МАТЕМАТИКА

УДК 517.9

ФАКТОРИЗАЦИЯ, ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ. 1. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ[1]

© 2003 Л.М. Беркович[2]

Обзорная статья, которая призвана систематизировать полученные автором результаты и изложенные в различных статьях, докладах на конференциях и семинарах. В ней представлены развитые автором методы факторизации, автономизации и точной линеаризации, которые в совокупности с методами группового анализа и дифференциальной алгебры позволяют создать целостную картину для изучения и интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Это дает возможность конструктивно исследовать нелинейные и нестационарные задачи естествознания и, прежде всего, задачи механики и физики. Обзор состоит из двух частей. В первой части рассматриваются линейные уравнения. Вторая часть будет посвящена нелинейным уравнениям. В основу статьи положена монография автора. (Беркович Л.М. Факторизация и преобразования дифференциальных уравнений. Методы и приложения. М.: НИЦ РХД, 2002.)

Введение

Данная статья посвящена аналитическому и алгебраическому исследованию проблемы интегрируемости обыкновенных дифференциальных уравнений и некоторым применениям к задачам математической физики и механики. К указанной проблеме издавна существовало два подхода, один из которых связан с заменами переменных,

[1] Представлена доктором физико-математических наук профессором Ю.Н. Радаевым.

[2] Беркович Лев Мейлихович (`berk@ssu.samara.ru`), действительный член Академии нелинейных наук, кафедра алгебры и геометрии Самарского государственного университета, 443011, Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

а другой — с использованием алгебраических аналогий. Однако применение подстановок, как правило, носило эвристический характер, а такое мощное средство, как факторизация, с трудом переносилось на дифференциальные уравнения, да и то лишь на линейные, и притом носило неэффективный характер. Много ожиданий связывалось с применением теории групп Ли и алгебр Ли к дифференциальным уравнениям (групповой анализ). Эти ожидания оказались не напрасными. Ее концептуальная и униформизующая роль является в настоящее время общепризнанной. Особенно плодотворным оказалось применение к фундаментальным уравнениям механики и физики, поскольку принципы инвариантности закладывались уже при выводе этих уравнений. Однако возможности указанной теории не позволяют полностью "закрыть" проблему интегрируемости.

Немало достижений в интегрировании нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) достигается путем использования т.н. теста Пенлеве. Но потенциальные возможности этого теста не до конца были выявлены из-за того, что наблюдаемая связь его с интегрируемостью не обоснована в достаточной мере.

Новые перспективы для интегрирования ОДУ открылись с других сторон, а именно с теории нелинейных уравнений в частных производных и теоретической физики (конкретно — теории солитонов), начиная с середины 60-х годов XX века.

Впрочем, на тесную связь с физикой указывал еще российский математик В.П. Ермаков, к сожалению, малоизвестный:

"Два предмета: теоретическая физика и интегрирование дифференциальных уравнений немыслимы один без другого, они всегда развивались совместно и успехи одного отражались на другом."

Из попыток исследовать инвариантные решения некоторых замечательных уравнений нелинейной физики, таких, например, как уравнение Кортевега—де Фриза, возникли или получили развитие такие методы, как метод L–A пар, метод обратной задачи рассеяния и некоторые другие.

В последние годы уделяется большое внимание т.н. методу Хироты. Однако можно согласиться со следующей оценкой этого метода (см. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. [2, с. 54]): *"...это исключительно мощный инструмент: слово метод в данном случае не совсем подходит, потому что при использовании он очень сильно опирается на опытность и интуицию исследователя".*

Актуальность проблемы интегрируемости ДУ связана не только с необходимостью получения точных решений для новых математических моделей, но и с необходимостью тестирования новых численных алгоритмов. Интегрируемые уравнения (особенно нелинейные) и методы их решения раздвинули горизонты в естествознании (прежде всего в математической физике) к началу XXI века. С другой стороны, ширится понимание того, что *интегрируемость ДУ является междисциплинарной областью знаний*: различные аспекты ее стимулировали успешное развитие фундаментальных математических наук: *алгебры, геометрии* и *анализа*. Однако указанные достижения не исключают необходимости вновь и вновь возвращаться к такой неисчерпаемой проблеме, каковой является проблема интегрируемости ДУ.

Занимаясь ею, автор пришел к выводу, что ключ к ее пониманию заключен в словах: *факторизация и преобразования*, в осознании необходимости совместного использования факторизации и преобразований, т.к. суммарный результат превышает влияние, оказываемое каждым подходом в отдельности (синергетический эффект). Построение алгоритмов для нахождения *лиувиллевых* и *эйлеровых* (точных) решений есть главная цель любой эффективной теории ОДУ. Явные формулы имеют непреходящую ценность и сосредоточивают всю возможную информацию об уравнениях. Они необходимы для развития математической и физической интуиции, а также для сравнения различных теорий, включая границы их применимости.

Целью проводимых автором исследований является создание эффективных методов и алгоритмов интегрирования ОДУ и их редукции к соответствующим каноническим формам. В результате оказывается возможным не только построить новые классы интегрируемых уравнений, но и раскрыть немало "чудес" интегрируемости, которые ранее находили лишь эвристическое объяснение.

В работе используются методы группового анализа и дифференциальной алгебры, а также развитые автором методы *факторизации, автономизации* и *точной линеаризации.*

Впервые метод факторизации дифференциальных операторов в связи с теорией преобразований систематически был представлен автором еще в 1967 г.[3] В настоящей работе этот метод получил свое дальнейшее логическое развитие, связанное прежде всего с созданием эффективных алгоритмов поиска преобразований, а также с распространением факторизации на нелинейные уравнения.

Эффективность совместного использования факторизации и преобразований для линейных обыкновенных дифференциальных уравне-

[3]Беркович Л.М. Метод факторизации дифференциальных операторов и его применение к решению обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами: Автореферат дис…канд. физ.-мат. наук. Свердловск: Изд-во Урал. гос. ун-та, 1967. 13 с.

ний (ЛОДУ) была продемонстрирована как в учебном пособии автора [3], вышедшем в 1978 г., так и особенно в монографии [4] (1989 г.).

Метод автономизации нелинейных уравнений, позволяющий эффективно находить т.н. преобразование Куммера—Лиувилля (когда это возможно), является в соответствующих случаях альтернативой классической теории Софуса Ли поиска точечных симметрий. Он был представлен автором еще в 1969–1971 гг. (см., например, [5]).

Метод точной линеаризации (МТЛ) нелинейных ОДУ был анонсирован автором в 1974–1976 гг., а подробная статья появилась в 1979 г. [6].

В данной работе вышеназванному методу уделяется большое внимание. Удалось построить не только класс линеаризуемых уравнений n-го порядка, но и найти явный вид через квадратуры линеаризующего преобразования. Этот метод оказался непосредственно связан со следующей концепцией принципа нелинейной суперпозиции (ПНС), которая широко используется в работе.

Мы будем говорить, что данное нелинейное уравнение обладает ПНС, если его общее решение может быть выражено в виде функции (произвольной или конкретной) от решений присоединенного нелинейного или линейного уравнения.

Если в качестве присоединенного уравнения выступает преобразованное линейное уравнение, то указать ПНС — это значит указать нелинейные преобразования переменных, сводящие данное нелинейное уравнение к линейному.

Совместное использование факторизации и преобразований позволило создать целостную картину, объединяющую линейные и нелинейные уравнения. Слово "нелинейность", которое буквально означает "отсутствие линейности", больше не является синонимом области, лежащей за пределами доступного пониманию.

В результате развития указанных методов удалось приступить к систематическому исследованию *нестационарных* и *нелинейных* задач естествознания, что особенно важно в связи с происходящей *делинеаризацией* Науки вообще и Физики в частности.

Отметим теперь некоторые основные результаты, полученные автором.

В § 1 решена восходящая к Н.Н. Лузину задача о совместности системы ЛОДУ от одной неизвестной функции. Указанный подход распространен на некоторые системы алгебраических ОДУ. Построены факторизации дифференциальных операторов как в основном дифференциальном поле, так и в его алгебраическом и трансцендентном расширениях.

В § 2 предложена новая алгоритмичная процедура построения последовательности линейных уравнений 2-го порядка, интегрируемых в терминах исходного уравнения. Впервые выявлена связь преобразования Куммера—Лиувилля с преобразованием Эйлера—Имшенецкого—Дарбу.

В § 3 решены задачи Альфана об эквивалентности и классификации ЛОДУ n-го ($n > 2$) порядка (ЛОДУ-n). Указаны алгоритмы для нахождения инвариантов и канонических форм Альфана. Существенно дополнены критерии приводимости ЛОДУ-n к уравнениям с постоянными коэффициентами. При этом построены семейства нелинейных уравнений от 2-го до n-го порядков, порожденные приводимыми линейными уравнениями.

В § 4 построен самый общий класс нелинейных уравнений n-го порядка, допускающий автономизацию с помощью преобразования Куммера—Лиувилля, а также найден вид допускаемых им инвариантных решений. Предложен алгоритмичный тест автономизации. Найдены *все* законы изменения функционального коэффициента при нелинейном члене обобщенного уравнения Эмдена—Фаулера, когда оно допускает точечные симметрии Ли. Построены обобщенные уравнения Ермакова и обобщенные динамические системы Ермакова.

В § 5 найден общий вид нелинейных неавтономных уравнений n-го порядка ($n > 2$), допускающий точную линеаризацию с помощью нелокального преобразования зависимой и независимой переменных. При этом впервые проведены факторизации нелинейных ОДУ. Проведена точная линеаризация обобщенных лиувиллевых динамических систем.

Показано, что уравнения Эйлера, описывающие классический случай Эйлера—Пуансо в динамике твердого тела, а также простейшие системы гидродинамического типа линеаризуются. Осуществлено построение преобразования Бэклунда, основанное на факторизации нелинейных дифференциальных операторов.

Как уже указывалось выше, развитые автором методы позволяют приступить на их основе к систематическому исследованию нестационарных и нелинейных задач механики и физики. Некоторым из них посвящены последние параграфы работы.

В § 6 для различных постановок обобщенной нестационарной задачи небесной механики двух тел (точек), допускающих однопараметрическую группу Ли, получены зависимости переменных масс тел от сопротивляющейся и гравитирующей среды. Найдены все законы изменения массы для классической задачи Гильдена—Мещерского, включающие как частные случаи законы Мещерского и Эддингтона—Джинса.

В § 7 найдены все инвариантные решения типа "бегущей волны" для уравнения Колмогорова—Петровского—Пискунова, полулинейные аналоги которого допускают разрешимые двумерные алгебры Ли, а также выявлена его связь с уравнениями Семенова и Зельдовича.

Указан новый подход для построения класса автомодельных решений, характеризующий т.н. режим с "обострением". Построен новый класс нелинейных эволюционных уравнений, для которого справедлив нелинейный принцип суперпозиции.

1. Метод факторизации обыкновенных дифференциальных операторов

В данном параграфе систематически представлен метод факторизации дифференциальных операторов n-го порядка через дифференциальные операторы первого порядка. Рассмотрены его применения к исследованию на совместность системы линейных дифференциальных уравнений, а также к нахождению решений уравнений в квадратурах. Результаты этого параграфа широко используются на протяжении всей статьи.

Определение 1.1. Дифференциальное поле F_0 — это пара (F, δ), состоящая из поля F и дифференцирования δ. Пусть K является числовым полем характеристики 0 (полем констант F). Оно может быть алгебраически замкнутым, хотя и не обязательно. Производную элемента $a \in F$ будем обозначать $\delta a = a'$. Поле F_0 при дифференцировании переходит в себя: $a \in F_0 \Rightarrow a' \in F_0$, а из $c \in K \Rightarrow c' = 0$.

Существуют различные виды дифференцирования. Но в нашей работе, как правило, будет рассматриваться обычное дифференцирование $\delta = D$, где $D = d/dx$.

Примером F_0 может служить пара $(K(x), D)$, где $K(x)$ — поле рациональных функций, имеющее своим полем констант K числовое поле R или поле C.

Кольцо $F_0[D]$ линейных обыкновенных дифференциальных операторов (ЛОДО) будем исследовать по аналогии с кольцом многочленов $K[x]$. Оно состоит из операторов вида

$$L = \sum_{i=0}^{n} a_i D^i, \quad a_i \in F_0.$$

Таким образом, в дальнейшем под основным дифференциальным полем F_0 будем подразумевать поле, порожденное коэффициентами a_i оператора L.

Операция "умножения" в кольце $F_0[D]$ определяется формулой Лейбница:

$$D^i b = \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} b^{(i-k)} D^k.$$

Легко проверяется, что кольцо $F_0[D]$ является ассоциативным, но некоммутативным.

Теорема 1.1. (Cayley [7]). *Для того чтобы операторы* $L_1 = \beta_1 D - \alpha_1$, $L_2 = \beta_2 D - \alpha_2$, $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in F_0$, *были коммутативны, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения*

$$\beta_2 = c\beta_1, \ \ \alpha_2 = c\alpha_1 + c_1, \ \ c, c_1 = \text{const}.$$

Кольцо $F_0[D]$ является евклидовым, а также кольцом главных идеалов: в нем имеет место деление с остатком согласно дифференциальному алгоритму Евклида. По аналогии с $K[x]$ находятся наибольший общий делитель (НОД) и наименьшее общее кратное (НОК) дифференциальных операторов. В силу некоммутативности кольца $F_0[D]$ рассматриваются правое и левое деления.

