УДК 517.9

ОБ АППРОКСИМАЦИИ СВЕРХУ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ С МЕДЛЕННЫМИ И БЫСТРЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ И НЕЛИПШИЦЕВОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ[1]

© 2003 Е.В. Соколовская[2]

Доказана теорема об аппроксимации сверху по медленным переменным систем дифференциальных включений с нелипшицевой правой частью при наличии как медленных, так и быстрых переменных. Аппроксимирующими являются дифференциальные включения с односторонне липшицевой (OSL) правой частью.

Введение

Рассмотрим задачу Коши для системы дифференциальных включений

$$\begin{array}{ll} \dot{x} \in \mu F(t,x,y,\mu), & x(0) = x_0, \\ \dot{y} \in G(t,x,y,\mu), & y(0) = y_0, \end{array} \qquad (1)$$

где отображения $F : D \to K(\mathbb{R}^m), G : D \to K(\mathbb{R}^n)$; $D = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \times [0,a](a > 0); K(\mathbb{R}^m), K(\mathbb{R}^n)$ — совокупности всех непустых компактов в $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$ соответственно; $\mu \in [0,a]$ — малый параметр.

Наряду с этой задачей рассмотрим задачу Коши для усредненного дифференциального включения

$$\dot{u} \in \mu F_0(t,u), \quad u(0) = x_0, \qquad (2)$$

где отображение $F_0 : D_0 \to Kv(\mathbb{R}^m)$; $D_0 = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m$, $Kv(\mathbb{R}^m)$ — совокупность всех непустых выпуклых компактов в $\mathbb{R}^m$.

---

[1] Представлена доктором физико-математических наук профессором О.П. Филатовым.

[2] Соколовская Елена Валериевна, кафедра уравнений математической физики Самарского государственного университета, 443011, Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

Определение([1, с. 25]). Говорят, что задача (2) аппроксимирует сверху задачу (1), если $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \mu_0 > 0$ такое, что $\forall\ \mu \in (0, \mu_0]$ и для любого решения $x(t),\ y(t)$ задачи (1) найдется решение $u(t)$ задачи (2) такое, что выполняется неравенство

$$\|x(t) - u(t)\| < \varepsilon \quad \forall\ t \in [0, 1/\mu];$$

здесь $\|\cdot\|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^m$.

Вопрос об аппроксимации сверху задачи (1) задачей (2) рассматривался в работе [1]. В этой работе доказано, что в предположении липшицевости правых частей дифференциальных включений задач (1) и (2) при некоторых дополнительных условиях задача (2) аппроксимирует сверху задачу (1).

Одним из этих условий является естественное для задач аппроксимации условие близости средних от отображений F и F_0. Для формулировки этого условия вводится [2, с. 21] понятие порождающей задачи

$$\begin{aligned} &\dot{\xi} = 0, && \xi(t_0) = \xi_0, \\ &\dot{\eta} \in G(t, \xi, \eta, 0), && \eta(t_0) = \eta_0 \end{aligned} \tag{3}$$

(задача (3) получается из задачи (1) при $\mu = 0$; при этом начальные данные $(t_0, \xi_0) \in D_0,\ \eta_0 \in \mathbb{R}^n$ здесь произвольные). Если, следуя [2], обозначить через $Z(t_0, \xi_0, \eta_0)$ множество всех решений дифференциального включения из задачи (3), то указанное выше условие записывается в таком виде:

$$\lim_{\Delta\to\infty} \beta\left(\bigcup \frac{1}{\Delta}\int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta} F(t, \xi_0, \eta(t), 0)\, dt,\ \frac{1}{\Delta}\int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta} F_0(t, \xi_0)\, dt \right) = 0, \tag{4}$$

где $\beta(A, B)$ — полуотклонение по Хаусдорфу множества A от множества B; объединение берется по всем решениям $\eta \in Z(t_0, \xi_0, \eta_0)$; при этом требуется, чтобы предел существовал равномерно по начальным условиям $(t_0, \xi_0) \in D_0,\ \eta_0 \in \mathbb{R}^n$.

В настоящей работе условие липшицевости правой части дифференциального включения из задачи (2) заменяется на более слабое условие односторонней липшицевости (OSL); от отображения F из задачи (1) не требуется даже этого условия.

Следуя [3], будем называть многозначное отображение

$$F : [0, +\infty)\times\mathbb{R}^m \to K(\mathbb{R}^m)$$

односторонне липшицевым[3] (OSL)(по x), если найдется локально интегрируемая в $[0, +\infty)$ (по Лебегу) функция $L : [0, +\infty) \to \mathbb{R}_+$ такая, что

[3]В работе [3] приводится определение односторонне липшицева отображения $F : [0, 1]\times\mathbb{R}^m \to K(\mathbb{R}^m)$; в нем функция $L(t)$ предполагается интегрируемой на $[0, 1]$.

$\forall\ x, y \in \mathbb{R}^m\ \ \forall\ t \in \mathbb{R}_+\ \ \forall\ v \in F(t, x)$ существует такой вектор $w \in F(t, y)$, что
$$\langle x - y, v - w\rangle \leqslant L(t)\|x - y\|^2;$$
здесь $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^m$.

Кроме того, с целью компенсации отсутствия липшицевости отображений F, G и F_0 в настоящей работе требуется от отображений F и G равномерная полунепрерывность сверху по совокупности переменных x и y, равномерная по t на $\mathbb{R}_+$ и равномерная по μ в нуле; от отображения F_0 требуется равномерная полунепрерывность сверху по u, равномерная по t на $\mathbb{R}_+$.

Заметим, что при аналогичных условиях доказывалась теорема [4] об аппроксимации сверху дифференциальных включений при отсутствии быстрых переменных.

