{3z^{5/2}}{8 \sqrt{\operatorname{sh}(zt)\tau} (\operatorname{sh}(zt))^2 \tau^2} + O(z^{7/2}).\end{aligned}$$

Пользуясь аналогичными рассуждениями, можно получить

Предложение 4. Пусть $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ — два независимых броуновских моста. Тогда характеристические функции случайных величин $I = \int_0^1 w_1(s) d\xi_2(s)$ и $I = \int_0^1 \xi_1(s) dw_2(s)$ одинаковы и определяются формулой:

$$\varphi(t) = \sqrt{\frac{t}{\operatorname{sh} t}},$$

$$\varphi(t) = 1 - \frac{1}{12}t^2 + \frac{1}{160}t^4 + O(t^6).$$

Следствие. Случайные величины

$$I_1 = \int_0^1 \xi(t) d\xi(1-t), \quad I_2 = \int_0^1 w_1(s) d\xi_2(s) \quad \text{и} \quad I_3 = \int_0^1 \xi_1(s) dw_2(s)$$

имеют одинаковое распределение.

Предложение 5. Характеристическая функция случайной величины

$$I = \int_0^1 \xi_1(s) d\xi_2(s),$$

где $\xi_i(s)$ — броуновский мост, равна

$$\varphi(z) = \frac{\sqrt{z \operatorname{ch} z}}{2 \sqrt{1 - 3 \operatorname{ch}^2(z/2) + 2 \operatorname{ch}^4(z/2)}},$$

и имеет разложение в ряд

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{z}} - \frac{1}{24} z^{3/2} + \frac{7}{5760} z^{7/2} - \frac{31}{967680} z^{11/2} + O(z^{15/2}).$$

Литература

- [1] Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике. М.: Наука, 1981. 719 с.
- [2] Вирченко Ю.П., Мазманишвили А.С. Распределение вероятностей случайного функционала-свертки от нормального марковского процесса // Проблемы передачи информации. 1990. Т. XXVI. Вып. 3. С. 96–101.
- [3] Клячко А.А., Солодянников Ю.В. Вычисление распределения свертки винеровского процесса // Проблемы передачи информации. 1985. Т. XXI. Вып. 4. С. 41–48.

- [4] Клячко А.А., Солодяников Ю.В. Вычисление характеристических функций некоторых функционалов от винеровского процесса и броуновского моста // Теория вероятностей и ее применения. 1986. Вып. 3. С. 569–573.
- [5] Леви П. Стохастические процессы и броуновское движение. М.: Наука, 1972. 375 с.
- [6] Лиске Х. О распределении одного функционала от винеровского процесса // Теория случайных процессов. 1982. № 10. С. 50–54.
- [7] Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1992. 820 с.

CALCULATION OF DISTRIBUTION FUNCTIONS OF SOME FUNCTIONALS OF WIENER PROCESSES³

© 2003 Y.V. Solodiannikov, D.P. Kojan ⁴

Convolutions of standard Wiener processes are considered. The analytical expressions of characteristic functions and probability densities for studied stochastic functionals of standard Wiener processes and Brownian bridges are received. The results are given contain numerical account of distribution functions and moments of convolution functionals.

Поступила в редакцию 6/V/2003;
в окончательном варианте — 20/VI/2003.

³ Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. S.V. Astashkin.

⁴ Solodiannikov Yuri Vasilievich (samdi@samara.ru), Kojan Dmitri Petrovich, (kdp@ssu.samara.ru), Dept. of Functional Analysis, Samara State University, Samara, 443011, Russia.