Пусть L_1, L_2 — два оператора. Правый (левый) ПНОД (ЛНОД) удовлетворяют неопределенным уравнениям соответственно

$$\text{ПНОД}(L_1, L_2) \equiv N_1 = XL_1 + YL_2, \quad \text{ЛНОД}(L_1, L_2) \equiv N_2 = L_1 X + L_2 Y,$$

имеющим решения в операторах X, Y.

Операторы L_1, L_2 взаимно просты справа (слева), если N_1 (N_2) является оператором 0-го порядка, т.е. элементом F_0.

ПНОК(L_1, L_2) (ЛНОК(L_1, L_2)) есть дифференциальный оператор наименьшего порядка, делящийся без остатка на операторы L_1, L_2 справа (слева).

Соответствующие примеры можно найти в [1].

Определение 1.2. Оператор L называется *факторизуемым* (*разложимым*) в F_0, если он допускает представление в виде произведения операторов более низкого порядка с коэффициентами из F_0, причем, если исходное числовое поле было K, то при факторизации оно может быть расширено до алгебраически замкнутого поля $\overline{K}$. В противном случае оператор L называется *нефакторизуемым* в F_0. (В данной работе в качестве поля K обычно выступает поле $\mathbf{R}$, а в качестве алгебраически замкнутого — поле $\mathbf{C}$).

Эквивалентным является следующее

Определение 1.3. Уравнение $Ly = 0$ порядка n является *факторизуемым* в F_0, если оно имеет общий нетривиальный интеграл с другим уравнением $My = 0$ порядка меньше n с коэффициентами из F_0. В противном случае $Ly = 0$ называется *нефакторизуемым* в F_0.

Если уравнение $Ly = 0$ имеет общий интеграл с уравнением $My = 0$, а ПНОД$(L, M) = L_1$, то $L = L_2L_1$. В этом случае уравнение $Ly = 0$ допускает понижение порядка подстановкой $L_1y = z$, вследствие чего придем к уравнению $L_2z = 0$.

Определение 1.4. Будем говорить, что L разложим на простые множители (делители) π_i в F_0, если имеет место факторизация: $L = \prod_{k=l}^{1} \pi_k^{s_k}$, $\sum_{k=1}^{l} m_k s_k = n$, $m_i = \operatorname{ord} \pi_i$, где π_i не допускают дальнейшей факторизации в F_0.

Подробнее рассмотрим факторизацию в F_0 через операторы 1-го порядка.

Предложение 1.1. Правый дифференциальный аналог теоремы Безу. *Остаток $f(x)$ от деления L справа на $D - \alpha$ равен выражению*

$$f(x) = \exp\left(-\int \alpha dx\right) L \exp\left(\int \alpha dx\right).$$

В кольце $F_0[D]$ имеют место схемы типа Горнера для алгебраических полиномов (см. [1, 4]).

Правый дифференциальный аналог схемы Горнера позволяет осуществить разложение вида

$$L = \sum_{s=0}^{n-1} \beta_s D^s (D - \alpha), \ \ \beta_{n-1} = 1.$$

Левый дифференциальный аналог схемы Горнера позволяет осуществить разложение вида

$$L = (D - \alpha) \sum_{s=0}^{n-1} \beta_s D^s, \ \ \beta_{n-1} = 1.$$

Для построения факторизации самосопряженных дифференциальных операторов используем преобразование сопряжения.

Определение 1.5. Преобразование сопряжения τ есть линейный оператор, который действует на ЛОДО согласно формулам:

$$\tau[p(x)D^n] = (-1)^n D^n p(x) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^{(k)} D^{n-k},$$

$$\tau[\sum_{s=0}^{n} C_s p_s(x) D^s] = \sum_{s=0}^{n} C_s \tau[p_s D^s], \quad C_s = \text{const}.$$

Оператор τL, формально сопряженный к L, обозначим через L^*.

$$L^* \equiv \tau\left(\sum_{k=0}^{n} a_k D^k\right) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k D^k a_k = \sum_{k=0}^{n} \sum_{s=0}^{k} (-1)^k \binom{k}{s} a_k^{(s)} D^{k-s}.$$

Пусть L, M — два ЛОДО. Тогда

$$\tau(LM) = \tau(M)\tau(L) = M^* L^*.$$

Предложение 1.2. Левый дифференциальный аналог теоремы Безу.

Остаток $g(x)$ *от деления оператора* L *на* $D-\alpha$ *слева равен выражению*

$$g(x) = \exp\left(\int \alpha dx\right) L^* \exp\left(-\int \alpha dx\right).$$

Предложение 1.3 *Самосопряженный оператор* L_{2n} *можно представить в виде*

$$L_{2n} \equiv \prod_{k=2n}^{1}(\beta_k D - \alpha_k) = \prod_{k=1}^{n}(\beta_k D + \beta_k' + \alpha_k)\prod_{k=n}^{1}(\beta_k D - \alpha_k).$$

Предложение 1.4. *Антисамосопряженный оператор порядка* L_{2n+1} *можно представить в виде*

$$L_{2n+1} \equiv \prod_{s=2n+1}^{1}(\beta_s D - \alpha_s) =$$

$$= \prod_{k=1}^{n}(\beta_k D + \beta_k' + \alpha_k)\left(-2\int \alpha_{n+1} dx D - \alpha_{n+1}\right)\prod_{k=n}^{1}(\beta_k D - \alpha_k).$$

Теорема 1.2. *Самосопряженный оператор, допускающий факторизацию*

$$L_{2n} = \prod_{k=1}^{n}\left(D + \frac{2n+1-2k}{2n-1}\alpha\right)\prod_{k=n}^{1}\left(D - \frac{2n+1-2k}{2n-1}\alpha\right),$$

можно представить в виде 2n-кратной итерации оператора 1-го порядка:

$$f(x)L_{2n} = \left[\exp\left(\frac{2}{2n-1}\int \alpha\, dx\right)(D-\alpha)\right]^{2n}, \quad f(x) = \exp\left(\frac{4n}{2n-1}\int \alpha\, dx\right).$$

Теорема 1.3. *Антисамосопряженный оператор, допускающий факторизацию*

$$L_{2n+1} = \prod_{k=1}^{n}\left(D + \frac{n+1-k}{n}\alpha\right) D \prod_{k=n}^{1}\left(D - \frac{n+1-k}{n}\alpha\right),$$

можно представить в виде (2n+1)–кратной итерации оператора 1-го порядка:

$$f(x)L_{2n+1} = \left[\exp\left(\frac{1}{n}\int \alpha dx\right)(D-\alpha)\right]^{2n+1}, \quad f(x) = \exp\left(\frac{2n+1}{n}\int \alpha\, dx\right).$$

Рассмотрим теперь в кольце $F_0[D]$ *операторное уравнение*

$$X_1L_1 + X_2L_2 + \cdots + X_qL_q = 0, \tag{1.1}$$

где

$$L_j = \sum_{k=0}^{n_j} a_{kj}D^k, \quad j \in \overline{1,q}, \quad n_j = \mathrm{ord}\ L_j,$$

а $X_j = \sum_{k=0}^{s_j} x_{jk}D^k$ — операторы с буквенными коэффициентами порядка $n^1 + n^m - n_j - 1$, где $n^1 = \max_j(n_j)$, $n^m = \min_j(n_j)$.

Перемножив операторы в (1.1), перепишем это уравнение в виде

$$\sum_{l=0}^{n^1+n^m-1} f_lD^l = 0, \tag{1.2}$$

где коэффициенты f_l — линейные формы от неизвестных x_{jk} с коэффициентами c_{rk}, зависящими от a_j и их производных, т.е. $c_{rk} \in F_0$. Для определения x_{jk} имеем систему линейных алгебраических уравнений, состоящую из $n^1 + n^m$ уравнений с $\sum_{j=1}^{m}(s_j + 1)$ неизвестными

$$f_l(\dots, x_{jk}, \dots) = 0, \quad l = \overline{0, n^1 + n^m - 1}, \quad j = \overline{1,q}, \quad k = \overline{0, s_j}. \tag{1.3}$$

Предположим, что ранг системы (1.3) равен r, т.е. равен порядку базисного минора. Без ограничения общности можно считать линейно независимыми формы f_l с номерами $l = \overline{n^1 + n^m - r, n^1 + n^m - 1}$.

С помощью коэффициентов c_{rk} систему (1.3) запишем в виде

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{p_i=0}^{s_i} x_{ip_i}c_{s_i-p_i,l-p_i}(a_i) = 0, \quad l = \overline{0, n^1 + n^m - 1}. \tag{1.4}$$

Определение 1.5. Правой результантной матрицей R операторов L_i, $i = \overline{1,q}$, назовем матрицу, совпадающую с матрицей системы (1.4) с точностью до транспонирования. Таким образом, по определению,

$$R = (M_1(a_1), \cdots, M_q(a_q))^T, \tag{1.5}$$

где $M_i(a_i)$ — матрица вида

$$M_i(a_i) = \begin{pmatrix} c_{s_in^1+n^m-1}(a_i) & c_{s_in^1+n^m-2}(a_i) & \dots & c_{s_i0}(a_i) \\ 0 & c_{s_i-1n^1+n^m-2}(a_i) & \dots & c_{s_i-10}(a_i) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & c_{0,n_1}(a_i) & c_{00}(a_i) \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

Определение 1.6. Левой результантной матрицей R^* операторов L_i, $i = \overline{1,q}$, назовем правую результантную матрицу операторов L_i^*, формально сопряженных к L_i.

Замечание 1.1. Результантные матрицы можно построить и более простым способом (если не ставить целью решение операторного уравнения (1.1)), применив аналог метода Сильвестра для построения результантов алгебраических полиномов. Так, для построения правой результантной матрицы нужно последовательно умножать оператор L_j слева на $1, D, D^2, \ldots, D^{n^1+n^m-n_j-1}$. Аналогичным образом для построения левой результантной матрицы будем последовательно умножать слева сопряженный оператор L_j^* на $1, D, D^2, \ldots, D^{n^1+n^m-n_j-1}$.

Введем обозначения: $r = \text{rank } R$, $r^* = \text{rank } R^*$, $d = \text{ord}$ ПНОД(L_j), $d^* = \text{ord}$ ЛНОД$(L_j) = \text{ord}$ ПНОД(L_j^*).

Теорема 1.4. (Беркович, Цирулик [8]). *Для дифференциально–результантной матрицы (ДРМ) справедливы равенства*:

$$n^1 + n^m = r + d, \ \ (n^1 + n^m = r^* + d^*).$$

Рассмотрим соответственно однородную и неоднородную системы линейных ОДУ

$$L_i y = 0, \tag{1.7}$$

$$L_i y = f_i, \ \ i = \overline{1, m}, \tag{1.8}$$

коэффициенты и правые части которых являются достаточно гладкими функциями вещественной переменной x и, по крайней мере, одна из функций $f_i \neq 0$.

Следующие теоремы являются *дифференциальными аналогами теоремы Кронекера-Капелли.*

Теорема 1.5. *Система (1.7) имеет нетривиальное решение в том и только в том случае, когда*

$$r < n^1 + n^m.$$

Теорема 1.6. *Система (1.8) совместна в том и только в том случае, когда*

$$\overline{n^1} + \overline{n^m} - \bar{r} > n^1 + n^m - r.$$

Здесь $\overline{L}_i = \left(D - \dfrac{f_i'}{f_i}\right) L_i$, $\bar{n}_j = \text{ord } \overline{L}_j$, $\bar{n}^1 = \max\limits_j(\bar{n}_j)$, $\bar{n}^m = \min\limits_j(\bar{n}_j)$, $\bar{r} = \text{rank } \overline{R}$.

Заметим, что Н.Н. Лузин [9] с помощью матричной теории исследовал на совместность системы ОДУ с постоянными коэффициентами[4].

[4]Матричная теория ДУ оказывается полезной не только в теории, но и в "целом ряде инженерных задач и, в частности, например, в задачах по теории регулирования", — отмечал акад. В.С. Кулебакин в предисловии к статье акад. Н.Н. Лузина [9].

Введенное понятие ДРМ (1.5), (1.6) было использовано в работах (Zwillinger D. [10], Carra'-Ferro G. [11] и др.). Оно распространяется также на нелинейные уравнения.