При доказательстве основного результата настоящей работы существенно используется теорема о существовании и непрерывной зависимости от исходных данных решения дифференциального включения с OSL правой частью [3, с. 785]. Приведем эту теорему. В ней рассматривается дифференциальное включение:
$$\dot{x}(t) \in H(t, x), \quad x(0) \in K_0, \tag{5}$$
где $H : [0, 1] \times \mathbb{R}^m \to Kv(\mathbb{R}^m)$, K_0 — компакт из $K(\mathbb{R}^m)$.

Теорема([3, с. 785]). Предположим, что выполняются следующие условия:
а) отображение $H(t, x)$ измеримо по t на $[0, 1]$ для каждого $x \in \mathbb{R}^m$ и полунепрерывно сверху по x для всех $t \in [0, 1]$;
б) найдется интегрируемая на $[0, 1]$ функция $\lambda : [0, 1] \to \mathbb{R}_+$ такая, что
$$\|H(t, x)\| \leqslant \lambda(t)(1 + \|x\|)$$
для всех $x \in \mathbb{R}^m$ и почти для всех $t \in [0, 1]$;
в) H — OSL отображение с интегрируемой на $[0, 1]$ функцией $L(t)$.

Пусть $z : [0, 1] \to \mathbb{R}^m$ — абсолютно непрерывная функция, удовлетворяющая условию: расстояние $\rho(\dot{z}(t), H(t, z(t))) \leqslant g(t)$ для почти всех $t \in [0, 1]$, где $g(t)$ — интегрируемая на $[0, 1]$ функция. Тогда для любого $K_0 \in K(\mathbb{R}^m)$ существует на $[0, 1]$ решение $x(t)$ задачи (5) такое, что $\|x(t) - z(t)\| \leqslant v(t)$, где
$$v(t) = d\exp(m(t)) + \int\limits_0^t \exp[m(t) - m(s)]g(s)\,ds,$$
$$d = \rho(z(0), K_0), \ \ m(t) = \int\limits_0^t L(s)\,ds.$$

1. Основной результат

Пусть задача (1) имеет хотя бы одно решение на $[0, 1/\mu]$. Предположим, что для отображений F, G и F_0 выполнены следующие условия:
1) отображения F, G и F_0 ограничены константой c, т. е.

$$\|F(t,x,y,\mu)\| \leqslant c, \ \ \|G(t,x,y,\mu)\| \leqslant c \quad \forall \ (t,x,y,\mu) \in D;$$

$$\|F_0(t,u)\| \leqslant c \quad \forall \ (t,u) \in D_0;$$

2) отображения F и G измеримы по t на $\mathbb{R}_+$ $\forall$ $(x,y,\mu) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times [0,a]$;
3) $\forall \ \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0 \ \forall \ x_1, x_2 \in \mathbb{R}^m \ \forall \ y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n \ \forall \ t \in \mathbb{R}_+ \ \forall \ \mu \in [0,a] \ :$

$$\|x_1 - x_2\| < \delta, \ \ \|y_1 - y_2\| < \delta, \ \ 0 \leqslant \mu < \delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta(F(t,x_1,y_1,\mu), F(t,x_2,y_2,0)) < \varepsilon$$

($\beta(A,B) = \sup\limits_{a\in A} \inf\limits_{b\in B} \|a-b\|$ — полуотклонение по Хаусдорфу множества A от множества B);
4) $\forall \ \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0 \ \forall \ x_1, x_2 \in \mathbb{R}^m \ \forall \ y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n \ \forall \ t \in \mathbb{R}_+ \ \forall \ \mu \in [0,a] \ :$

$$\|x_1 - x_2\| < \delta, \ \ \|y_1 - y_2\| < \delta, \ \ 0 \leqslant \mu < \delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta(G(t,x_1,y_1,\mu), G(t,x_2,y_2,0)) < \varepsilon;$$

5) отображение F_0 измеримо по t на $\mathbb{R}_+$ $\forall$ $u \in \mathbb{R}^m$;
6) $\forall \ \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0 \ \forall \ u_1, u_2 \in \mathbb{R}^m \ \forall \ t \in \mathbb{R}_+ \ : \ \|u_1 - u_2\| < \delta \Rightarrow$

$$\Rightarrow \beta(F_0(t,u_1), F_0(t,u_2)) < \varepsilon;$$

7) выполняется условие (4) о близости средних от отображений F и F_0.

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема 1. Пусть отображение $G(t,x,y,0)$ со значениями в $Kv(\mathbb{R}^n)$ — односторонне липшицево (OSL) по y с функцией $L_G(t)$, тождественно равной константе d при каждом x из $\mathbb{R}^m$, а отображение F_0 — OSL по u с локально интегрируемой на $\mathbb{R}_+$ функцией $L_{F_0} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ такой, что функция $m(t) = \int\limits_0^t L_{F_0}(s)\,ds \leqslant d^* \cdot t$ при всех $t \geqslant t^*$ (d^*, t^* — некоторые числа). И пусть для отображений F, G и F_0 выполнены условия 1–7. Тогда задача (2) аппроксимирует сверху задачу (1).

Доказательство теоремы 1 приводится во второй части работы. Здесь же приведем пример, иллюстрирующий ее.

