

ИНВАРИАНТНЫЕ ТЕНЗОРЫ ОДНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АЛГЕБРЫ ЛИ $sl(3, \mathbb{C})$ ¹

© 2003 И.С. Логунов²

Приведен способ вычисления проективных инвариантов плоских кривых третьего порядка средствами теории представлений полупростых групп Ли и алгебр Ли с использованием принципа включения.

Уравнение кривой третьего порядка на проективной плоскости $\mathbb{CP}^2$ имеет вид:

$$F(X, Y, Z) = 0, \quad (1)$$

где F — многочлен третьей степени от переменных X, Y, Z .

Если систему координат на $\mathbb{CP}^2$ изменить с помощью квадратной матрицы третьего порядка с $\det A = 1$, т. е. положить

$$\begin{cases} X = a_{11}X' + a_{12}Y' + a_{13}Z', \\ Y = a_{21}X' + a_{22}Y' + a_{23}Z', \\ Z = a_{31}X' + a_{32}Y' + a_{33}Z', \end{cases}$$

то уравнение (1) в новых координатах примет вид:

$$F'(X', Y', Z') = 0.$$

Это означает, что в пространстве L многочленов третьей степени от трех переменных действует унимодулярная группа $SL(3, \mathbb{C})$, переводящая полином F в полином F' . Другими словами, в десятимерном пространстве L задано представление Φ группы Ли $SL(3, \mathbb{C})$, а также соответствующей алгебры Ли $sl(3, \mathbb{C})$.

Проективными инвариантами кривой с уравнением (1) называются инварианты представления Φ , т. е. функции от координат векторов из L , не изменяющие своих значений, когда $l \in L$ переходит в $\Phi(g) \circ l \in L$ для любого $g \in SL(3, \mathbb{C})$.

¹ Представлена доктором физико-математических наук профессором Ю.Н. Радаевым.

² Логунов Игорь Сергеевич, кафедра геометрии и методики преподавания математики Орловского государственного университета, 302026, г. Орел, ул. Комсомольская, 95.

Известно, что инвариант $I(l)$, $l \in L$, определяет поверхность уровня с уравнением:

$$I(l) = c(\text{const}), \quad l \in L.$$

Инварианты представления Φ можно вычислять с помощью принципа включения [1], состоящего в следующем. Пусть $G \supset H$ — линейные (матричные) алгебра Ли и ее подалгебра, и пусть имеет место разложение

$$G = H + B, \quad (2)$$

где H и B — пространства, инвариантные относительно присоединенного представления Ad_H , действующего по формуле

$$Ad_H u = [x, u] = xu - ux, \quad x, u \in G,$$

причем представление Ad_H на B эквивалентно представлению Φ , но не совпадает с ним. Тогда функции

$$f_k = \text{Sp } b^k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (3)$$

где $b \in B$, являются инвариантами представления Φ . Иногда в виде (3) можно предъявить всякий инвариант.

В рассматриваемом случае представление Φ в десятимерном пространстве полиномов третьей степени от трех переменных задается старшим вектором со схемой Е.Б. Дынкина $\mathfrak{o}_\alpha - \overset{3}{\mathfrak{o}}_\beta$, где α, β — простые корни, 3 — числовая отметка, соответствующая простому корню β .

В работе [1, с. 122–123] доказана теорема 1, из которой следует, что в алгебре Ли $G = \mathfrak{so}(8, \mathbb{C})$ есть подалгебра $H = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$, вложенная в G посредством представления $\overset{1}{\mathfrak{o}} - \overset{1}{\mathfrak{o}} = \Psi$, а также

$$G = H + B_1 + B_2, \quad (4)$$

где H, B_1, B_2 — инвариантные подпространства, и Ad_H на B_1 и B_2 задается соответственно старшими весами вида $\mathfrak{o} - \overset{3}{\mathfrak{o}}$ и $\overset{3}{\mathfrak{o}} - \mathfrak{o}$.