Одним из применений дифференциального результанта является установление условия коммутативности дифференциальных операторов взаимно простых порядков. Так, из коммутационного соотношения для операторов 2-го и 3-го порядков

$$L = D^2 + u(x), \ \ P = D^3 + 3A_2(x)D + A_3(x)$$

получается стационарное уравнение Кортевега—де Фриза

$$u''' + 6uu' + 12c_1u = 0, \ \ c_1 = \text{const}.$$

Используемое в работе понятие точного (лиувиллева или эйлерова) решения ЛОДУ основывается на следующем определении:

Определение 1.7. Будем говорить, что Λ является *обобщенным лиувиллевым* (*эйлеровым*) расширением дифференциального поля F_0, если существует башня полей $F_0 \subset F_1 \subset \ldots \subset F_n = \Lambda$ такая, что выполнено одно из условий:

1) $F_i = F_{i-1}(\alpha)$, где F_{i-1} является полем рациональных функций от α с коэффициентами из F_{i-1}, причем $\alpha' \in F_{i-1}$ (т.е. F_i получено из F_{i-1} присоединением интеграла от элемента поля F_{i-1});

2) $F_i = F_{i-1}(\alpha)$, где $\alpha \neq 0$ и $\dfrac{\alpha'}{\alpha} \in F_{i-1}$ (т.е. F_i получено из F_{i-1} присоединением экспоненты интеграла от элемента поля F_{i-1}) ;

3) $F_i = F_{i-1}(\alpha)$, где α — алгебраический над F_{i-1} элемент (т.е. α удовлетворяет алгебраическому уравнению степени $n > 2$ с коэффициентами из поля F_{i-1});

4) $F_i = F_{i-1}(y_1, y_2)$, где y_1, y_2 — линейно независимые решения уравнения 2-го порядка

$$y'' + a_1y' + a_0y = 0, \ \ a_1, \ \ a_0 \in F_{i-1}. \tag{1.9}$$

Если выполняются условия *1, 2, 3,* имеем *лиувиллево* расширение Λ_0 поля F_0, а если выполняются условия *1–4*, то имеем *эйлерово (обобщенное лиувиллево)* расширение Λ поля F_0. Таким образом, Λ включает в себя Λ_0.

Вместо термина *обобщенное лиувиллево* расширение можно употреблять термин *трансцендентное лиувиллево* расширение.

Определение 1.8. Расширением Пикара—Вессио PV для уравнения

$$Ly \equiv \sum_{s=0}^{n} a_s y^{(s)} = 0, \ \ a_s \in F_0, \tag{1.10}$$

называется содержащее алгебраически замкнутое поле констант характеристики нуль дифференциальное поле $F_0(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, где $y_1, y_2, \ldots, y_n$ образуют фундаментальную систему решений (ФСР) уравнения (1.10).

Определение 1.9. Уравнение (1.10) интегрируется в конечном виде в квадратурах, если $PV \subset \Lambda_0$.

Определение 1.10. Уравнение (1.10) имеет эйлерово решение (интегрируется в терминах (1.9)), если $PV \subset \Lambda$.

Если удается осуществить факторизацию уравнения (1.10) в F_0 или в его лиувиллевом расширении через операторы 1-го порядка, а именно

$$Ly \equiv \prod_{k=n}^{1} (D - \alpha_k) y = 0, \tag{1.11}$$

то его расширение $PV \in \Lambda_0$, причем ФСР уравнения (1.10) находится по формулам:

$$y_i = e^{\int \alpha_1 dx} \int e^{\int (\alpha_2 - \alpha_1) dx} dx \cdots \int e^{\int (\alpha_i - \alpha_{i-1}) dx} dx, \quad i = \overline{1, n}.$$

Если уравнение (1.10) имеет эйлерово решение, то его факторизация осуществляется через операторы 1-го и 2-го порядков.

Теорема 1.7. (Mammana [12]). *Всегда возможно и притом бесконечным числом способов факторизовать уравнение (1.10) через операторы 1-го порядка в виде (1.11), где α_k — комплекснозначные функции от x.*

Пример 1.1. Пусть дано уравнение

$$y'' + y = 0. \tag{1.12}$$

Оно допускает факторизации вида

$$(D^2 + 1)y \equiv \left(D + \frac{i(c_1 e^{ix} - c_2 e^{-ix})}{c_1 e^{ix} + c_2 e^{-ix}} \right) \left(D - \frac{i(c_1 e^{ix} - c_2 e^{-ix})}{c_1 e^{ix} + c_2 e^{-ix}} \right) y = 0, \quad i = \sqrt{-1},$$

где c_1, c_2 — произвольные постоянные, одновременно не обращающиеся в нуль.

Теорема 1.8. (Mammana [12]). *Пусть дано уравнение (1.10), где $a_s \in \mathrm{C}^s(I)$, $I = \{x \mid a < x < b\}$. Для того чтобы существовала в I факторизация вида (1.11), где α_k — достаточно гладкие вещественные функции, необходимо и достаточно, чтобы любое решение $y(x)$ уравнения (1.10) было неколеблющимся, т.е. чтобы оно имело в I не более, чем $n - 1$ нулей с учетом их кратности.*

Пример 1.2. Уравнение (1.12) допускает также следующие вещественнозначные факторизации

$$(D^2 + 1)y \equiv \left(D + \frac{-c_1 \sin x + c_2 \cos x}{c_1 \cos x + c_2 \sin x} \right) \left(D - \frac{-c_1 \sin x + c_2 \cos x}{c_1 \cos x + c_2 \sin x} \right) y = 0,$$

где факторизация существует всюду на вещественной оси, за исключением нулей знаменателя.

Обе приведенные выше теоремы Мамманы суть теоремы существования и не являются эффективными[5].

Для $n = 2$ существует алгоритм для нахождения лиувиллевых решений, если полем F_0 является поле рациональных функций $K(x)$ (см. Kovacic [13]).

Ниже будет рассмотрена, отличная от [13], процедура поиска факторизации уравнения 2-го порядка в квадратичном расширении поля $K(x)$. Она состоит из нескольких этапов:

Лемма 1.1. Аналог формул Виета. *Если*

$$L \equiv (D-\alpha_2)(D-\alpha_1)y = (D^2 + a_1 D + a_0)y = 0,$$

то

$$a_1 = -(\alpha_2 + \alpha_1), \quad a_0 = \alpha_2\alpha_1 - \alpha_1',$$

где α_1, α_2 *удовлетворяют уравнениям Риккати соответственно:*

$$\alpha_1' + \alpha_1^2 + a_1\alpha_1 + a_0 = 0, \quad \alpha_2' - \alpha_2^2 - a_1\alpha_1 - a_0 = 0.$$

Возьмем теперь двучленное уравнение

$$Ly \equiv y'' + a_0(x)y = 0, \quad a_0(x) \in F_0, \tag{1.13}$$

допускающее факторизацию

$$Ly \equiv (D+\alpha)(D-\alpha)y = 0, \quad \alpha = \alpha(x), \tag{1.14}$$

где α удовлетворяет уравнению Риккати

$$\alpha' + \alpha^2 + a(x) = 0. \tag{1.15}$$

Лемма 1.2. (см., например, Капланский [14]). *Для того чтобы факторизация (1.14) имела место в квадратичном расширении поля* $K(x)$, *т.е. чтобы функция* $\alpha(x)$ *удовлетворяла квадратному уравнению*

$$\alpha^2 - p(x)\alpha + q(x) = 0, \tag{1.16}$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения:

$$p'' + 3pp' + p^3 + 2a' + 4ap = 0,$$
$$2q = p' + p^2 + 2a.$$

Предложение 1.5. *Для того чтобы уравнение (1.13) допускало факторизацию в квадратичном расширении поля* F_0, *необходимо и достаточно, чтобы антисамосопряженный ДО 3–го порядка*

$$L_3 = D^3 + 4a(x)D + 2a'(x)$$

[5]Однако полученные автором результаты по методу факторизации были применены также в вычислительной математике (см. Улитин В.В. Итерационные алгоритмы решения краевых задач механики на ЭВМ. СПб.: Изд-во СПбУ, 1991).

допускал факторизацию в F_0, *а именно*:

$$L_3 = (D^2 + pD + 2p' + p^2 + 4a)(D - p), \quad p, a \in F_0.$$

Пример 1.3. Уравнение

$$Ly \equiv y'' - \left(bx + \frac{5}{16}\frac{1}{x^2}\right) y = 0, \ \ b = \text{const}$$

допускает факторизацию

$$Ly \equiv \left(D - \frac{1}{4x} \pm \sqrt{bx}\right)\left(D + \frac{1}{4x} \mp \sqrt{bx}\right) y = 0.$$

Детали факторизации приведены в [1].

Рассмотрим теперь факторизацию операторов в трансцендентных лиувиллевых расширениях поля F_0.

Факторизация оператора Ламе. Пусть дано уравнение Ламе

$$Ly \equiv y'' - (2\wp(x) + \lambda)y = 0, \ \ \lambda = \wp(\varepsilon), \tag{1.17}$$

где $\wp(x)$ — эллиптическая пи-функция Вейерштрасса. Факторизация оператора Ламе $L = D^2 - 2\wp(x) - \wp(\varepsilon)$ может быть представлена в следующих двух основных формах (Burchnall J.L.,Chaundy T.W. [15]):

$$L = [D + \zeta(x \pm \varepsilon) - \zeta(x) \mp \zeta(\varepsilon)][D - \zeta(x \pm \varepsilon) + \zeta(x) \pm \zeta(\varepsilon)] \tag{1.18}$$

в соответствии с выбором знаков "+" и "−", где $\zeta(x)$ – дзета–функция Вейерштрасса. Тогда общее решение уравнения (1.17) можно представить в виде

$$y(x) = C_1 \frac{\sigma(x+\varepsilon)}{\sigma(x)} e^{-\zeta(\varepsilon)x} + C_2 \frac{\sigma(x-\varepsilon)}{\sigma(x)} e^{\zeta(\varepsilon)x}. \tag{1.19}$$

При этом функции Вейерштрасса $\wp(x)$, $\zeta(x)$, $\sigma(x)$ связаны соотношениями:

$$\wp(x) = -\zeta'(x), \ \ \zeta(x+\varepsilon) - \zeta(x) - \zeta(\varepsilon) = \frac{\wp'(x) - \wp'(\varepsilon)}{\wp(x) - \wp(\varepsilon)}, \ \ \zeta(x) = \frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)}.$$

Факторизация (1.18) была забыта и не применялась. Автор впервые ее использовал для получения решений некоторых уравнений Шрёдингера с тригонометрическими и гиперболическими функциями в качестве потенциалов.

Пример 1.4. Рассмотрим уравнение

$$Ly \equiv y'' - \left(\frac{2}{\sin^2 x} + \operatorname{ctg}^2 \varepsilon\right) y = 0.$$

В данном уравнении $\wp(x) = 1/\sin^2 x - 1/3$. Оно допускает факторизацию

$$Ly \equiv [D + \operatorname{ctg}(x \pm \varepsilon) - \operatorname{ctg} x \mp \operatorname{ctg} \varepsilon]][D - \operatorname{ctg}(x \mp \varepsilon) + \operatorname{ctg} x \pm \operatorname{ctg} \varepsilon]y = 0$$

и имеет общее решение

$$y = C_1 \frac{\sin(x \pm \varepsilon)}{\sin x} e^{\mp x \operatorname{ctg} \varepsilon} + C_2 \frac{\sin(x \mp \varepsilon)}{\sin x} e^{\pm x \operatorname{ctg} \varepsilon}.$$

Как мы видим, для этого уравнения формулы (1.18) и (1.19) модифицированы.

Рассмотрим теперь систему уравнений Ламе (1.17) и Альфана

$$y''' - 3\wp(x)y' - (\frac{3}{2}\wp'(x) + \mu)y = 0, \quad \mu = \frac{1}{2}\wp'(\alpha), \tag{1.20}$$

где оператор Альфана

$$L = D^3 - 3\wp(x)D - \left(\frac{3}{2}\wp'(x) + \frac{1}{2}\wp'(\alpha)\right)$$

допускает следующую факторизацию [1]:

$$L = \left[D^2 + \frac{1}{2}\frac{\wp'(x) - \wp'(\alpha)}{\wp(x) - \wp(\alpha)}D + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(x) - \wp'(\alpha)}{\wp(x) - \wp(\alpha)}\right)^2 + \left(\frac{\wp'(x) - \wp'(\alpha)}{\wp(x) - \wp(\alpha)}\right)' - 3\wp(x)\right]\left[D - \frac{1}{2}\frac{\wp'(x) - \wp'(\alpha)}{\wp(x) - \wp(\alpha)}\right].$$

Оператор L может быть также представлен в виде факторизации через операторы 1-го порядка:

$$L = [D + \zeta(x + \alpha + \beta) - \zeta(x) - \zeta(\alpha) - \zeta(\beta)][D - \zeta(x + \alpha + \beta) + \zeta(x + \alpha) + \zeta(\beta)] \times$$
$$\times [D - \zeta(x + \alpha) + \zeta(x) + \zeta(\alpha)],$$

а $\wp(\alpha)$, $\wp(\beta)$, $\wp(\gamma)$ суть корни характеристического уравнения $\wp'^2(x) - \wp'^2(\alpha) = 0$, $\wp(\alpha) + \wp(\beta) + \wp(\gamma) = 0$. Общее решение уравнения (1.20) имеет вид

$$y(x) = C_1 \frac{\sigma(x + \alpha)}{\sigma(x)} e^{-x\zeta(\alpha)} + C_2 \frac{\sigma(x + \beta)}{\sigma(x)} e^{-x\zeta(\beta)} C_3 \frac{\sigma(x + \gamma)}{\sigma(x)} e^{-x\zeta(\gamma)}.$$

В работах [1, 4] доказана совместность системы Ламе—Альфана, найдена ее собственная функция $\psi(x, \lambda, \mu) = \tilde{\psi}(x, \alpha)$ как в общем случае, так и в вырожденных случаях, когда коэффициентами являются рациональные, тригонометрические и гиперболические функции. Совместность системы Ламе—Альфана эквивалентна условию коммутативности пары соответствующих дифференциальных операторов 2-го и 3-го порядков.