Пример. В качестве задачи Коши для системы дифференциальных включений (1) возьмем такую задачу:

$$\begin{aligned} &\dot{x} \in \mu F(t,x,y,\mu), \qquad x(0) = 0, \\ &\dot{y} \in G(t,x,y,\mu), \qquad y(0) = 0, \end{aligned} \tag{6}$$

где отображения $F, G : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \times [0, a] \to Kv(\mathbb{R}^1)$ задаются соответственно равенствами

$$F(t, x, y, \mu) = g(x)\,(1 + \mu g(y))\,(\sin(t + \mu) + [-1; -0,5]),$$
$$G(t, x, y, \mu) = \mu + g(y)[-1; 0]$$

с функцией $g(x)$, определяемой равенством

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ \sqrt{x}, & 0 < x \leqslant 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

В качестве задачи (2) рассматривается автономное дифференциальное включение

$$\dot{u} \in \mu F_0(u), \quad u(0) = 0, \tag{7}$$

где отображение $F_0 : \mathbb{R}^1 \to Kv(\mathbb{R}^1)$ задается равенством

$$F_0(u) = g(u)[-1; -0,5].$$

Для задач (6) и (7) выполнены все условия сформулированной выше теоремы 1, и можно сделать вывод: задача (7) аппроксимирует сверху задачу (6). Поскольку задача (7) имеет единственное решение $u(t) \equiv 0$, медленные переменные $x(t)$ во всех решениях задачи (6) близки к нулю на $[0, 1/\mu]$.

2. Доказательство теоремы 1

Возьмем $\varepsilon > 0$ произвольное. По нему найдем $\delta_{F_0}(\varepsilon) > 0$ из условия 6 доказываемой теоремы. По числу $\gamma = \min\{\delta_{F_0}/2, \varepsilon\}/3$ найдем число $\delta_F(\gamma) > 0$ из условия 3 теоремы. По этому же числу γ найдем $\Delta_0(\gamma) > 0$ так, чтобы при всех $\Delta > \Delta_0(\gamma)$ для любых $(t_0, \xi_0) \in D_0$, $\eta_0 \in \mathbb{R}^n$ выполнялось неравенство

$$\beta\left(\bigcup_{\eta} \frac{1}{\Delta}\int_{t_0}^{t_0+\Delta} F(t, \xi_0, \eta(t), 0)\,dt,\ \frac{1}{\Delta}\int_{t_0}^{t_0+\Delta} F_0(t, \xi_0)\,dt\right) < \gamma$$

(такое число $\Delta_0(\gamma) > 0$ найдется в силу условия (4)).

Возьмем теперь какое-нибудь $\Delta > \Delta_0(\gamma)$. По числу $\delta_F/\Delta\exp(d\Delta)$ найдем число $\delta_G(\delta_F/\Delta\exp(d\Delta)) > 0$ из условия 4. Положим

$$\delta = \min\left\{\frac{\delta_{F_0}(\varepsilon)}{2},\ \delta_F(\gamma),\ \delta_G\left(\frac{\delta_F}{\Delta\exp(d\Delta)}\right), \varepsilon\right\}.$$

В качестве искомого $\mu_0 > 0$ возьмем такое μ_0, что $\mu_0 c\Delta < \delta$ и

$$\mu_0 < \min\left\{\delta_F(\gamma),\ \delta_G\left(\frac{\delta_F}{\Delta\exp(d\Delta)}\right),\ \frac{1}{t^*}\right\}$$

(t^* — константа из условия OSL для отображения F_0).

Пусть теперь $\mu \in (0, \mu_0]$ — произвольное и $x_\mu(t), y_\mu(t)$ — произвольное решение задачи (1). Разобьем $\mathbb{R}_+$ точками $t_j = j\Delta$ ($j = \overline{0, \infty}$) на частичные отрезки длиной Δ. Обозначим через x_j значения $x_\mu(t)$ в узлах этой сетки.

Имеем

$$x_\mu(t) = x_0 + \mu \int_0^t v(s)\, ds,$$

где $v(s)$ — некоторый селектор отображения $F(s, x_\mu(s), y_\mu(s), \mu)$. В силу условия 1 $x_\mu(t)$ — липшицева функция с константой Липшица μc:

$$\|x_\mu(t_1) - x_\mu(t_2)\| \leqslant \mu c\, |t_1 - t_2|.$$

Для любого $t \in [t_{j-1}, t_j]$, $j = \overline{1, k}$ ($k = [1/\mu\Delta]$) имеем:

$$\|x_\mu(t) - x_{j-1}\| \leqslant \mu c|t - t_{j-1}| \leqslant \mu c\Delta \leqslant \mu_0 c\Delta < \delta \leqslant \delta_F(\gamma).$$

Так как число $\delta_F(\gamma)$ выбиралось по числу γ из условия 3, то

$$\beta(F(t, x_\mu(t), y_\mu(t), \mu), F(t, x_{j-1}, y_\mu(t), 0)) < \gamma \ \ \forall\ t \in [t_{j-1}, t_j], \quad j = \overline{1, k}.$$

По теореме об измеримом селекторе найдется на $[t_{j-1}, t_j]$ селектор $v_j^1(t) \in F(t, x_{j-1}, y_\mu(t), 0)$ такой, что

$$\|v(t) - v_j^1(t)\| = \rho(v(t), F(t, x_{j-1}, y_\mu(t), 0)) \leqslant$$

$$\leqslant \beta(F(t, x_\mu(t), y_\mu(t), \mu), F(t, x_{j-1}, y_\mu(t), 0)) < \gamma \qquad \forall\ j = \overline{1, k}.$$

При каждом $j = \overline{1, k}$ рассмотрим теперь на $[t_{j-1}, t_j]$ порождающее дифференциальное включение

$$\dot\eta \in G(t, x_{j-1}, \eta, 0), \quad \eta(t_{j-1}) = y_\mu(t_{j-1}). \tag{8}$$

Покажем, что найдется решение $\eta_j(t)$ этой задачи такое, что для любого $t \in [t_{j-1}, t_j]$ выполняется

$$\|\eta_j(t) - y_\mu(t)\| \leqslant \delta_F(\gamma).$$

Для этого введем на $[0, 1]$ вспомогательную задачу

$$\dot a \in G_0(s, a), \quad a(0) = y_\mu(t_{j-1}), \tag{9}$$

где отображение

$$G_0(s, a) = \Delta G((1 - s)t_{j-1} + st_j, x_{j-1}, a, 0).$$

Заметим, что если $a(s)$ — решение на $[0, 1]$ задачи (9), то функция

$$\eta_j(t) = a\left(\frac{t - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}}\right)$$

является решением на $[t_{j-1}, t_j]$ задачи (8).