Если вычислить в явном виде пространства B_1 и B_2 внутри G , то формула (3) определит инварианты для представления $\mathfrak{o} - \overset{3}{\mathfrak{o}} = \Phi$, т. е. проективные инварианты плоской кривой третьего порядка. Соображения размерности показывают, что существует точно два функционально независимых инварианта представления $\mathfrak{o} - \overset{3}{\mathfrak{o}}$.

В работе [2] доказано, что орбита наибольшей размерности для представления Φ восьмимерна. Поскольку всякая орбита целиком принадлежит поверхности уровня $I(l) = c(\text{const}), l \in L$, при надлежащем выборе константы c и произвольном инварианте I , то существует ровно два функционально независимых инварианта представления Φ .

С помощью компьютера вычислены ненулевые инварианты представления $\mathbf{o} - \overset{3}{\mathbf{o}} = \Phi$; ими являются многочлены:

$$f_6 = \text{Sp } b^6 \text{ и } f_4 = \text{Sp } b^4, \quad b \in B_1. \quad (5)$$

Вычисление пространств B_1 и B_2 средствами теории представлений приводится ниже.

Система всех весов представления $\Psi = \overset{1}{\mathbf{o}} - \overset{1}{\mathbf{o}}$ имеет вид:

$$\begin{array}{cc} \overset{1}{\mathbf{o}} - \overset{1}{\mathbf{o}} & \\ \overset{-1}{\mathbf{o}} - \overset{2}{\mathbf{o}} & \overset{2}{\mathbf{o}} - \overset{-1}{\mathbf{o}} \\ \mathbf{o} - \mathbf{o} & \\ \overset{-2}{\mathbf{o}} - \overset{1}{\mathbf{o}} & \overset{1}{\mathbf{o}} - \overset{-2}{\mathbf{o}} \\ \overset{-1}{\mathbf{o}} - \overset{-1}{\mathbf{o}} & . \end{array} \quad (6)$$

Можно считать, что базис в пространстве этого представления составляют векторы:

$$\begin{array}{cc} \xi & \\ E_{-\alpha}\xi & E_{-\beta}\xi \\ E_{-\beta}E_{-\alpha}\xi & E_{-\alpha}E_{-\beta}\xi \\ E_{-\alpha}E_{-\alpha}E_{-\beta}\xi & E_{-\beta}E_{-\beta}E_{-\alpha}\xi \\ E_{-\alpha}E_{-\beta}E_{-\alpha}E_{-\beta}\xi, & \end{array} \quad (7)$$

где ξ — старший вектор, являющийся также и крайним: $E_{\alpha}\xi = 0$, $E_{\beta}\xi = 0$.

Имеют место формулы:

$$\begin{aligned} E_{-\alpha}E_{-\beta}E_{-\alpha}\xi &= 1/2 E_{-\alpha}E_{-\alpha}E_{-\beta}\xi \\ E_{-\beta}E_{-\alpha}E_{-\beta}\xi &= 1/2 E_{-\beta}E_{-\beta}E_{-\alpha}\xi \\ E_{-\alpha}E_{-\beta}E_{-\beta}E_{-\alpha}\xi &= 2E_{-\alpha}E_{-\beta}E_{-\alpha}E_{-\beta}\xi. \end{aligned} \quad (8)$$

Представление Ad_H на B_1 входит в разложение тензорного произведения $\Psi \otimes \Psi = \overset{1}{\mathbf{o}} - \overset{1}{\mathbf{o}} \otimes \overset{1}{\mathbf{o}} - \overset{1}{\mathbf{o}}$ и порождается старшим вектором вида $\theta = E_{-\alpha}\xi \otimes \xi - \xi \otimes E_{-\alpha}\xi$.