В частности, коммутативны следующие операторы:

$$L = D^3 - \frac{3}{x^2}D + \frac{3}{x^3} + \frac{1}{\alpha^3}, \quad M = D^2 - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{\varepsilon^2},$$

соответствующие вырожденному случаю $\wp(x) = x^{-2}$.

Пример 1.5. Уравнение

$$Ly \equiv y''' - \frac{3}{x^2}y' + \left(\frac{3}{x^3} + \frac{1}{\alpha^3}\right) y = 0$$

допускает факторизацию

$$Ly \equiv \left(D + \frac{1}{x+\alpha+\beta} - \frac{1}{x} - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right)\left(D - \frac{1}{x+\alpha+\beta} + \frac{1}{x+\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)\times$$

$$\times\left(D - \frac{1}{x+\alpha} + \frac{1}{x} + \frac{1}{\alpha}\right) y = 0$$

и имеет общее решение

$$y = C_1\frac{x+\alpha}{x}e^{-x/\alpha} + C_2\frac{x+\beta}{x}e^{-x/\beta} + C_3\frac{x+\gamma}{x}e^{-x/\gamma}.$$

Замечание 1.2. Применение в качестве единственного метода интегрирования ОДУ метода факторизации без использования преобразования переменных значительно снижает его эффективность и тем самым успешность проведения интегрирования. Поэтому в дальнейшем метод факторизации будет применяться совместно с методом преобразований, что гораздо более действенно, чем применение каждого из указанных методов в отдельности.

2. Родственные уравнения второго порядка

Куммер (Kummer [16]) (1834 г.) и Лиувилль (Liouville J. [17]) (1837 г.) поставили задачу о приведении ЛОДУ 2-го порядка с переменными коэффициентами к ЛОДУ 2-го порядка наперед заданного вида, иными словами, задачу об эквивалентности ЛОДУ-2. Помимо чисто теоретического интереса, она имеет большое прикладное значение, ибо от того, удастся ли преобразовать данное уравнение к известному виду, интегрируемому в квадратурах или в специальных функциях (в терминах лиувиллевых или эйлеровых расширений), зависит конструктивное решение многих фундаментальных задач естествознания и техники.

Решение задачи Куммера для глобальных преобразований дано Борувкой (Borůvka O. [18]), а для локальных преобразований — автором [3,19]). При этом автор особое внимание уделил эффективному нахождению преобразований. Отметим, что используемое преобразование Куммера—Лиувилля (КЛ) является наиболее общим точечным преобразованием, сохраняющим линейность и порядок уравнений (см. Stäckel P. [20]). Решение задачи эквивалентности Куммера как раз и состояло в нахождении всего множества преобразований КЛ.

Как известно, основным препятствием к интегрированию являлось отсутствие эффективных способов нахождения подходящих замен переменных. В этом параграфе предложен такой способ (один из возможных). Показано, как можно строить двусторонние последовательности родственных уравнений, исходя из одного порождающего уравнения. Задача Куммера оказалась связанной с сопутствующими нелинейными уравнениями (Ермакова и Куммера—Шварца), для которых справедливы соответствующие принципы нелинейной суперпозиции.

В этом же параграфе используется и другой тип преобразования, известный под названием преобразования Дарбу. (Автор употребляет более корректное название, а именно преобразование Эйлера—Имшенецкого—Дарбу (ЭИД)). Оно широко применяется в физике, особенно при изучении уравнения Шрёдингера.

Рассматривается способ размножения интегрируемых уравнений, основанный также на указанном преобразовании. Это делается как с целью сопоставления двух важнейших процедур генерирования семейств родственных уравнений, так и для выявления связи между преобразованиями КЛ и ЭИД, которая была установлена автором впервые.

2.1. Постановка задачи Куммера

Пусть даны уравнения

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0, \quad a_1(x) \in \mathrm{C}^1(I), \quad a_0(x) \in \mathrm{C}(I), \quad I = \{x \mid a < x < b\}, \tag{2.1}$$

$$\ddot{z} + b_1(t)\dot{z} + b_0(t)z = 0, \quad b_1(t) \in \mathbf{C}^1(J), \quad b_0(t) \in \mathrm{C}(J), \quad J = \{t \mid \alpha < t < \beta\}, \tag{2.2}$$

где I и J — открытые (конечные или бесконечные) интервалы, а также преобразование КЛ

$$y = v(x)z, \quad dt = u(x)dx, \quad v, u \in \mathbf{C}^2(I_0), \quad uv \neq 0, \quad \forall x \in I_0 \subset I. \tag{2.3}$$

Задача Куммера состоит в нахождении всего множества локальных преобразований КЛ (2.3), преобразующих (2.1) в (2.2).

Теорема 2.1. *Уравнение (2.1) приводится к (2.2) преобразованием (2.3) тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

$$v(x) = |u(x)|^{-1/2} \exp\left(-1/2 \int a_1(x)\,dx + 1/2 \int b_1(t)\,dt\right); \tag{2.4}$$

$$\{t, x\} + B_0(t)t'^2 = A_0(x), \quad (t' = u(x)), \tag{2.5}$$

где $\{t, x\} = \dfrac{1}{2}\dfrac{t'''}{t'} - \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{t''}{t'}\right)^2$ *есть производная Шварца,* $A_0(x) = a_0 - \frac{1}{4}a_1^2 - \frac{1}{2}a_1'$, $B_0(t) = b_0 - \frac{1}{4}b_1^2 - \frac{1}{2}\dot{b}_1$ *суть соответственно полуинварианты* *уравнений (2.1), (2.2) относительно преобразований зависимых переменных* $y = \mu(x)Y$, $z = \nu(t)Z$, *а* $\mu(x)$, $\nu(t)$ *— достаточно гладкие функции.*

Уравнение (2.5) будем называть уравнением Куммера—Шварца 3-го порядка (КШ-3).

Лемма 2.1. *Уравнение (2.1), приводимое к уравнению с постоянными коэффициентами*

$$\ddot{z} \pm b_1\dot{z} + b_0 z = 0, \;\; b_1, b_0 = \mathrm{const} \tag{2.6}$$

преобразованием (2.3), допускает факторизации:

а) через некоммутативные операторы 1-го порядка:

$$Ly \equiv \left(D - \frac{v'}{v} - \frac{u'}{u} - r_2 u\right)\left(D - \frac{v'}{v} - r_1 u\right) y = 0,$$

б) через коммутативные операторы 1-го порядка:

$$\frac{1}{u^2}Ly \equiv \left(\frac{1}{u}D - \frac{v'}{uv} - r_2\right)\left(\frac{1}{u}D - \frac{v'}{uv} - r_1\right) y = 0,$$

где r_1, r_2 *– корни характеристического уравнения* $r^2 \pm b_1 r + b_0 = 0$.

Теорема 2.2. *Уравнение (2.1) приводится к (2.6) преобразованием КЛ, причем:*

а) уравнение (2.1) допускает однопараметрическую группу Ли с инфинитезимальным оператором

$$X \equiv \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{u}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{v'}{uv}y\frac{\partial}{\partial y}; \tag{2.7}$$

б) $u(x)$ *удовлетворяет уравнению Куммера—Шварца 2-го порядка (КШ-2)*

$$\frac{1}{2}\frac{u''}{u} - \frac{3}{4}\left(\frac{u'}{u}\right)^2 - \frac{1}{4}\delta u^2 = A_0(x), \quad \delta = b_1^2 - 4b_0; \tag{2.8}$$

в) функции $v(x)$ *и* $u(x)$ *связаны между собою соотношениями*

$$v(x) = |u(x)|^{-1/2}\exp(-1/2\int a_1(x)dx \pm 1/2 b_1 \int u dx),$$

$$v'' + a_1 v' + a_0 v - b_0 u^2 v = 0; \tag{2.9}$$

г) v *удовлетворяет одному из нелинейных уравнений*

$$v'' + a_1 v' + a_0 v - b_0 v^{-3}\exp(-2\int_{x_0}^{x} a_1 dx) = 0, \;\; b_1 = 0, \tag{2.10}$$

или при $b_1 \neq 0$

$$v'' + a_1 v' + a_0 v - b_0 v^{-3}\exp\left(-2\int_{x_0}^{x} a_1 dx\right)\left(b_1\int_{x_0}^{x} v^{-2}\exp\left(-\int_{x_0}^{x} a_1\, dx\right) dx\right)^{-2} = 0; \tag{2.11}$$

д) функция $R(x) = \exp(-\int a_1 dx)u^{-1}$ *является резольвентой уравнения (2.1) и удовлетворяет уравнению*

$$R''' + 3a_1R'' + (4a_0 + a_1' + 2a_1^2)R' + (2a_0' + 4a_0a_1)R = 0. \qquad (2.12)$$

Таким образом, задача Куммера оказалась связанной как с линейными уравнениями (2.9) и (2.12), так и нелинейными уравнениями (2.8), (2.10), (2.11). Для последних выполняются те или иные принципы нелинейной суперпозиции.

Определение принципа нелинейной суперпозиции

Будем говорить, что для ОДУ

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \qquad (2.13)$$

система функций

$$\{Y_1(X), \ldots, Y_m(X)\} \qquad (2.14)$$

является фундаментальной системой решений (ФСР), если его общее решение $y(x)$ можно представить в виде функции (конкретной или произвольной)

$$y(x) = \varphi(Y_1, \ldots, Y_m; c_1, \ldots, c_n), \qquad (2.15)$$

где $c_1, \ldots, c_n$ — произвольные постоянные. Система (2.14) состоит либо из частных функционально независимых решений самого уравнения (2.13), либо образует ФСР для присоединенного линейного уравнения

$$Y^{(m)}(X) + \sum_{k=1}^{m} a_k(X)Y^{(k)}(X) = 0,$$

либо состоит из частных функционально независимых решений присоединенного нелинейного уравнения

$$F(X, Y, Y', \ldots, Y^{(m)}) = 0.$$

При этом новые переменные X, Y связаны со старыми переменными x, y точечными или неточечными преобразованиями.

Выражение (2.15) будем называть принципом нелинейной суперпозиции (ПНС).

Это определение охватывает определение ПНС, данное С. Ли (см. S. Lie [21]).

Если известны одновременно ФСР и ПНС, то можно построить соответствующее нелинейное уравнение.

Если положить в (2.10) $a_1 = 0$, то получим уравнение Ермакова (Ермаков В.П. [22])[6]

$$v'' + a_0(x)v - b_0v^{-3} = 0. \qquad (2.16)$$

[6]Работа Ермакова [22] была фактически забыта и стала известной после появления статьи Берковича и Розова [23].

Позднее оно было переоткрыто (Pinney E. [24]).

Предложение 2.1. *Уравнение Ермакова имеет общее решение*

$$v(x) = \sqrt{Ay_2^2 + By_2y_1 + Cy_1^2}, \;\; \delta = B^2 - 4AC = -4b_0, \qquad (2.17)$$

где y_1, $y_2 = y_1 \int y_1^{-2} dx$ *образуют ФСР присоединенного уравнения* (1.13).

Формула (2.17) есть ПНС для (2.16).

Предложение 2.2. *Уравнение КШ-2 (2.8) имеет следующее общее решение, зависящее от* δ*:*

$$u(x) = \lambda(x)(Ay_2^2 + By_1y_2 + Cy_1^2)^{-1}, \;\; \delta = B^2 - 4AC. \qquad (2.18)$$

Здесь $\lambda(x) = \exp(-\int a_1 dx)$, $y_2 = y_1 \int \lambda(x) y_1^{-2} dx$, *т.е.* y_1, y_2 *образуют ФСР уравнения (2.1).*

Формула (2.18) есть ПНС для (2.8).