С помощью приведенной во введении теоремы из [3] установим разрешимость на $[0, 1]$ задачи (9).

В качестве функции $z(s)$ из этой теоремы возьмем функцию

$$z(s) = y_\mu((1-s)t_{j-1} + st_j).$$

Для нее имеем:

$$\begin{aligned} \rho(\dot z(s), G_0(s, z(s))) &= \rho(\Delta \dot y_\mu((1-s)t_{j-1} + st_j), G_0(s, y_\mu((1-s)t_{j-1} + st_j))) = \\ &= \rho(\Delta \dot y_\mu((1-s)t_{j-1} + st_j), \Delta G((1-s)t_{j-1} + st_j, x_{j-1}, y_\mu((1-s)t_{j-1} + st_j), 0)) = \\ &= [(1-s)t_{j-1} + st_j = t] = \rho(\Delta \dot y_\mu(t), \Delta G(t, x_{j-1}, y_\mu(t), 0)) \leqslant \\ &\leqslant \beta(\Delta G(t, x_\mu(t), y_\mu(t), \mu), \Delta G(t, x_{j-1}, y_\mu(t), 0)), \end{aligned}$$

где $t \in [t_{j-1}, t_j]$ — некоторое число (зависящее от s).

Так как для любого $t \in [t_{j-1}, t_j]$ $(j = \overline{1, k})$

$$\|x_\mu(t) - x_{j-1}\| \leqslant \mu c|t - t_{j-1}| \leqslant \mu c\Delta \leqslant \mu_0 c\Delta < \delta \leqslant \delta_G\left(\frac{\delta_F}{\Delta \exp(d\Delta)}\right),$$

а число δ_G выбиралось по числу $\delta_F/\Delta \exp(d\Delta)$ из условия *4* для отображения G, то

$$\beta(G(t, x_\mu(t), y_\mu(t), \mu), G(t, x_{j-1}, y_\mu(t), 0)) \leqslant \frac{\delta_F}{\Delta \exp(d\Delta)}$$

$\forall\ t \in [t_{j-1}, t_j]$ $(j = \overline{1, k})$ и, следовательно,

$$\rho(\dot z(s), G_0(s, z(s))) \leqslant \frac{\delta_F}{\Delta \exp(d\Delta)}\Delta = \frac{\delta_F}{\exp(d\Delta)} \quad \forall\ s \in [0, 1].$$

Отображение $G_0(s, a)$ — OSL по a с функцией $L_0(s) \equiv \Delta d$ (d — константа из условия OSL для отображения $G(t, x_\mu(t), y_\mu(t), 0)$). Все остальные условия теоремы [3] для задачи (9) также выполняются.

В силу этой теоремы на $[0, 1]$ найдется решение $a(s)$ задачи (9) такое, что на $[0, 1]$ имеет место неравенство

$$\|a(s) - z(s)\| \leqslant \frac{\delta_F}{\exp(d\Delta)} \int\limits_0^s \exp(m_0(s) - m_0(\tau))\, d\tau. \qquad (10)$$

Здесь

$$m_0(s) = \int\limits_0^s L_0(\alpha)\, d\alpha \leqslant \int\limits_0^1 L_0(\alpha)\, d\alpha = \int\limits_0^1 d\Delta\, d\alpha = \Delta d.$$

Поэтому из (10) находим:

$$\|a(s) - z(s)\| \leqslant \frac{\delta_F}{\exp(d\Delta)} \int\limits_0^1 \exp(m_0(s))\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\delta_F}{\exp(d\Delta)} \int\limits_0^1 \exp(d\Delta)\, d\tau = \delta_F(\gamma) \qquad \forall \;\; s \in [0,1].$$

Итак, на $[0,1]$ найдено решение $a(s)$ задачи (9), для которого

$$\|a(s) - z(s)\| \leqslant \delta_F(\gamma) \;\; \forall \;\; s \in [0,1].$$

Отсюда следует, что $\forall \;\; t \in [t_{j-1}, t_j]$ выполняется неравенство

$$\|a\left(\frac{t-t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}}\right) - z\left(\frac{t-t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}}\right)\| \leqslant \delta_F(\gamma).$$

Так как функция

$$a\left(\frac{t-t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}}\right) = \eta_j(t)$$

является решением на $[t_{j-1}, t_j]$ задачи (8), а

$$z\left(\frac{t-t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}}\right) = y_\mu(t),$$

тем самым найдено на $[t_{j-1}, t_j]$ решение $\eta_j(t)$ порождающей задачи (8) такое, что

$$\|\eta_j(t) - y_\mu(t)\| \leqslant \delta_F(\gamma).$$

Так как число $\delta_F(\gamma)$ выбиралось по числу γ из условия 3, то

$$\beta(F(t, x_{j-1}, y_\mu(t), 0), F(t, x_{j-1}, \eta_j(t), 0)) < \gamma \qquad \forall \;\; t \in [t_{j-1}, t_j], \quad j = \overline{1,k}.$$

По теореме об измеримом селекторе, на $[t_{j-1}, t_j]$ найдется селектор $v_j^2(t) \in F(t, x_{j-1}, \eta_j(t), 0)$ такой, что

$$\|v_j^1(t) - v_j^2(t)\| = \rho\left(v_j^1(t), F(t, x_{j-1}, \eta_j(t), 0)\right) \leqslant$$

$$\leqslant \beta\left(F(t, x_{j-1}, y_\mu(t), 0), F(t, x_{j-1}, \eta_j(t), 0)\right) < \gamma \qquad \forall \;\; t \in [t_{j-1}, t_j] \quad \forall \;\; j = \overline{1,k}.$$