Действительно:

$$\begin{aligned} E_{\alpha}\theta &= E_{\alpha}(E_{-\alpha}\xi \otimes \xi - \xi \otimes E_{-\alpha}\xi) = \\ &= E_{\alpha}E_{-\alpha}\xi \otimes \xi + E_{-\alpha}\xi \otimes E_{\alpha}\xi - E_{\alpha}\xi \otimes E_{-\alpha}\xi - \xi \otimes E_{\alpha}E_{-\alpha}\xi = \\ &= (\alpha, \Lambda)\xi \otimes \xi - \xi \otimes (\alpha, \Lambda)\xi = 0, \end{aligned}$$

так как $E_{\alpha}\xi = 0$ (ξ — крайний вектор), $H_{\alpha}\xi = (\alpha, \Lambda)\xi$, $\alpha = (2; -1)$, $\Lambda = (1; 1)$. Совершенно аналогично устанавливается, что $E_{\beta}\theta = 0$. Таким

образом, вектор $\theta = E_{-\alpha}\xi \otimes \xi - \xi \otimes E_{-\alpha}\xi$ порождает пространство представления Ad_H на B_1 .

Остальные векторы в этом пространстве имеют вид:

$$\begin{aligned} & E_{-\beta}\theta, \quad E_{-\beta}E_{-\beta}\theta, \quad E_{-\beta}E_{-\beta}E_{-\beta}\theta, \quad E_{-\alpha}E_{-\beta}\theta, \\ & E_{-\alpha}E_{-\beta}E_{-\beta}\theta, \quad E_{-\alpha}E_{-\beta}E_{-\beta}E_{-\beta}\theta, \quad E_{-\alpha}E_{-\alpha}E_{-\beta}E_{-\beta}\theta, \\ & E_{-\alpha}E_{-\alpha}E_{-\beta}E_{-\beta}E_{-\beta}\theta, \quad E_{-\alpha}E_{-\alpha}E_{-\alpha}E_{-\beta}E_{-\beta}E_{-\beta}\theta. \end{aligned} \quad (9)$$

Вычисления показывают, что:

- 1) $\theta = E_{-\alpha}\xi \otimes \xi - \xi \otimes E_{-\alpha}\xi$;
- 2) $E_{-\beta}\theta = E_{-\beta}E_{-\alpha}\xi \otimes \xi - \xi \otimes E_{-\beta}E_{-\alpha}\xi + E_{-\alpha}\xi \otimes E_{-\beta}\xi - E_{-\beta}\xi \otimes E_{-\alpha}\xi$;
- 3) $E_{-\beta}E_{-\beta}\theta = E_{-\beta}E_{-\beta}E_{-\alpha}\xi \otimes \xi - \xi \otimes E_{-\beta}E_{-\beta}E_{-\alpha}\xi + 2E_{-\beta}E_{-\alpha}\xi \otimes E_{-\beta}\xi -$
 $- 2E_{-\beta}\xi \otimes E_{-\beta}E_{-\alpha}\xi$;
- 4) $E_{-\beta}E_{-\beta}E_{-\beta}\theta = 3E_{-\beta}E_{-\beta}E_{-\alpha}\xi \otimes E_{-\beta}\xi - 3E_{-\beta}\xi \otimes E_{-\beta}E_{-\beta}E_{-\alpha}\xi$;
- 5) $E_{-\alpha}E_{-\beta}\theta = \frac{1}{2}E_{-\alpha}E_{-\alpha}E_{-\beta}\xi \otimes \xi - \frac{1}{2}\xi \otimes E_{-\alpha}E_{-\alpha}E_{-\beta}\xi + E_{-\beta}E_{-\alpha}\xi \otimes E_{-\alpha}\xi -$
 $- E_{-\alpha}\xi \otimes E_{-\beta}E_{-\alpha}\xi + E_{-\alpha}\xi \otimes E_{-\alpha}E_{-\beta}\xi - E_{-\alpha}E_{-\beta}\xi \otimes E_{-\alpha}\xi$;
- 6) $E_{-\alpha}E_{-\beta}E_{-\beta}\theta = 2E_{-\alpha}E_{-\beta}E_{-\alpha}E_{-\beta}\xi \otimes \xi - 2\xi \otimes E_{-\alpha}E_{-\beta}E_{-\alpha}E_{-\beta}\xi +$
 $+ E_{-\beta}E_{-\beta}E_{-\alpha}\xi \otimes E_{-\alpha}\xi - E_{-\alpha}\xi \otimes E_{-\beta}E_{-\beta}E_{-\alpha}\xi + E_{-\alpha}E_{-\alpha}E_{-\beta}\xi \otimes E_{-\beta}\xi -$
 $- E_{-\beta}\xi \otimes E_{-\alpha}E_{-\alpha}E_{-\beta}\xi + 2E_{-\beta}E_{-\alpha}\xi \otimes E_{-\alpha}E_{-\beta}\xi - 2E_{-\alpha}E_{-\beta}\xi \otimes E_{-\beta}E_{-\alpha}\xi$;
- 7) $E_{-\alpha}E_{-\beta}E_{-\beta}E_{-\beta}\theta = 6E_{-\alpha}E_{-\beta}E_{-\alpha}E_{-\beta}\xi \otimes E_{-\beta}\xi - 6E_{-\beta}\xi \otimes E_{-\alpha}E_{-\beta}E_{-\alpha}E_{-\beta}\xi +$
 $+ 3E_{-\beta}E_{-\beta}E_{-\alpha}\xi \otimes E_{-\alpha}E_{-\beta}\xi - 3E_{-\alpha}E_{-\beta}\xi \otimes E_{-\beta}E_{-\beta}E_{-\alpha}\xi$;
- 8) $E_{-\alpha}E_{-\alpha}E_{-\beta}E_{-\beta}\theta = 4E_{-\alpha}E_{-\beta}E_{-\alpha}E_{-\beta}\xi \otimes E_{-\alpha}\xi - 4E_{-\alpha}\xi \otimes E_{-\alpha}E_{-\beta}E_{-\alpha}E_{-\beta}\xi +$
 $+ 2E_{-\alpha}E_{-\alpha}E_{-\beta}\xi \otimes E_{-\alpha}E_{-\beta}\xi - 2E_{-\alpha}E_{-\beta}\xi \otimes E_{-\alpha}E_{-\alpha}E_{-\beta}\xi +$
 $+ 2E_{-\beta}E_{-\alpha}\xi \otimes E_{-\alpha}E_{-\alpha}E_{-\beta}\xi - 2E_{-\alpha}E_{-\alpha}E_{-\beta}\xi \otimes E_{-\beta}E_{-\alpha}\xi$;
- 9) $E_{-\alpha}E_{-\alpha}E_{-\beta}E_{-\beta}E_{-\beta}\theta = 12E_{-\alpha}E_{-\beta}E_{-\alpha}E_{-\beta}\xi \otimes E_{-\alpha}E_{-\beta}\xi -$
 $- 12E_{-\alpha}E_{-\beta}\xi \otimes E_{-\alpha}E_{-\beta}E_{-\alpha}E_{-\beta}\xi + 3E_{-\beta}E_{-\beta}E_{-\alpha}\xi \otimes E_{-\alpha}E_{-\alpha}E_{-\beta}\xi -$
 $- 3E_{-\alpha}E_{-\alpha}E_{-\beta}\xi \otimes E_{-\beta}E_{-\beta}E_{-\alpha}\xi$;
- 10) $E_{-\alpha}E_{-\alpha}E_{-\alpha}E_{-\beta}E_{-\beta}\theta = 18E_{-\alpha}E_{-\beta}E_{-\alpha}E_{-\beta}\xi \otimes E_{-\alpha}E_{-\alpha}E_{-\beta}\xi -$
 $- 18E_{-\alpha}E_{-\alpha}E_{-\beta}\xi \otimes E_{-\alpha}E_{-\beta}E_{-\alpha}E_{-\beta}\xi$.