Теорема 2.3. *Множество ЛОДУ-2 преобразуется в себя с помощью преобразования КЛ, которое определяется формулами (2.4) и следующим выражением:*

$$\int \exp\left(-\int b_1 dt\right) z_1^{-2} dt = \frac{c_1 + c_2 \int \exp(-\int a_1 dx) y_1^{-2} dx}{c_3 + c_4 \int \exp(-\int a_1 dx) y_1^{-2} dx}, \;\; c_1c_4 - c_2c_3 \neq 0, \qquad (2.19)$$

где y_1 *и* z_1 *— какие-нибудь частные решения уравнений (2.1) и (2.2) соответственно.*

Применим преобразование КЛ для построения алгебры Ли точечных симметрий уравнения (2.1). Она 8-мерная, изоморфна $sl(3, \mathbf{R})$. Ее базисом служат следующие векторные поля (инфинитезимальные операторы):

$$X_1 = \frac{1}{u}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{v'}{uv} y \frac{\partial}{\partial y}, \;\; X_2 = v\frac{\partial}{\partial y}, \;\; X_3 = X_1 \int u dx, \;\; X_4 = X_2 \int u dx,$$

$$X_5 = y/v X_1, \;\; X_6 = y\frac{\partial}{\partial y}, \;\; X_7 = (\int u dx)^2 X_1 + (y/v \int u dx) X_2,$$

$X_8 = (y/v \int u dx) X_1 + (y/v)^2 X_2$, где $u(x)$ удовлетворяет уравнению КШ-2

$$\frac{1}{2}\frac{u''}{u} - \frac{3}{4}\left(\frac{u'}{u}\right)^2 = A_0(x), \;\; \text{а} \;\; v(x) = |u|^{-1/2} \exp(-1/2 \int a_1 dx).$$

Для дальнейшего нам понадобится также т.н. *присоединенное базисное* уравнение

$$y'' + a_1 y' + a_0 y - b_0 u^2 y = 0. \qquad (2.20)$$

Решением (2.20) служит функция $y = v(x)$ (см. уравнение (2.9)). Классическое уравнение Лиувилля

$$y'' + k(ax^2 + bx + c)^{-2} y = 0, \;\; a, b, c, k = \text{const} \qquad (2.21)$$

является присоединенным базисным уравнением по отношению к уравнению
$$y'' = 0. \tag{2.22}$$

Известно, что специальный случай уравнения Лиувилля, а именно уравнение
$$y'' + (\alpha x + \beta)^{-4} y = 0$$
является эталонным для т.н. метода WKB (ВКБ), появившегося в конце 20-х гг. XX столетия и создателями которого считаются физики G. Wentzel, H.A. Kramers и L. Brillouin. Автором показано (см. [1, гл. 2]), что естественное обобщение метода ВКБ имеет своим эталоном общее уравнение Лиувилля (2.21). Заметим, что одновременно и независимо от авторов метода ВКБ советские физики А.А. Андронов, М.А. Леонтович и Л.И. Мандельштам [25], основываясь на преобразовании Лиувилля (так они называли преобразование КЛ), нашли асимптотическое решение уравнения колебаний маятника переменной длины $l = l(x)$ в переменном поле силы тяжести $g = g(x)$:
$$(l^2 y')' + \mu^2 g l y = 0, \quad \mu = \text{const}.$$

Уравнение Лиувилля использовал также А.Н. Крылов [26] для построения приближенного аналитического решения уравнения $y'' + n^2(x)y = 0$ на отрезке от 0 до X, разбивая его на равные или неравные части и аппроксимируя функцию $n^2(x)$ каждый раз с достаточной точностью выражением $a^2/[1 + b(x-c)^2]^2$ с соответствующим подбором параметров a, b, c. Частным случаем неоднородного уравнения Лиувилля является уравнение Стокса
$$y'' + q^2(lx - x^2)^{-2} y = p, \qquad p, q, l = \text{const}.$$
Буссинеск, применив к уравнению Стокса замену переменных
$$y = \frac{pl^2}{8} \frac{1}{\operatorname{ch} t} z, \qquad t = \frac{1}{2} \ln \frac{x}{l - x}, \tag{2.23}$$
преобразовал его в неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами
$$\ddot{z} + (4q^2/l^2 - 1) z = 2/\operatorname{ch}^3 t.$$
Подстановка Буссинеска (2.23) считалась "замечательным примером интегрируемости", одним из "чудес интегрируемости" (см. А.Н. Крылов [27], Я.Г. Пановко, И.И. Губанова [28]). В [1, 3] показано, как указанная подстановка может быть естественным путем получена. Тем самым раскрыта тайна нахождения подобных подстановок, и их открытие перестает быть "чудом".

Совместное рассмотрение преобразования переменных и факторизации позволило найти ряд важных специальных факторизаций уравнений второго порядка и, следовательно, найти их лиувиллевы и эйлеровы (точные) решения.

Создана программа для факторизации и нахождения лиувиллевых решений ЛОДУ-2 с переменными коэффициентами, исходя из возможности их преобразования в ЛОДУ-2 с постоянными коэффициентами, реализованная в системе компьютерной алгебры REDUCE[7].

Мы будем называть *родственными* уравнения (2.1) и (2.20), связанные между собой преобразованием КЛ.

Уравнение (1.13) с коэффициентом a_0 ("носителем" данного уравнения) обозначим через (a_0).

Теорема 2.4. [29] *Уравнение* (a_0) *порождает последовательность родственных уравнений* (a_k)

$$y_k'' + a_k y_k = 0, \tag{2.24}$$

где

$$a_k = a_0 - \sum_{s=1}^{k} b_{0s} u_s^2, \quad b_{0s} = const \neq 0, \quad a_k = a_{k-1} - b_{0k} u_k^2,$$

а функции $u_s(x)$ *удовлетворяют последовательности уравнений КШ–2:*

$$\frac{1}{2}\frac{u_s''}{u_s} - \frac{3}{4}\left(\frac{u_s'}{u_s}\right)^2 - \frac{1}{4}\delta_s u_s^2 = a_{s-1},$$

при этом $\delta_s = b_{1s}^2 - 4b_{0s}$ *являются дискриминантами характеристических уравнений:* $r_s^2 \pm b_{1s} r_s + b_{0s} = 0$. *Тогда линейно независимые решения* $y_{k(1,2)}$ *имеют вид:*

$$y_{k(1,2)} = |u_k|^{-1/2} \exp\left(\pm 1/2 b_{1k} \int u_k dx\right), \ \ b_{1k} \neq 0,$$

---

[7] См. следующие работы:

Berkovich L.M., Berkovich F.L. SOLDE: A REDUCE package for solving of second order linear ordinary differential equations // В кн.: Современный групповой анализ и задачи математического моделирования, XI Российский коллоквиум, Самара, 7–11 июня 1993 / Редакторы: Н.Х. Ибрагимов, Л.М. Беркович. Самара: Изд-во Самарского госуниверситета, 1993. С. 38–45.

Berkovich L.M., Berkovich F.L. Transformation and factorization of second order linear ordinary differential equations and its implementation in REDUCE // Univ. Beograd, Publ. Elektrotechn. Fak. Ser. Mat. 1995. No. 6. P. 11–24.

Графическое представление полученных решений было дано в работе:

Беркович Л.М., Фролов И.С. Представление решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка с использованием языка REDUCE и графического пакета GNUPLOT // Вестник Самарского гос. университета. 1997. № 2. С. 109–114.

$$y_{k1} = |u_k|^{-1/2}, \ \ y_{k2} = |u_k|^{-1/2} \int u_k dx, \ \ b_{1k} = 0.$$

Построим некоторые конкретные примеры, принадлежащие основной последовательности (0-*последовательности*) родственных уравнений, порожденной уравнением (2.22), т.е. уравнением (0). К 0-*последовательности* принадлежат, например, уравнение Лиувилля (2.21), а также уравнение

$$y'' - [m(m+1)x^{-2} + T^{-4}]y = 0, \ \ T = \alpha x^{-m} + \beta x^{m+1}, \ \ m \neq -1/2, \ \ \alpha, \ \ \beta = \mathrm{const}$$

с общим решением

$$y(x) = T\left[M \operatorname{ch}\left(\frac{x^{-m}}{\gamma T}\right) + N \operatorname{sh}\left(\frac{x^{-m}}{\gamma T}\right)\right], \ \ \gamma = (2m+1)\beta,$$

и уравнение

$$y'' + (1/4x^{-2} + x^{-2}S^{-4})y = 0, \ \ S = \alpha \ln x + \beta$$

с общим решением

$$y(x) = \sqrt{x}S\left[M\cos\left(\frac{1}{\alpha S}\right) + N\sin\left(\frac{1}{\alpha S}\right)\right],$$

возникшие при исследовании радиального уравнения Шрёдингера для частицы в поле центральных сил (см. Фрёман Н., Фрёман П.У. [30, с. 137–139]). К 0-*последовательности* относятся также следующие уравнения с тригонометрическими и гиперболическими функциями в качестве коэффициентов:

$$y'' + m^2 y + d(a\sin^2 mx + b\sin mx\cos mx + c\cos^2 mx)^{-2}y = 0,$$

$$y'' - m^2 y + d(a \operatorname{sh}^2 mx + b \operatorname{sh} mx \operatorname{ch} mx + c \operatorname{ch}^2 mx)^{-2}y = 0.$$

Последние два примера входят в класс уравнений Айнса—Шрёдингера. Их общие решения соответственно могут быть представлены в виде:

$$y(x) = \sqrt{A\sin^2 mx + B\sin mx\cos mx + C\cos^2 mx} \times \\ \times \exp\left(\pm\frac{b_1}{\sqrt{-\delta}} \operatorname{arctg} \frac{2A\sin mx + B\cos mx}{\sqrt{-\delta}\cos mx}\right),$$

$$y(x) = \sqrt{A \operatorname{sh}^2 mx + B \operatorname{sh} mx \operatorname{ch} mx + C \operatorname{ch}^2 mx} \times \\ \times \exp\left(\pm\frac{b_1}{\sqrt{-\delta}} \operatorname{arctg} \frac{2A \operatorname{sh} mx + B \operatorname{ch} mx}{\sqrt{-\delta} \operatorname{ch} mx}\right),$$

где $d = -b_0$, $\delta = B^2 - 4AC = b_1^2 - 4b_0$.

2.2. Постановка задачи Эйлера

Пусть дано уравнение (a_0), $a_0 \in C(I)$.

Требуется привести его к наперед заданному виду

$$z'' + b_0(x)z = 0, \;\; b_0 \in C(I) \qquad (b_0)$$

обратимым преобразованием Эйлера—Имшенецкого—Дарбу (ЭИД) (см. Эйлер [31], Имшенецкий [32], Дарбу [33]).

$$z = \beta(x)y' - \alpha(x)y, \;\; \beta(x), \alpha(x) \in \mathrm{C}^2(I), \;\; \beta \neq 0. \qquad (2.25)$$

Для этого необходимо и достаточно, чтобы функции α, β, a_0, b_0 *удовлетворяли любому из эквивалентных первых интегралов*

$$\alpha'\beta - \alpha\beta' + \alpha^2 + a_0\beta^2 = C, \;\; \alpha'\beta - \alpha\beta' + \alpha^2 + \beta\beta'' + b_0\beta^2 = C,$$

где $C \neq 0$ *— постоянная интегрирования, причем* $b_0 = a_0 + (2\alpha' + \beta'')/\beta$.

Мы будем называть *родственными* не только уравнения (2.24), но и уравнения, связанные между собою преобразованием ЭИД.

Операторные тождества. Введем следующие дифференциальные операторы:

$$A = D^2 + a_0, \;\; A_k = D^2 + a_k, \;\; L_k = \prod_{s=1}^{k} (D - \alpha_{s-1}), \qquad (2.26)$$

где

$$a_k = a_0 + 2\sum_{s=1}^{k} \alpha'_{s-1} = a_0 + 2\sum_{s=1}^{k} \left(\frac{\tilde{y}'_{s-1}}{\tilde{y}_{s-1}}\right)' = a_0 + 2\sum_{s=1}^{k} (\ln \tilde{y}_{s-1})'', \qquad (2.27)$$

α_{s-1} удовлетворяют уравнениям Риккати

$$\alpha'_{s-1} + \alpha^2_{s-1} + a_{s-1} = \lambda_{s-1},$$

а $\tilde{y}_{s-1}$ — собственные функции уравнений

$$y''_{s-1} + (a_{s-1} - \lambda)y_{s-1} = 0,$$

отвечающие собственным значениям $\lambda = \lambda_{s-1}$.

Теорема 2.6. *Решениями операторных уравнений* $X_kA = A_kX_k$, $k = 1, 2, \ldots$, *являются операторы* $X_k = L_k$, *а решениями родственных уравнений* $A_ky = 0$ *являются функции* $y_k(x) = L_ky_0(x)$, *где* $y_0(x)$ *— решение уравнения* $Ay = 0$, *а операторы* A, A_k, L_k *вычисляются по формулам* (2.26).

