УДК 539.374

О КАНОНИЧЕСКИХ ФОРМАХ АВТОМОДЕЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

© 2003 Ю.Н. Радаев, В.А. Гудков[1]

Рассматриваются уравнения, полученные с помощью автомодельной замены переменных в условиях осевой симметрии из общих пространственных уравнений математической теории пластичности с условием пластичности Треска и ассоциированным с ним законом течения для напряженных состояний, соответствующих ребру поверхности текучести. Показано, что некоторые автомодельные решения могут быть построены, исходя из решений единственного обыкновенного дифференциального уравнения, содержащего в правой части иррациональность корневого типа. Подстановками это уравнение приводится к форме, свободной от иррациональностей, и эта форма классифицируется как уравнение Абеля первого рода, что позволяет затем применить результаты аналитической теории дифференциальных уравнений к описанию его интегралов.

1. Постановка задачи и основные уравнения

Настоящая работа посвящена исследованию дифференциального уравнения, полученного в статье [1], при изучении автомодельных решений осесимметричной задачи математической теории пластичности. В этой работе рассмотрены уравнения трехмерной задачи математической теории пластичности для ребра призмы Треска. В этом случае уравнения равновесия представляются в ковариантной форме в следующем виде:

$$\frac{\partial\Sigma}{\partial\xi^l} + g^{-1/2}g_{kl}\frac{\partial(g^{1/2}n^k n^m)}{\partial\xi^m} + n^r n^s[rs,l] = 0, \tag{1.1}$$

где g_{ij} — компоненты метрического тензора; $g = \det\|g_{ij}\|$; $[rs,l]$ — символы Кристоффеля первого рода; Σ — безразмерное отношение $\mp\sigma_3/(2k)$; σ_3 — наибольшее (наименьшее) главное нормальное напряжение; n^m — контравариантные компоненты единичного векторного поля $\mathbf{n}$, указывающего направление главной оси напряжений, соответствующей наибольшему (наименьше-

[1] Радаев Юрий Николаевич (radayev@ssu.samara.ru), Гудков Василий Александрович, кафедра механики сплошных сред Самарского государственного университета, 443011, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

му) главному нормальному напряжению; ξ^i — криволинейные координаты, выбор которых описан в [2].

В работе [3] доказывается, что нетривиальные решения уравнения (1.1) в некоторой области можно получить только в случае, если векторное поле $\mathbf{n}$ расслоенное (т.е. существует семейство поверхностей, заполняющее эту область, такое, что векторное поле единичных нормалей к поверхностям данного семейства совпадает с полем $\mathbf{n}$ собственных векторов тензора напряжений) и вихрь его ненулевой[2]. Это обстоятельство позволяет, имея в виду максимально упростить систему уравнений (1.1), специальным образом подобрать криволинейные координаты ξ^m: координатные поверхности $\xi^3 = \mathrm{const}$ есть слои поля $\mathbf{n}$, а поверхности $\xi^1 = \mathrm{const}$ и $\xi^2 = \mathrm{const}$ — интегральные поверхности поля $\mathbf{n}$.

В указанной координатной системе ξ^m система уравнений (1.1) распадается на три интегрируемых соотношения (см. [2]):

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial \xi^1}\left(\Sigma - \frac{1}{2}\ln g_{33}\right) = 0,\\ &\frac{\partial}{\partial \xi^2}\left(\Sigma - \frac{1}{2}\ln g_{33}\right) = 0,\\ &\frac{\partial}{\partial \xi^3}\left(\Sigma - \frac{1}{2}\ln g_{33} + \frac{1}{2}\ln g\right) = 0. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Условие интегрируемости этой системы есть:

$$g = G_1(\xi^1, \xi^2) G_2(\xi^3). \tag{1.3}$$

Три интегрируемых соотношения (1.2) эквивалентны одному соотношению (1.3). Таким образом, находится величина g, для которой разделяются пространственные переменные и которая представляет собой определитель, составленный из компонент метрического тензора специальным образом подобранной координатной системы ξ^1, ξ^2, ξ^3, координатными линиями которой являются траектории главных нормальных напряжений.