(10)

Получив векторы (10) в пространстве представления $\Psi \otimes \Psi = \overset{1}{0} - \overset{1}{0} \otimes \overset{1}{0} - \overset{1}{0}$, перестроим их в векторы из пространства представления $\Psi \otimes \widetilde{\Psi}$, где $\widetilde{\Psi}$ — представление, контраградиентное представлению Ψ . Для этого каждую из вышеуказанных матриц умножим на матрицу Грама системы векторов (9) относительно скалярного произведения Картана в G , которая в выбранном весовом базисе (7) имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

После указанных вычислений легко видеть, что произвольный элемент b из B_1 выглядит в матричной форме так:

$$b = \begin{pmatrix} -4x_0 & 4x_3 & 2x_5 & -2x_2 & -4x_2 & 0 & 4x_1 & 0 \\ -8x_8 & 4x_6 & 0 & 2x_5 & -2x_5 & -4x_2 & 0 & 2x_1 \\ -12x_7 & 12x_4 & 4x_6 & -4x_3 & -8x_3 & 0 & 4x_2 & 0 \\ -24x_9 & 12x_7 & 8x_8 & -4x_6 & -8x_0 & 0 & 4x_5 & 0 \\ 0 & 0 & -8x_8 & 8x_6 & 4x_6 & -8x_3 & -4x_5 & 2x_2 \\ -36x_{10} & 12x_9 & 0 & 4x_8 & -4x_8 & -4x_6 & 0 & x_5 \\ 0 & 0 & -12x_9 & 12x_7 & 6x_7 & -12x_4 & -4x_6 & 2x_3 \\ 0 & 0 & -72x_{10} & 48x_9 & 24x_9 & -24x_7 & -16x_8 & 4x_6 \end{pmatrix}.$$

Находя следы соответствующих степеней матрицы b , получим искомые инварианты плоской кривой третьего порядка: $f_6 = \text{Sp } b^6$ и $f_4 = \text{Sp } b^4$, которые не приводятся здесь в явном виде из-за их громоздкости.

Следует отметить, что указанные инварианты были описаны ранее [3], в данной же работе приведен способ их нахождения с помощью средств теории представлений групп Ли и алгебр Ли.

В заключение автор выражает благодарность за советы и полезные обсуждения профессору О.В. Мантурову, в семинаре которого возникла эта задача.

Литература

- [1] Мантуров О.В. Однородные пространства и инвариантные тензоры // В кн: Итоги науки и техники. Проблемы геометрии / Науч.

- ред. проф. Н.М. Остиану. М.: ВИНТИ, 1986. Т. 18. С. 105–142.
- [2] Андреев Е.М., Винберг Э.Б., Элашвили А.Г. Орбиты наибольшей размерности полупростых линейных групп Ли // Функциональный анализ и его приложения. 1967. Т. 1. Вып. 4. С. 3–7.
- [3] Смогоржевский А.С., Столова Е.С. Справочник по теории плоских кривых третьего порядка. М.: Физматгиз, 1961. С. 103–105.
- [4] Спрингер Т. Теория инвариантов. М.: Мир, 1981. С. 19–24.

INVARIANT TENSORS OF ONE REPRESENTATION OF LIE ALGEBRA $sl(3, \mathbb{C})$ ³

© 2003 I.S. Logunov⁴

Projective invariants of flat curves of the third order are calculated by means of the theory of representations of the semisimple Lie groups and Lie algebras by the aid of inclusion principle.

Поступила в редакцию 10/III/2003;
в окончательном варианте — 23/V/2003.

³ Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. Yu.N. Radayev.

⁴ Logunov Igor Sergeyevich, Dept. of Geometry and Methodics of Mathematics, Oryol State University, Oryol, 302026, Russia.