Для представления решения уравнения Шрёдингера при некоторых потенциалах используется операторное тождество

$$\prod_{k=n}^{0} [D - k(\ln \tilde{y}_0)'] = \tilde{y}_0^{n+1}(\tilde{y}_0^{-1}D)^{n+1}.$$

Родственными по отношению к уравнению

$$y'' - \lambda y = 0$$

являются, в частности, следующие уравнения:

Уравнение	Общее решение
$y_n'' - \left(\lambda + \dfrac{n(n+1)}{x^2}\right) y_n = 0$	$y(x) = x^{n+1} \left(\dfrac{1}{x} D\right)^{n+1} (C_1 e^{\sqrt{\lambda} x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda} x})$
$y_n'' - \left(\lambda + \dfrac{n(n+1)}{\cos^2 x}\right) y_n = 0$	$y = \cos^{n+1} x \left(\dfrac{1}{\cos x} D\right)^{n+1} (C_1 e^{\sqrt{\lambda} x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda} x})$
$y_n'' - \left(\lambda + \dfrac{n(n+1)}{\sin^2 x}\right) y_n = 0$	$y = \sin^{n+1} x \left(\dfrac{1}{\sin x} D\right)^{n+1} (C_1 e^{\sqrt{\lambda} x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda} x})$

Аналогичным образом находятся общие решения для уравнений:

$$y_n'' - \left(\lambda - \frac{n(n+1)}{\operatorname{ch}^2 x}\right) y_n = 0, \quad y_n'' - \left(\lambda + \frac{n(n+1)}{\operatorname{sh}^2 x}\right) y_n = 0.$$

Теорема 2.7. *Для того чтобы уравнение (2.1) преобразовывалось в себя, т.е. приводилось к виду*

$$z'' + a_1(x) z' + a_0(x) z = 0, \quad a_1(x) \in \mathbf{C^1}(I), \quad a_0(x) \in \mathrm{C}(I),$$

преобразованием (2.25), где $\alpha'\beta - \alpha\beta' + \alpha^2 + a_0\beta^2 + a_1\alpha\beta = C \neq 0$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\beta(x) = u^{-1}(x), \quad \alpha(x) = v' v^{-1} u^{-1},$$

где $u(x)$ *и* $v(x)$ *задействованы в преобразовании КЛ, преобразующем (2.1) в уравнение с постоянными коэффициентами (2.6).*

3. Задачи Альфана

В данном параграфе даются решения классических задач Альфана об эквивалентности и приводимости линейных уравнений n-го порядка ($n > 2$). Как показано во 2-м параграфе, аналогичная задача Куммера для уравнений 2-го порядка при достаточно общих предположениях о его коэффициентах *всегда разрешима.*

За свою работу, в которой были классифицированы линейные уравнения 3-го и 4-го порядков, Альфан был удостоен Grand Prix Парижской Академии наук (G.-H. Halphen [34]). Однако на протяжении длительного времени после этого классификация линейных уравнений более высокого порядка не была произведена. Автор в этом параграфе дает классификацию уравнений произвольного порядка. Находятся инварианты и строятся соответствующие канонические формы.

Применив метод факторизации и распространив понятие дифференциального результанта на нелинейные уравнения, предложен алгоритмичный способ нахождения инвариантов линейных уравнений как условий совместности соответствующих нелинейных уравнений. Впервые установлена связь между каноническими формами Альфана и Форсайта (Forsyth [35]). Канонические формы уравнений (и, следовательно, их абсолютные инварианты) позволяют весьма эффективно решать вопросы интегрируемости как линейных, так и некоторых нелинейных (например, стационарного уравнения Кортевега—де Фриза (СКдФ)) уравнений.

В этом же параграфе дается решение задачи о приводимости линейных уравнений n-го порядка ($n > 2$) с переменными коэффициентами к уравнениям с постоянными коэффициентами, т.е. описан класс *приводимых уравнений*. С приводимыми линейными уравнениями связаны высшие аналоги нелинейных уравнений типа Ермакова и Куммера—Шварца, для которых справедливы соответствующие принципы нелинейной суперпозиции.

Пусть дано ЛОДУ-n ($n > 2$)

$$L_n y \equiv y^{(n)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a_k y^{(n-k)} = 0, \quad a_k \in \mathrm{C}^{n-k}(i), \tag{3.1}$$

где i — открытый (конечный или бесконечный) интервал действительной оси x. От него всегда можно перейти к полуканонической форме

$$L_n y \equiv y^{(n)} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} A_k y^{(n-k)} = 0, \quad A_k \in \mathrm{C}^{n-k}(i) \tag{3.2}$$

путем подстановки $y = \exp(-\int a_1 dx)z$ и последующей замены z на y (A_k являются полуинвариантами (3.1) относительно преобразования зависимой переменной $y = \lambda(x)Y$). Будем рассматривать также уравнение

$$M_n z \equiv z^{(n)}(t) + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} b_k z^{(n-k)}(t) = 0, \quad b_k \in \mathrm{C}^{n-k}(j), \tag{3.3}$$

где j — открытый (конечный или бесконечный) интервал действительной оси t. Введем преобразование КЛ для ЛОДУ-n:

$$y(x) = v(x)z, \quad dt = u(x)dx, \quad vu \neq 0, \quad \forall x \in i_0 \subset i, \quad v, u \in \mathrm{C}^n(i_0). \tag{3.4}$$

Уравнения (3.1) и (3.3) *глобально* (см. Neuman F. [36]) переходят друг в друга при преобразовании КЛ, если соотношение

$$y(x) = v(x)z\left(\int u(x)dx\right) \tag{3.5}$$

выполняется на полных интервалах i и j. Если соотношение (3.5) выполняется *локально*, то и уравнения (3.1) и (3.3) *локально* преобразуются друг в друга. Уравнения (3.1), (3.2), (3.3) будем обозначать также соответственно через $(a(x)), (A(x)), (b(t))$.

Уравнения $(a(x))$ и $(b(t))$ будем называть *эквивалентными*, если существует преобразование КЛ g такое, что $(a) \xrightarrow{g} (b)$.

Инвариантом уравнения $(a(x))$ будем называть такое отображение коэффициентов $(a(x))$, которое постоянно на классах эквивалентности ЛОДУ относительно преобразований типа КЛ. Конкретнее, *инвариантом* уравнения $(a(x))$ относительно преобразования КЛ называется такая рациональная дифференциальная функция $I(A, A', \ldots)$, где $A = (0, A_2, \ldots, A_n)$, что $I(A, A', \ldots) = \lambda(u) I(B, \dot{B}, \ldots)|_{t=\int u dx}$. Если $\lambda(u) = 1$, то I есть *абсолютный* инвариант, а если $\lambda(u) \neq const$, то I *–относительный* инвариант. Аналогичным образом вводятся понятия абсолютного и относительного *полуинвариантов* (*семиинвариантов*) для преобразований только зависимой или только независимой переменных.

ЛОДУ-2 не обладают инвариантами (т.к. задача Куммера для них всегда разрешима), а имеют лишь полуинварианты. ЛОДУ-3 уже обладают не только полуинвариантами, но и относительным инвариантом Лагерра, а также абсолютным инвариантом Альфана. Для ЛОДУ-n , $n > 3$, имеют место также новые виды инвариантов: относительные *псевдоинварианты* и *условные инварианты*, а также абсолютные инварианты Альфана.

Псевдоинвариантом уравнения $(a(x))$ назовем такую рациональную дифференциальную функцию $J_{n,k}(A, A', \ldots)$, $k = \overline{1, n-3}$, $n > 3$, что $J_{n,k}(A, A', \ldots) = \mu(u) J_{n,k}(B, \dot{B}, \ldots)|_{t=\int u dx}$.

Условным инвариантом уравнения $(a(x))$ называется следующее ограничение псевдоинварианта:

$$I_{n,k}(A, A', \ldots) = J_{n,k}(A, A', \ldots)|_{I=J_{n,1}=\ldots=J_{n,k-1}=0}.$$

С именем Г. Альфана связаны следующие две задачи (см. [37]):

Задача 1. *Найти необходимые и достаточные условия эквивалентности уравнений $(a(x))$ и $(b(t))$, используя их инварианты.*

Задача 2. *Дать классификацию уравнений (3.1), описывая их с помощью канонических форм*[8].

Автор отличным от Альфана путем классифицировал уравнения 3-го и 4-го порядков, а также нашел в явном виде инварианты и канонические формы уравнения 5-го порядка. Избранный путь позволил

[8]Впрочем, сам Альфан рассматривал лишь задачу 2.

перейти к уравнениям высших порядков и дать в принципиальном плане решение указанных выше задач Альфана.

Лемма 3.1. *Для эквивалентности уравнений (3.1) и (3.3) необходимо и достаточно, чтобы была совместна переопределенная система алгебраических дифференциальных уравнений относительно* $t(x)$*:*

$$
\begin{gathered}
\{t, x\} + \frac{3}{n+1} B_2 t'^2 = \frac{3}{n+1} A_2, \\
\frac{t^{iv}}{t'} - 6\frac{t'''t''}{t'^2} + 6\left(\frac{t''}{t'}\right)^3 + \frac{12}{n+1} A_2 \frac{t''}{t'} + \frac{4}{n+1} B_3 t'^3 = \frac{4}{n+1} A_3, \\
\frac{t^{(v)}}{t'} - 10\frac{t^{(iv)}t''}{t'^2} - \frac{5}{18}(n+23)\left(\frac{t'''}{t'}\right)^2 + \frac{5}{6}(n+59)\frac{t''^2 t'''}{t'^3} - \frac{5}{8}(n+59)\left(\frac{t''}{t'}\right)^4 - \\
-\frac{5(n+11)}{n+1} A_2 \left(\frac{t''}{t'}\right)^2 + \frac{10}{3}\frac{n+5}{n+1} A_2 \frac{t'''}{t'} + \frac{20}{n+1} A_3 \frac{t''}{t'} + \frac{10}{3(n+1)} B_4 t'^4 = \\
= \frac{10}{3(n+1)} A_4, \quad \cdots, \\
\left[(t')^{\frac{1-n}{2}}\right]^{(n)} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} A_k \left[(t')^{\frac{1-n}{2}}\right]^{(n-k)} - B_n (t')^{\frac{n+1}{2}} = 0,
\end{gathered}
\tag{3.6}
$$

где A_k, B_k *суть полуинварианты уравнений (3.1) и (3.3) соответственно, например,*

$$
\begin{gathered}
A_2 = a_2 - a_1^2 - a_1', \quad A_3 = a_3 + 2a_1^3 - 3a_1 a_2 - a_1'', \\
A_4 = a_4 - 3a_1^4 + 6a_1^2 a_2 - 4a_1 a_3 - a_1''' + 3a_1^2 a_1' - 6a_2 a_1', \\
A_5 = a_5 - 5a_1 a_4 + 10a_1^2 a_3 - 10a_1^3 a_2 + 4a_1^5 - 10a_3 a_1' + 30a_1 a_2 a_1' - 20a_1^3 a_1' + 10a_1^2 a_1'' - \\
-10a_2 a_1'' + 10a_1' a_1'' - a_1^{iv}, \quad \ldots
\end{gathered}
$$

Лемма 3.2. *Для эквивалентности уравнений (3.1) и (3.3) необходимо и достаточно, чтобы была совместна переопределенная система нелинейных уравнений относительно* $v(x)$:

$$
\begin{gathered}
v'' - \frac{n-2}{n-1}\frac{v'^2}{v} + 3\frac{n-1}{n+1} A_2 v - 3\frac{n-1}{n+1} B_2 v^{\frac{n-5}{n-1}} = 0; \\
v''' - 3\frac{n-3}{n-1}\frac{v'v''}{v} + 2\frac{(n-2)(n-3)}{(n-1)^2}\frac{v'^3}{v^2} + \frac{12}{n+1} A_2 v' + 2\frac{n-1}{n+1} A_3 v - \\
-2\frac{n-1}{n+1} B_3 v^{\frac{n-7}{n-1}} = 0; \\
v^{iv} - 4\frac{n-4}{n-1}\frac{v'v'''}{v} - \frac{22}{9}\frac{n-4}{n-1}\frac{v''^2}{v} + \frac{2}{9}\frac{(49n-125)(n-4)}{(n-1)^2}\frac{v'^2 v''}{v^2} - \\
-\frac{(49n-125)(n-2)(n-4)}{9(n-1)^3}\frac{v'^4}{v^3} - -\frac{10}{3}\frac{(n-4)(n+7)}{(n-1)(n+1)} A_2 \frac{v'^2}{v} + \frac{10}{3}\frac{n+5}{n+1} A_2 v'' +
\end{gathered}
$$

$$+\frac{20}{n+1}A_3v' + \frac{5}{3}\frac{n-1}{n+1}A_4v - \frac{5}{3}\frac{n-1}{n+1}B_4v^{\frac{n-9}{n-1}} = 0; \quad \cdots ; \tag{3.7}$$

$$v^{(n)} + \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}A_kv^{(n-k)} - B_nv^{-\frac{n+1}{n-1}} = 0.$$

Теорема 3.1. *Для эквивалентности уравнений (3.1) и (3.3) необходимо и достаточно, чтобы между их инвариантами выполнялись* $n-2$ *соотношения:*

$$I_0(A) = u^3I_0(B), \ \ J_{n,1}(A) = u^4J_{n,1}(B), \ \ J_{n,2}(A) = u^5J_{n,2}(B), \ \cdots ,$$
$$J_{n,n-3}(A) = u^nJ_{n,n-3}(B), \tag{3.8}$$

где $\int u(x)dx = t(x)$ *удовлетворяет также уравнению КШ-3*

$$\{t, x\} + \frac{3}{n+1}B_2t'^2 = \frac{3}{n+1}A_2 \tag{3.9}$$

(первому из уравнений (3.6)), а

$$I_0(A) = A_3 - \frac{3}{2}A_2', \quad I_0(B) = B_3 - \frac{3}{2}\dot{B}_2 = b_3 - 3b_1b_2 + 2b_1^3 + 3b_1\dot{b}_1 + \frac{1}{2}\ddot{b}_1 - \frac{3}{2}\dot{b}_2,$$

$$J_{n,1}(A) = A_1 - 2A_3' + \frac{6}{5}A_2'' - \frac{3(5n+7)}{5(n+1)}A_2^2,$$

$$J_{n,2}(A) = A_5 - \frac{5}{2}A_4' + \frac{15}{7}A_3'' - \frac{5}{7}A_2''' - \frac{10(7n+13)}{7(n+1)}A_2I_0(A), \ \cdots .$$

Приведенные соотношения, как и сами выражения для относительного инварианта Лагерра I_0 и псевдоинвариантов Альфана $J_{n,k}$, являются условиями совместности переопределенных систем дифференциальных уравнений (3.6), (3.7).