Так как

$$\frac{1}{\Delta}\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} v_j^2(s)\, ds \in \frac{1}{\Delta}\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} F(s, x_{j-1}, \eta_j(s), 0)\, ds \subset \bigcup_{\eta(s)} \frac{1}{\Delta}\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} F(s, x_{j-1}, \eta(s), 0)\, ds,$$

то, опять по теореме об измеримом селекторе, на $[t_{j-1}, t_j]$ найдется селектор $v_j^3(t) \in F_0(t, x_{j-1})$ такой, что

$$\left\|\frac{1}{\Delta}\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} (v_j^2(s) - v_j^3(s))\, ds\right\| = \left\|\frac{1}{\Delta}\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} v_j^2(s)\, ds - \frac{1}{\Delta}\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} v_j^3(s)\, ds\right\| =$$

$$= \rho\left(\frac{1}{\Delta}\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} v_j^2(s)\, ds, \frac{1}{\Delta}\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} F_0(s, x_{j-1})\, ds\right) \leqslant$$

$$\leqslant \beta\left(\frac{1}{\Delta}\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} F(s, x_{j-1}, \eta_j(s), 0)\,ds, \frac{1}{\Delta}\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} F_0(s, x_{j-1})\,ds\right) \leqslant$$

$$\leqslant \beta\left(\bigcup_{\eta(s)} \frac{1}{\Delta}\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} F(s, x_{j-1}, \eta(s), 0)\,ds, \frac{1}{\Delta}\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} F_0(s, x_{j-1})\,ds\right) < \gamma \qquad \forall\ j = \overline{1,k}.$$

Теперь на $[0, 1/\mu]$ вводим функцию

$$v^3(t) = \begin{cases} v_j^3(t), & t \in [t_{j-1}, t_j] \quad (j = \overline{1,k}), \\ 0, & t \in [t_k, 1/\mu]. \end{cases}$$

Пусть $\omega_\mu(t) = x_0 + \mu \int\limits_0^t v^3(s)\,ds$. Оценим, насколько $x_\mu(t)$ отличается от $\omega_\mu(t)$ в узлах $t_0, t_1, ..., t_k$. Имеем

$$\|x_j - \omega_\mu(t_j)\| = \|x_0 + \mu\int\limits_0^{t_j} v(s)\,ds - x_0 - \mu\int\limits_0^{t_j} v^3(s)\,ds\| = \|\mu\int\limits_0^{t_j}(v(s) - v^3(s))\,ds\| =$$

$$= \|\mu\sum_{i=1}^{j}\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}(v(s) - v_i^3(s))\,ds\| \leqslant \mu\sum_{i=1}^{j}\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}\|v(s) - v_i^1(s)\|\,ds+$$

$$+\mu\sum_{i=1}^{j}\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}\|v_i^1(s) - v_i^2(s)\|\,ds + \mu\sum_{i=1}^{j}\|\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}(v_i^2(s) - v_i^3(s))\,ds\| \leqslant$$

$$\leqslant \mu\gamma\Delta j + \mu\gamma\Delta j + \mu\gamma\Delta j = 3\mu\gamma\Delta j \leqslant 3\mu\gamma/\mu = 3\gamma \leqslant \varepsilon \qquad \forall\ j = \overline{0,k}.$$

Таким образом, имеем оценку

$$\|x_j - \omega_\mu(t_j)\| \leqslant \varepsilon \qquad \forall\ j = \overline{0,k}.$$

Найдем теперь на $[0, 1/\mu]$ решение $u_\mu(t)$ задачи (2), близкое в некотором смысле к функции $\omega_\mu(t)$.

Для этого введем на $[0, 1]$ вспомогательную задачу

$$\dot b \in F_0^1(s, b, \mu), \quad b(0) = x_0, \tag{11}$$

где отображение $F_0^1 : [0, 1] \times \mathbb{R}^m \times (0, \mu_0] \to Kv(\mathbb{R}^m)$ задается равенством

$$F_0^1(s, b, \mu) = F_0(s/\mu, b).$$

Заметим, что если функция $b(s)$ — решение на $[0, 1]$ задачи (11), то функция $u_\mu(t) = b(\mu t)$ — решение на $[0, 1/\mu]$ задачи (2). К задаче (11) применим теорему [3], взяв в качестве функции $z(s)$ такую функцию:

$$z^*(s) = \omega_\mu(s/\mu) = x_0 + \int\limits_0^s v^3\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)d\alpha \qquad (s \in [0, 1]).$$

Одним из условий этой теоремы является оценка

$$\rho\left(\dot z^*(s), F_0^1(s, z^*(s), \mu)\right) \leqslant g(s)$$

для почти всех $s \in [0,1]$ с интегрируемой на [0,1] функцией $g(s)$. Получим ее.

1. Если $s \in [\mu t_{j-1}, \mu t_j]$, $j = \overline{1,k}$, то

$$\begin{aligned}\rho\left(\dot z^*(s), F_0^1(s, z^*(s), \mu)\right) &= \rho\left(v^3(s/\mu), F_0(s/\mu, \omega_\mu(s/\mu))\right) = \\ = \rho\left(v_j^3(s/\mu), F_0(s/\mu, \omega_\mu(s/\mu))\right) &= \rho\left(v_j^3(t), F_0(t, \omega_\mu(t))\right) \leqslant \\ &\leqslant \beta\left(F_0(t, x_{j-1}), F_0(t, \omega_\mu(t))\right), \end{aligned} \tag{12}$$

где $t = s/\mu \in [t_{j-1}, t_j]$ — некоторое число (зависящее от s).