Теорема 3.2. (классификационная) [1, 4]. *Множество уравнений (3.2) распадается на* $n-1$ *класс согласно табл. 1*:

Таблица 1

Класс	Инварианты	Преобразование $y = u_k^{-\frac{n-1}{2}}z, dt = u_kdx$	Канонические формы Альфана
Y_0	$I_0 \neq 0$	$u_0 = \sqrt[3]{I_0}$	Основная (H_{n0}), зависит от $n-2$ параметров
Y_k, $k = \overline{1, n-3}$	$I_0 = I_{n,1} = \cdots = I_{n,k-1} = 0$, $I_{n,k} = J_{n,k} \neq 0$	$u_k = \sqrt[k+3]{I_{n,k}}$	Вырожденная (H_{nk}), зависит от $n-k-2$ параметров
Y_{n-2}	$I_0 = I_{n,1} = \cdots = I_{n,n-3} = 0$	$\frac{1}{2}\frac{u_{n-2}''}{u_{n-2}} - \frac{3}{4}\left(\frac{u_{n-2}'}{u_{n-2}}\right)^2 = \frac{3}{n+1}A_2$	Простейшая вырожденная (H_{nn-2}) : $z^{(n)}(t) = 0$

Пример 3.1. Канонические формы Альфана для ЛОДУ-3.

$$H_{30}z \equiv \dddot{z} + 3h(t)\dot{z} + \left(\frac{3}{2}\dot{h}(t) + 1\right) z = 0,$$

$$h(t) \equiv H(x(t)) = A_2 I_0^{-2/3} + (7I_0'^2 - 6I_0 I_0'')/(27 I_0^{8/3}),$$

где $x = x(t)$ является обращением интеграла $t = \int^x \sqrt[3]{I_0(A)}\, dx$,

$$H_{31}z \equiv \dddot{z} = 0.$$

Пример 3.2. Канонические формы Альфана для ЛОДУ-4.

$$H_{40}z \equiv z^{iv} + 2h(t)\ddot{z} + (2\dot{h}(t) + 4)\dot{z} + k(t)z = 0,$$

$$h(t) \equiv H(x(t)) = \left(3A_2 + \frac{35}{36}(\frac{I_0'}{I_0})^2 - \frac{5}{6}\frac{I_0''}{I_0}\right) I_0^{-2/3},$$

где $x = x(t)$ есть обращение интеграла $t = \int^x \sqrt[3]{I_0(A)} dx$,

$$H_{41}z \equiv z^{iv} + 2h_1\ddot{z} + 2\dot{h}_1\dot{z} + \left(1 + \frac{3}{5}\ddot{h}_1 + \frac{9}{25}\dot{h}_1^2\right) z = 0,$$

$$h_1(t) = H_1(x(t)) = \left(3A_2 + \frac{45}{64}(\frac{I_{41}'}{I_{41}})^2 - \frac{5}{8}\frac{I_{41}''}{I_{41}}\right) I_{41}^{-2},$$

где $x = x(t)$ есть обращение интеграла $t = \int^x \sqrt[4]{I_{41}} dx$,

$$H_{42}z \equiv z^{iv} = 0.$$

Теорема 3.3. (классификационная) [1, 4]. *Множество уравнений (3.2) распадается на $n - 1$ класс согласно табл. 2*:

Таблица 2

Класс	Инварианты	Преобразование $y = u^{-\frac{n-1}{2}}z,\ \ dt = udx$	Канонические формы Форсайта
Y_0	$I_0 \neq 0$	$\frac{1}{2}\frac{u''}{u} - \frac{3}{4}\left(\frac{u'}{u}\right)^2 = \frac{3}{n+1}A_2$	Основная (F_{n0}), зависит от $n - 2$ параметров
Y_k, $k = \overline{1, n-3}$	$I_0 = I_{n,1} = \cdots = I_{n,k-1} = 0$, $I_{n,k} = J_{n,k} \neq 0$		Вырожденная (F_{nk}), зависит от $n - k - 2$ параметров
Y_{n-2}	$I_0 = I_{n,1} = \cdots = I_{n,n-3} = 0$		Простейшая вырожденная (F_{nn-2}) : $z^{(n)}(t) = 0$

Канонические формы Форсайта можно представить в виде[9]:

$$F_{nk}z \equiv z^{(n)}(t) + \sum_{s=k+3}^{n} \binom{n}{s} f_{ks}(t) z^{(n-k)}(t) = 0, \ \ k = \overline{0, n-3}. \tag{3.10}$$

[9]Ранее применялась лишь единственная каноническая форма, а именно F_{n0}, называемая формой Лагерра—Форсайта.

Теорема 3.4. *Для того чтобы уравнения (3.1) и (3.3) были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось любое из следующих условий:*

а) оператор L_n *допускает факторизацию*

$$L_n = \prod_{k=n}^{1}\left[D - \frac{v'}{v} - (k-1)\frac{u'}{u} - \beta_k(t(x))\right], \tag{3.11}$$

$$v(x) = |u(x)|^{-\frac{n-1}{2}} \exp\left(-\int a_1 dx + \int b_1(t)dt\right),$$

а $u(x) = t'(x)$ *находится из уравнения (3.9), причем* β_k *являются "корнями" факторизации оператора* M_n*:*

$$M_n = \prod_{k=n}^{1}[D_t - \beta_k(t)], \quad D_t = d/dt;$$

б) инвариант Лагерра I_0 *и псевдоинварианты Альфана* $J_{n,k}$ *уравнений (3.1) и (3.3) связаны между собой* $n-2$ *соотношениями (3.8);*

в) уравнения (3.1) и (3.3) приводятся к одной и той же канонической форме в соответствии с классификациями Альфана и Форсайта;

г) абсолютные инварианты Альфана уравнений (3.1) и (3.3) совпадают.

Далее рассмотрим *приводимые* линейные уравнения.

Определение 3.1. Уравнение (3.1) будем называть *локально приводимым* (по Альфану), если оно преобразованием КЛ (3.4) приводится к уравнению с постоянными коэффициентами

$$M_n z \equiv z^{(n)}(t) + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} b_k z^{(n-k)}(t) = 0, \quad b_k = \text{const}. \tag{3.12}$$

Теорема 3.5. *Следующие условия равносильны:*

а) уравнение (3.1) приводимо;

б) уравнение (3.1) допускает некоммутативную факторизацию

$$L_n y \equiv \prod_{k=n}^{1}\left[D - \frac{v'}{v} - (k-1)\frac{u'}{u} - r_k u\right] y = 0$$

через операторы 1-го порядка (см. (3.11)), где

$$v = |u|^{-\frac{n-1}{2}} \exp\left(-\int a_1 dx + b_1 \int u dx\right), \tag{3.13}$$

$$\frac{1}{2}\frac{u''}{u} - \frac{3}{4}\left(\frac{u'}{u}\right)^2 + \frac{3}{n+1}B_2 u^2 = \frac{3}{n+1}A_2(x), \quad B_2 = b_2 - b_1^2 = \text{const}, \tag{3.14}$$

а r_k *суть корни характеристического уравнения*

$$M_n(r) \equiv r^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} b_k r^{n-k} = 0; \tag{3.15}$$

в) уравнение (3.1) допускает коммутативную факторизацию с весом u^{-n}*:*

$$\frac{1}{u^n} L_n y \equiv \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{u} D - \frac{v'}{vu} - r_k \right) y = 0,$$

причем $v(x)$ *и* $u(x)$ *удовлетворяют также уравнению*

$$v^{(n)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a_k(x) v^{(n-k)} - b_n u^n v = 0; \tag{3.16}$$

г) существуют четыре функции Ω, w, λ, μ*, связанные соотношениями* $\Omega = v^{-1}u^{1-n}$, $w = v^{-1}u^{-n}$, $\lambda = u^{-1}$, $\mu = -v'v^{-1}u^{-1}$ *такими, что*

$$\Omega L_n(\lambda D + \mu) = D[w L_n];$$

д) если $y(x)$ *— решение уравнения (3.1), то и функция*

$$Y(x) = u^{-1}y' - v^{-1}u^{-1}v'y \tag{3.17}$$

также является решением уравнения (3.1) (иными словами, уравнение (3.1) допускает преобразование ЭИД, или автопреобразование Бэклунда (3.17));

е) инвариант Лагерра I_0 *и псевдоинварианты* $J_{n,k}$ *связаны между собой* $n-2$ *соотношениями типа (3.8), где* $I_0(b)$, $J_{n,k}(b) = \mathrm{const}$;

ж) абсолютные инварианты Альфана $h_k = \mathrm{const}$;

з) уравнение (3.1) допускает однопараметрические группы симметрии Ли с операторами вида (2.7), где $u(x)$ *является решением уравнения (3.14), а* $v(x)$ *удовлетворяет соотношению (3.13), а также уравнению (3.16).*

Случай $n = 3$ рассмотрен в [38].

Замечание 3.1. Теорема 3.5 подытоживает многолетние исследования математиков. Условие *в* обобщает теорему Cayley [7], а также соответствующие результаты Floquet [39] и Mammana [12], и связывает факторизацию с приводимостью; условие *г* дает критерий Fayet [40]; условие *д* дает критерий Kakeya [41], условие *ж* принадлежит Альфану и, наконец, условие *з* устанавливает связь между подходами Ли и Альфана, а именно между точечными однопараметрическими группами и точечными преобразованиями КЛ. Условия *б, в, е* и *з* принадлежат автору. Заметим также, что Wittich [42] использовал условие автора *б* в аналитической теории дифференциальных уравнений. Наконец, отметим эффективный характер условий *б, в, е, ж* и *з*.

Оператор (2.7) группы Ли можно выразить в явном виде в терминах уравнений (3.14) и (3.13), а также (3.16).

Предложение 3.1. *Общее решение уравнения (3.14) имеет вид*

$$u(x) = (AY_2^2 + BY_1Y_2 + CY_1^2)^{-1}, \ \ \delta = B^2 - 4AC = -12/(n+1)B_2, \tag{3.18}$$

где $Y_1, \ \ Y_2 = Y_1 \int Y_1^{-2} dx$ *есть ФСР линейного уравнения*

$$Y'' + \frac{3}{n+1} A_2 Y = 0. \tag{3.19}$$

Соответственно решениями уравнения (3.16) являются функции:

$$\begin{gathered} v_1 = \lambda(x)(\alpha_1 Y_2 + \beta_1 Y_1)^{\frac{n-1}{2} \pm \frac{b_1}{\sqrt{\delta_1}}} (\alpha_2 Y_2 + \beta_2 Y_1)^{\frac{n-1}{2} \mp \frac{b_1}{\sqrt{\delta_1}}}, \\ \delta_1 = (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2 > 0; \\ v_2 = \lambda(x)(AY_2^2 + BY_1Y_2 + CY_1^2)^{\frac{n-1}{2}} \exp\left(\pm \frac{2b_1}{\sqrt{-\delta_2}} \operatorname{arctg} \frac{2AY_2 + BY_1}{\sqrt{-\delta_2} Y_1}\right), \\ \delta_2 = B^2 - 4AC < 0; \\ v_3 = \lambda(x)(\alpha Y_2 + \beta Y_1)^{n-1} \exp\left(\mp \frac{b_1}{\alpha} \frac{Y_1}{\alpha Y_2 + \beta Y_1}\right), \ \ \delta_3 = 0; \\ v_4 = \lambda(x)(\alpha Y_2 + \beta Y_1)^{\frac{n-1}{2} \pm \frac{b_1}{\alpha}} Y_1^{\frac{n-1}{2} \mp \frac{b_1}{\alpha}}, \ \ \delta_4 = \alpha^2; \\ v_5 = \lambda(x) Y_1^{n-1} \exp\left(\pm b_1 \int Y_1^{-2} dx\right), \ \ \delta_5 = 0; \end{gathered} \tag{3.20}$$

где $Y_1, \ \ Y_2 = \int Y_1^{-2} dx$ — ФСР уравнения (3.19), а $\lambda(x) = \exp(-\int a_1 dx)$.

Пример 3.3. Уравнение Альфана $y^{(n)} + d(ax^2 + bx + c)^{-n} y = 0$ является приводимым (см. для сравнения уравнение Лиувилля (2.21)). Оно легко получается из уравнений $y^{(n)} = 0$ и (3.16).