Для того чтобы теперь использовать условие 6 доказываемой теоремы, оценим сначала $\|x_{j-1} - \omega_\mu(t)\|$ на $[t_{j-1}, t_j]$ $\quad (j = \overline{1,k})$.

$$\|x_{j-1} - \omega_\mu(t)\| \leqslant \|x_{j-1} - \omega_\mu(t_{j-1})\| + \|\omega_\mu(t_{j-1}) - \omega_\mu(t)\| \leqslant$$

$$\leqslant 3\gamma + \left\| x_0 + \mu \int\limits_0^{t_{j-1}} v^3(s)\, ds - x_0 - \mu \int\limits_0^{t} v^3(s)\, ds \right\| \leqslant$$

$$\leqslant 3\gamma + \mu \int\limits_{t_{j-1}}^{t} \|v^3(s)\|\, ds \leqslant 3\gamma + \mu c\Delta \leqslant 3\gamma + \mu_0 c\Delta <$$

$$< 3\gamma + \delta \leqslant \frac{\delta_{F_0}}{2} + \frac{\delta_{F_0}}{2} = \delta_{F_0}(\varepsilon) \qquad \forall\ t \in [t_{j-1}, t_j].$$

Поэтому, в силу условия 6,

$$\beta\left(F_0(t, x_{j-1}), F_0(t, \omega_\mu(t))\right) < \varepsilon \qquad \forall\ t \in [t_{j-1}, t_j]$$

и потому из (12) находим

$$\rho\left(\dot z^*(s), F_0^1(s, z^*(s), \mu)\right) < \varepsilon \qquad \forall\ s \in [0, \mu t_k].$$

2. Если $s \in [\mu t_k, 1]$, то

$$\begin{aligned}\rho\left(\dot z^*(s), F_0^1(s, z^*(s))\right) = \rho\left(v^3(s/\mu), F_0(s/\mu, \omega_\mu(s/\mu))\right) = \rho\left(0, F_0(s/\mu, \omega_\mu(s/\mu))\right) = \\ = \|F_0(s/\mu, \omega_\mu(s/\mu)\| \leqslant c.\end{aligned}$$

Если теперь ввести на $[0,1]$ функцию

$$g(s) = \begin{cases} \varepsilon, & s \in [0, \mu t_k], \\ c, & s \in [\mu t_k, 1], \end{cases}$$

то $\forall\ s \in [0,1]$ выполняется неравенство

$$\rho(\dot z^*(s), F_0^1(s, z^*(s), \mu)) \leqslant g(s)$$

($g(s)$ — интегрируемая на $[0,1]$ функция).

Отображение $F_0^1(s,b,\mu)$ — OSL по второму аргументу с функцией $L_1(s) = L_{F_0}(s/\mu)$, где $L_{F_0}(t)$ — функция из условия OSL для отображения F_0.

Таким образом, для задачи (11) выполнены все условия теоремы [3]. Тогда, согласно этой теореме, на $[0,1]$ найдется решение $b(s)$ задачи (11) такое, что выполняется неравенство

$$\|b(s) - z^*(s)\| \leqslant \int\limits_0^s \exp[m_1(s) - m_1(\tau)]g(\tau)\,d\tau \leqslant \int\limits_0^1 \exp[m_1(s)]g(\tau)\,d\tau. \quad (13)$$

Учитывая, что

$$m_1(s) = \int\limits_0^s L_1(\tau)\,d\tau = \int\limits_0^s L_{F_0}(\tau/\mu)\,d\tau = [\tau/\mu = \alpha] = \mu\int\limits_0^{s/\mu} L_{F_0}(\alpha)\,d\alpha = \\ = \mu m(s/\mu) \leqslant \mu m(1/\mu),$$

а также, что $\mu \leqslant \mu_0 < 1/t^*$ (и, следовательно, $m(1/\mu) < d^*/\mu$), из (13) находим:

$$\|b(s) - z^*(s)\| \leqslant \int\limits_0^1 \exp[\mu m/\mu]g(\tau)\,d\tau \leqslant \int\limits_0^1 \exp[\mu d^*/\mu]g(\tau)\,d\tau =$$

$$= \exp(d^*)\int\limits_0^1 g(\tau)\,d\tau = \exp(d^*)\left[\int\limits_0^{\mu t_k} \varepsilon\,d\tau + \int\limits_{\mu t_k}^1 c\,d\tau\right] = \exp(d^*)(\varepsilon\mu t_k + (1-\mu t_k)c) =$$

$$= \exp(d^*)[\varepsilon\mu t_k + \mu c(1/\mu - t_k)] \leqslant \exp(d^*)(\varepsilon\mu/\mu + \mu c\Delta) =$$
$$= \exp(d^*)(\varepsilon + \mu c\Delta) \leqslant \exp(d^*)(\varepsilon + \mu_0 c\Delta) < \exp(d^*)(\varepsilon + \delta) \leqslant$$
$$\leqslant \exp(d^*)(\varepsilon + \varepsilon) = 2\varepsilon\exp(d^*) \qquad \forall\ s \in [0,1].$$

Отсюда следует, что $\forall\ t \in [0,1/\mu]$ выполняется неравенство

$$\|b(\mu t) - z^*(\mu t)\| \leqslant 2\exp(d^*)\varepsilon.$$

Так как $b(\mu t) = u_\mu(t)$ — решение на $[0,1/\mu]$ задачи (2), а $z^*(\mu t) = \omega_\mu(t)$, последнее неравенство можно записать в виде:

$$\|u_\mu(t) - \omega_\mu(t)\| \leqslant 2\exp(d^*)\varepsilon \qquad \forall\ t \in [0,1/\mu]. \quad (14)$$

Таким образом, на $[0,1/\mu]$ найдено решение $u_\mu(t)$ задачи (2), для которого выполняется (14).

Оценим теперь на $[0,1/\mu]$ норму $\|x_\mu(t) - u_\mu(t)\|$. Сначала оценим эту норму в узлах t_j $(j = \overline{0,k})$.

Имеем:

$$\|x_\mu(t_j) - u_\mu(t_j)\| \leqslant \|x_\mu(t_j) - \omega_\mu(t_j)\| + \|\omega_\mu(t_j) - u_\mu(t_j)\| \leqslant \varepsilon + 2\exp(d^*)\varepsilon =$$

$$= \varepsilon(1 + 2\exp(d^*))\ \ (j = \overline{0,k}).$$

Теперь оценим норму $\|x_\mu(t)-u_\mu(t)\|$ в произвольной точке $t \in [0, 1/\mu]$. Обозначив через t_j узел, ближайший слева к точке t, будем иметь:

$$\|x_\mu(t) - u_\mu(t)\| \leqslant \|x_\mu(t) - x_\mu(t_j)\| + \|x_\mu(t_j) - u_\mu(t_j)\| + \|u_\mu(t_j) - u_\mu(t)\| \leqslant$$

$$\leqslant \mu \int\limits_{t_j}^{t} \|v(s)\|\, ds + \varepsilon(1 + 2\exp(d^*)) + \int\limits_{t_j}^{t} \|\dot{u}_\mu(s)\|\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \mu c\Delta + \varepsilon(1 + 2\exp(d^*)) + \mu c\Delta = 2\mu c\Delta + \varepsilon(1 + 2\exp(d^*)) \leqslant$$

$$\leqslant 2\mu_0 c\Delta + \varepsilon(1 + 2\exp(d^*)) < 2\delta + \varepsilon(1 + 2\exp(d^*)) \leqslant$$

$$\leqslant 2\varepsilon + \varepsilon(1 + 2\exp(d^*)) = \varepsilon(3 + 2\exp(d^*)) \qquad \forall\ t \in [0, 1/\mu].$$

В силу произвольности ε это означает выполнение условия аппроксимации сверху задачи (1) задачей (2). Теорема доказана.

3. Случай дифференциальных уравнений

Поскольку дифференциальные уравнения являются частным случаем дифференциальных включений, результат, изложенный в п. 2 настоящей работы для дифференциальных включений, имеет место и для дифференциальных уравнений. В этом случае правые части исходной и усредненной задач Коши являются однозначными функциями, и поэтому условия 3, 4 и 6 из п. 2 записываются проще: полуотклонение по Хаусдорфу в них заменяется на норму. Результат настоящей работы позволяет получить новую теорему усреднения для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с быстрыми и медленными переменными.

Принцип усреднения для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с медленными переменными был строго обоснован Н.Н. Боголюбовым в 30-е годы XX века [5]. Для систем дифференциальных уравнений с быстрыми и медленными переменными теорема усреднения при условиях, отличных от условий настоящей работы, доказана В.М. Волосовым [6, 7].

Рассмотрим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с медленными и быстрыми переменными:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu f(t, x, y, \mu), \qquad & x(0) &= x_0, \\ \dot{y} &= g(t, x, y, \mu), \qquad & y(0) &= y_0; \end{aligned} \tag{15}$$

здесь функции $f, g : D \to \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n$ $(D = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times [0, a], a > 0)$; могут быть нелипшицевыми по x, y; μ — малый параметр.

Предположим, что эта задача имеет хотя бы одно решение $x(t), y(t)$ на $[0, 1/\mu]$.

Наряду с задачей (15) рассмотрим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\dot{u} = \mu f_0(t, u), \quad u(0) = x_0, \tag{16}$$

в которой функция $f_0 : D_0 \to \mathbb{R}^m$ ($D_0 = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m$) тоже может быть нелипшицевой по u.

Предположим, что для функций f, g и f_0 выполнены следующие условия:

1) функции f, g и f_0 ограничены константой c, т. е.

$$\|f(t,x,y,\mu)\| \leqslant c, \ \ \|g(t,x,y,\mu)\| \leqslant c \quad \forall \ (t,x,y,\mu) \in D;$$

$$\|f_0(t,u)\| \leqslant c \quad \forall \ (t,u) \in D_0;$$

2) функции f и g измеримы по t на $\mathbb{R}_+$ $\forall$ $(x,y,\mu) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times [0,a]$;

3) $\forall$ $\varepsilon > 0$ $\exists$ $\delta > 0$ $\forall$ $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^m$ $\forall$ $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$ $\forall$ $t \in \mathbb{R}_+$ $\forall$ $\mu \in [0,a]$:

$$\|x_1 - x_2\| < \delta \ , \|y_1 - y_2\| < \delta \ , \ \ 0 \leqslant \mu < \delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|f(t,x_1,y_1,\mu) - f(t,x_2,y_2,0)\| < \varepsilon;$$

4) $\forall$ $\varepsilon > 0$ $\exists$ $\delta > 0$ $\forall$ $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^m$ $\forall$ $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$ $\forall$ $t \in \mathbb{R}_+$ $\forall$ $\mu \in [0,a]$:

$$\|x_1 - x_2\| < \delta \ , \|y_1 - y_2\| < \delta \ , \ \ 0 \leqslant \mu < \delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|g(t,x_1,y_1,\mu) - g(t,x_2,y_2,0)\| < \varepsilon;$$

5) функция f_0 измерима по t на $\mathbb{R}_+$ $\forall$ $u \in \mathbb{R}^m$;