Замечание 3.2. Абсолютные инварианты Альфана позволяют весьма эффективно исследовать вопрос об интегрируемости уравнений. Случай $h_k = \mathrm{const}$ соответствует *приводимым* уравнениям.

Другие замечательные классы интегрируемых уравнений открываются, когда между абсолютными инвариантами существуют определенные алгебраические соотношения. Рассмотрим случай $n = 3$. Основная каноническая форма имеет вид $H_{30}y = 0$, а именно:

$$y''' + 3h_2(x)y' + \left(\frac{3}{2}h_2'(x) + \alpha\right) y = 0, \ \ \alpha \neq 0. \tag{3.21}$$

Первый и второй абсолютные инварианты Альфана обозначим соответственно $3h_2(x) = h$, $3h_2'(x) = l$. Положим $h_2(x) = -\wp(x)$, т.е. $h = -3\wp(x)$, $l = -3\wp'(x)$. При этом уравнение (3.21) примет вид уравнения Альфана (1.20), которое является интегрируемым. Выражения для абсолютных инвариантов параметризуют эллиптическую кривую, которая в плоскости (h,l) описывается уравнением

$$l^2+\frac{4}{3}h^3-3g_2h+9g_3=0.$$

Параметризация $h=-3\wp$, $l=-3\wp'$ порождает нелинейное автономное уравнение $h'''+4hh'=0$, принадлежащее к типу стационарного КдФ (см. [43]).

Предложение 3.2. *Общее решение приводимого уравнения (3.1) можно представить в виде*

$$y=v\sum_{k=1}^{n}c_k\exp(r_kU),\quad U=\int u\,dx, \tag{3.22}$$

где r_k — простые корни характеристического уравнения (3.15), и в виде

$$y=v\sum_{k=1}^{m_i}\sum_{s=1}^{l_k}\frac{1}{(s-1)!}U^{s-1}\exp(r_kU),\quad \sum_{k=1}^{m_i}l_k=n, \tag{3.23}$$

где r_k — кратные характеристические корни (3.15), а $u(x)$ и $v(x)$ удовлетворяют уравнениям (3.18), (3.20).

Укажем теперь некоторые классы нелинейных уравнений от 2–го до n–го порядков, порожденные приводимыми линейными уравнениями и для которых имеют место ПНС.

Теорема 3.6. *Если уравнение (3.2) является приводимым, то семейства присоединенных нелинейных уравнений, получающихся из (3.6) заменой $t'(x)$ на $u(x)$ при условии, что все $B_k=const$ $(B_1=0)$, одновременно допускают решения вида (3.18), где $A_k, k=2,\ldots,n$, суть полуинварианты уравнения (3.1), а Y_1, $Y_2=Y_1\int Y_1^{-2}dx$ — ФСР уравнения (3.19):*

$$\frac{1}{2}\frac{u''}{u}-\frac{3}{4}\left(\frac{u'}{u}\right)^2+\frac{3}{n+1}B_2t'^2=\frac{3}{n+1}A_2,$$

$$\frac{u'''}{u}-6\frac{u''u'}{u^2}+6\left(\frac{u'}{u}\right)^3+\frac{12}{n+1}A_2\frac{u'}{u}+\frac{4}{n+1}B_3u^3=\frac{4}{n+1}A_3,$$

$$\frac{u^{(iv)}}{u}-10\frac{u'''u'}{u^2}-\frac{5}{18}(n+23)\left(\frac{u''}{u}\right)^2+\frac{5}{6}(n+59)\frac{u'^2u''}{u^3}-\frac{5}{8}(n+59)\left(\frac{u'}{u}\right)^4-$$

$$-\frac{5(n+11)}{n+1}A_2\left(\frac{u'}{u}\right)^2++\frac{10}{3}\frac{n+5}{n+1}A_2\frac{u''}{u}+\frac{20}{n+1}A_3\frac{u'}{u}+$$

$$+\frac{10}{3(n+1)}B_4u^4=\frac{10}{3(n+1)}A_4,\quad\cdots,$$

$$[u^{\frac{1-n}{2}}]^{(n)}+\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}A_k[u^{\frac{1-n}{2}}]^{(n-k)}-B_nu^{\frac{n+1}{2}}=0.$$

Теорема 3.7. *Если уравнение (3.2) является приводимым, то семейства присоединенных нелинейных уравнений относительно $v(x)$, получающихся из (3.7) при условии, что все $B_k = \text{const}$ ($B_1 = 0$), одновременно допускают решения вида $v(x) = (AY_2^2 + BY_2Y_1 + CY_1^2)^{\frac{n-1}{2}}$,* $B^2 - 4AC = \text{const}$.

Литература

[1] Беркович Л.М. Факторизация и преобразования дифференциальных уравнений. Методы и приложения. М.: НИЦ РХД, 2002. 463 с.

[2] Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж. и др. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1989. 694 с.

[3] Беркович Л.М. Преобразование обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Куйбышев: Изд-во Куйбышев. гос. ун-та, 1978. 92 с.

[4] Беркович Л.М. Факторизация и преобразование обыкновенных дифференциальных уравнений. Саратов: Изд-во Саратов. гос. ун-та, 1989. 192 с.

[5] Беркович Л.М. Преобразования обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения, 1971. Т. 7. № 2. С. 353–356.

[6] Беркович Л.М. Метод точной линеаризации нелинейных автономных дифференциальных уравнений второго порядка // Прикладная математика и механика, 1979. Т. 43. № 4. С.629–638.

[7] Cayley A. On linear differential equations (The theory of decomposition) // Quarterly J. of Math. 1886. P. 331–335.

[8] Беркович Л.М., Цирулик В.Г. Дифференциальный результант и некоторые его применения // Дифференциальные уравнения, 1986. Т. 22. С. 750–757.

[9] Лузин Н.Н. К изучению матричной теории дифференциальных уравнений // Автоматика и телемех., 1940. № 5. С. 3–66.

[10] Zwillinger D. Handbook of Differential Equations. N.Y.: Academic Press, 1989. 673 p.

[11] Carra'-Ferro G. The Differential Resultant of Linear Algebraic Partial Differential Equations // Lie Groups and their Applications. V. 1. 1994. P. 47–55.

[12] Mammana G. Decomposizione delle expressioni differenziali lineari omogenee improdotti di fattori simbolici e applicazione relativa allo studio delle equazione differenziali lineari // Math. Zeit., 1931. V. 33. S. 186–231.

[13] Kovacic J.J. An algorithm for solving second order linear homogeneous differential equations // J. Symb. Comp., 1986. V. 2. P. 3–43.

[14] Капланский И. Введение в дифференциальную алгебру. М.: Иностр. лит., 1959. 86 с.

[15] Burchnall J.L., Chaundy T.W. Commutative ordinary differential operators // London Math. Soc., 1923. V. 21. P. 420–440.

[16] Kummer E.E. De generali quadam aequatione differentiali tertii ordinis // Abdruck aus dem Program des evangelischen Königl und Stadtgymnasiums in Liegnitz von Jahre, 1834. (Перепечатка: J. Reine Angew. Math., 1887. V. 100. P. 1–9).

[17] Liouville J. Sur le développement des fonctions ou parties des fonctions en séries dont les divers termes sont assujettis à satisfaire à une même équation différentielle du second ordre contenant un paramètre variable (second mémoire) // J. Math. Pures et Appl., 1837. V. 2. P. 16–36.

[18] Borůvka O. Lineare Differentialtransformation 2. Ordnung. Berlin, 1967. 218 S.

[19] Беркович Л.М. О преобразовании дифференциальных уравнений типа Штурма-Лиувилля // Функц. анализ и его прил. 1982. Т. 16. № 3. С. 42–44.

[20] Stäckel P. Über transformationen von differentialgleichungen // J. Reine Angew. Math., 1893. V. 111. S. 290–302.

[21] Lie S. Vorlesungen über continuirliche gruppen mit geometrischen und anderen anwendungen // Bearbeitet and herausgegeben von Dr. G.Scheffers. Leipzig: Teubner, 1893. S. 765–804.

[22] Ермаков В.П. Дифференциальные уравнения второго порядка. Условия интегрируемости в конечном виде // Университетские известия (Киев), 1880. № 9. С. 1–25.

[23] Беркович Л.М., Розов Н.Х. Некоторые замечания о дифференциальных уравнениях вида $y''+a(x)y = f(x)y^{\alpha}$ // Дифференциальные уравнения, 1972. Т. 8. № 11. С. 2076–2079.

[24] Pinney E. The nonlinear differential equation $y'' + p(x)y + cy^{-3} = 0$. // Proc. Amer. Math. Soc., 1950. V. 1. P. 581.

[25] Андронов А.А., Леонтович М.А., Мандельштам Л.И. К теории адиабатических инвариантов // В кн.: Андронов А.А. Собр. трудов. М.: Изд-во АН СССР, 1956. С. 34–40.

[26] Крылов А.Н. Вибрация судов. Собр. соч. Т. 10. М.: Изд-во АН СССР, 1948. С. 340–344.

[27] Крылов А.Н. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложение в технических вопросах. М.; Л.: ГИТТЛ, 1950. С. 250–251.

[28] Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука. С. 280–281.

[29] Беркович Л.М. Родственные линейные дифференциальные уравнения второго порядка // Дифференциальные уравнения, 1989. Т. 25. № 2. С 191–201.

[30] Фрёман Н., Фрёман П.У. ВКБ-приближение. М.: Мир, 1967. 168 с.

[31] Euleri Leonhardi. Methodas nova investigandi omnes casus quibus hans aequationen differentio-differentialen $\partial\partial y(1 - axx) - bx\partial x\partial y - - cy\partial x^2 = 0$. M.S. Academiae exhibit aie 13 Ianuarii 1780. Institutiones calculi integralis. V. 4. 1794. P. 533–543.

[32] Имшенецкий В.Г. Распространение на линейные уравнения вообще способа Эйлера для исследования всех случаев интегрируемости одного частного вида линейных уравнений второго порядка // Записки императорской академии наук. СПб., 1882. Т. 42. С. 1–21.

[33] Darboux G. Sur une proposition relative aux équations linéaires // C.R. Acad. Sci., 1882. V. 94. P. 1456–1459.

[34] Halphen G.-H. Mémoire sur la réduction des équations linéaires différentielles aux formes integrables // Mémoires presentes par divers savants à l'Acad. des Sci. de l'inst. mat. de France, 1884. V. 23. No. 1. 301 P.

[35] Forsyth A.R. Invariants, covariants and quotient-derivatives associated with linear differential equations // Phyl. Trans. London, 1899. A. V. 179. P. 377–489.

[36] Neuman F. Global properties of linear differential equations. Dordrecht-Boston-London-Praha: Kluwer Acad. Publ., 1991.

[37] Беркович Л.М. Задача Альфана об эквивалентности обыкновенных линейных дифференциальных уравнений // Успехи математических наук, 1986. Т. 41. № 1. С. 183–184.

[38] Беркович Л.М. Приводимые обыкновенные линейные дифференциальные уравнения третьего порядка // Дифференциальные уравнения, 1987. Т. 23. № 5. С. 887–890.

[39] Floquet G. Sur la théorie des équations différentielles linéaires // Ann. Sci. de l'École Normale, 1879. V. 8, Supplement. 2 sér. P. 132.

[40] Fayet J. Invariants de quelques équations différentielles et réduction du celle-ci à des équations à coefficients constants. Thèse. Paris, 1937. 81 p.

[41] Kakeya S. On linear differential equation which admits a linear differential transformation // Proc. Phys. Math. Soc. Japan, 1938. V. 20. No. 4. P. 365.
[42] Wittich H. Bemerkung zur Zerlegung linearer Differentialoperatoren mit ganzen koeffizienten // Math. Nachr., 1969. V. 39. No. 4–6. S. 363–372.
[43] Беркович Л.М. Абсолютные инварианты и уравнение Кортевега—де Фриза // В кн.: Теоретико-групповые методы в физике. Т. 1. М.: Наука, 1986. С. 505–513.

FACTORIZATION, TRANSFORMATIONS AND INTEGRABILITY OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS. 1. LINEAR EQUATIONS[10]

© 2003 L.M. Berkovich[11]

In the paper the methods of the factorization, autonomization and exact linearization developed by the author in a number of previous discussions are represented. They together with the methods of the group analysis and differential algebra permit to create a complete picture for study and integration of ordinary differential equations. It enables us to investigate constructively nonlinear and nonstationary problems known from a wide range of natural sciences and, first of all, problems of mechanics and physics. The paper is broken on two parts. The first part is devoted to the linear equations. The second part is devoted to the nonlinear equations. The paper in part is based on recently published monograph by the author. (Berkovich L.M. Factorization and transformations of differential equations: methods and applications. M.: R&C Dynamics, 2002.)

Поступила в редакцию 3/*XII*/2002;
в окончательном варианте — 16/*VI*/2003.

[10] Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. Yu.N. Radayev.

[11] Berkovich Lev Meilikhovich (berk@ssu.samara.ru), Academician of Academy of Nonlinear Sciences, Dept. of Algebra & Geometry, Samara State University, Samara, 443011, Russia.