6) $\forall$ $\varepsilon > 0$ $\exists$ $\delta > 0$ $\forall$ $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^m$ $\forall$ $t \in \mathbb{R}_+$:

$$\|u_1 - u_2\| < \delta \Rightarrow \|f_0(t,u_1) - f_0(t,u_2)\| < \varepsilon;$$

7)

$$\lim_{\Delta\to\infty} \beta\left(\bigcup \frac{1}{\Delta} \int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta} f(t,\xi_0,\eta(t),0)\, dt, \ \frac{1}{\Delta} \int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta} f_0(t,\xi_0)\, dt \right) = 0$$

равномерно по $(t_0, \xi_0) \in D_0, \eta_0 \in \mathbb{R}^n$ (объединение берется по всем решениям η второго уравнения из порождающей задачи

$$\begin{aligned} &\dot{\xi} = 0, && \xi(t_0) = \xi_0, \\ &\dot{\eta} = g(t,\xi,\eta,0), && \eta(t_0) = \eta_0; \end{aligned} \tag{17}$$

($\beta(A,b) = \sup\limits_{a\in A} \|a - b\|$ — полуотклонение по Хаусдорфу множества A от точки b). Условие 7 называют условием частичного усреднения функции f. Заметим, что в случае, когда задача (17) имеет единственное решение $(\xi_0, \eta(t))$, полуотклонение по Хаусдорфу в условии 7 заменяется на норму.

Частным случаем теоремы, доказанной в п. 2, является следующая теорема.

Теорема 2. Пусть для функции $g(t,x,y,0)$ существует константа d такая, что $\forall\ x\in\mathbb{R}^m\ \forall\ y_1,y_2\in\mathbb{R}^n\ \forall\ t\in\mathbb{R}_+$ выполняется

$$\langle y_1-y_2, g(t,x,y_1,0)-g(t,x,y_2,0)\rangle \leqslant d\|y_1-y_2\|^2.$$

Пусть также для функции $f_0(t,u)$ существует локально интегрируемая на $\mathbb{R}_+$ функция $L_{f_0}:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ такая, что $m(t)=\int\limits_0^t L_{f_0}(s)\,ds \leqslant d^*\cdot t$ при всех $t\geqslant t^*$ (t^*,d^* — некоторые числа) и $\forall\ u_1,u_2\in\mathbb{R}^m\ \forall\ t\in\mathbb{R}_+$ выполняется неравенство

$$\langle u_1-u_2, f_0(t,u_1)-f_0(t,u_2)\rangle \leqslant L_{f_0}(t)\|u_1-u_2\|^2.$$

Предположим, кроме того, что для функций f,g и f_0 выполнены перечисленные выше условия 1–7. Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует $\mu_0>0$ такое, что для любого $\mu\in(0,\mu_0]$ и для любого решения $x(t),y(t)$ задачи (15) найдется решение $u(t)$ задачи (16) такое, что выполняется неравенство

$$\|x(t)-u(t)\|<\varepsilon \qquad \forall\ t\in[0,1/\mu].$$

Пример. Для задачи

$$\begin{array}{ll} \dot x=\mu g(x)(1+\mu g(y))(\sin(t+\mu)-0,5), & x(0)=0,\\ \dot y=-\sqrt{\mu}g(y), & y(0)=0 \end{array} \tag{18}$$

с функцией

$$g(x)=\begin{cases} 0, & x\leqslant 0,\\ \sqrt{x}, & 0<x\leqslant 1,\\ 1, & x>1 \end{cases}$$

в качестве усредненной задачи возьмем такую задачу:

$$\dot u=-\mu g(u)/2,\quad u(0)=0. \tag{19}$$

Она имеет единственное нулевое решение. При этом выполняются все условия теоремы 2. Поэтому для любого $\varepsilon>0$ существует $\mu_0>0$ такое, что для любого $\mu\in(0,\mu_0]$ и для любого решения $x(t)$, $y(t)$ задачи (18) выполняется $\|x(t)\|<\varepsilon\ \forall\ t\in[0,1/\mu]$.

Таким образом, несмотря на то, что функции из правых частей уравнений задач (18) и (19) нелипшицевы, принцип усреднения здесь выполняется.

Литература

[1] Филатов О.П., Хапаев М.М. Усреднение систем дифференциальных включений. М.: Изд-во МГУ, 1998, 160 с.

[2] Филатов О.П. Доказательство теорем усреднения для дифференциальных включений // Вестник СамГУ. 2001. № 2. С. 20–33.

[3] Donchev T., Farkhi E. Stability and Euler approximation of one-sided Lipschitz differential inclusions // SIAM J. Control OPTIM. 1998. V. 36. No. 2. P. 780–796.

[4] Соколовская Е.В. Об аппроксимации сверху дифференциальных включений с нелипшицевой правой частью // Вестник СамГУ. 2002. № 2. С. 39–47.

[5] Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.

[6] Волосов В. М. Усреднение в системах обыкновенных дифференциальных уравнений // УМН. 1962. Т. 17. № 6. С. 3–126.

[7] Волосов В. М., Моргунов В. О. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971. 507 с.

ON UPPER APPROXIMATION OF THE SYSTEMS OF DIFFERENTIAL INCLUSIONS WITH SLOW AND RAPID VARIABLES AND NON-LIPSCHITZ RIGHT-HAND SIDE[4]

© 2003 E.V. Sokolovskaya[5]

A theorem about upper approximation at slow variables of the systems of differential inclusions with non-Lipschitz right-hand side and slow and rapid variables is proved. The inclusions with one-sided Lipschitz right-hand side are used for the approximation.

Поступила в редакцию 23/*XII*/2002.

[4] Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. O.P. Filatov.

[5] Sokolovskaya Elena Valerievna, Dept. of Partial Differential Equations, Samara State University, Samara, 443011, Russia.