Осесимметричное пластическое течение, когда напряженное состояние соответствует ребру призмы Треска, можно разделить на следующие два типа[3]:

1) тангенциальное напряжение является наибольшим (наименьшим) главным напряжением, а меридиональные главные напряжения равны;

2) тангенциальное напряжение равно одному из меридиональных главных напряжений, а максимальное касательное напряжение в меридиональной плоскости равно пределу текучести k. Первый случай исследуется элементарными средствами. Второй случай — состояние "полной пластичности" Хаара—Кармана. Если присвоить тангенциальному главному направлению

---

[2] Указанные два условия (расслоенность и ненулевая завихренность) могут быть выражены следующим образом: $\mathbf{n} \cdot \mathrm{rot}\mathbf{n} = 0$, $\mathrm{rot}\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$.

[3] Тангенциальное напряжение всегда будет главным напряжением при осесимметричном напряженном состоянии.

второй номер и обозначить через σ_3 наибольшее (наименьшее) из двух меридиональных главных напряжений, то приходим к соотношениию

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \pm 2k, \tag{1.4}$$

характеризующему состояние "полной пластичности".

Автомодельные решения уравнений теории пластичности удобнее всего искать, используя специальные переменные ξ^1, ξ^2, ξ^3 и учитывая возможность отделения координаты ξ^3.

В случае осевой симметрии формулы, связывающие декартовы координаты x_1, x_2, x_3 и криволинейные координаты ξ^1, ξ^2, ξ^3, следует, очевидно, искать в следующем виде:

$$x_1 = f(\xi^1,\xi^3)\cos\xi^2, \quad x_2 = f(\xi^1,\xi^3)\sin\xi^2, \quad x_3 = h(\xi^1,\xi^3). \tag{1.5}$$

Здесь ξ^i — специальные криволинейные координаты, определяемые по векторному полю $\mathbf{n}$, функции f и h подлежат определению, ξ^2 — угловая координата.

При подстановке уравнений (1.5) в (1.3) и в условия, характеризующие частичную ортогональность криволинейной координатой сетки $g_{13} = 0$, $g_{23} = 0$, получаем, что

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial\xi^1}\dfrac{\partial f}{\partial\xi^3} + \dfrac{\partial h}{\partial\xi^1}\dfrac{\partial h}{\partial\xi^3} = 0, \\ \left[\left(\dfrac{\partial f}{\partial\xi^3}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial h}{\partial\xi^3}\right)^2\right]\left[\left(\dfrac{\partial f}{\partial\xi^1}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial h}{\partial\xi^1}\right)^2\right] f^2 = G_1(\xi^1)G_2(\xi^3). \end{cases} \tag{1.6}$$

В статье [1] предложено искать автомодельные решения осесимметричной задачи математической теории пластичности в форме

$$f = {\xi^1}^{\alpha}{\xi^3}^{\beta}F(\xi), \quad h = {\xi^1}^{\alpha}{\xi^3}^{\beta}H(\xi),$$

где $\xi = \xi^1/\xi^3$ — автомодельная переменная; α, β — некоторые показатели. Далее будем рассматривать простейший случай, когда $\alpha = \beta$.

Принимая во внимание, что функции G_1, G_2 произвольные, выберем их так, чтобы переменные ξ^1, ξ^3 в уравнениях (1.6) были бы устранены. Для этого достаточно положить

$$\left[G_1(\xi^1)G_2(\xi^3)\right] / \left(\xi^1\xi^2\right)^{6\alpha-2} = C\xi^{\mu+2}.$$

Систему (1.6) удобно анализировать в полярных координатах $F = \rho\cos\iota$, $H = \rho\sin\iota$. В результате приходится исследовать систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \iota'^2 = \dfrac{C\xi^{\mu}}{4\alpha^2\rho^6\cos^2\iota}, \\ \iota'^2 = \dfrac{\alpha^2}{\xi^2} - \dfrac{\rho'^2}{\rho^2}. \end{cases} \tag{1.7}$$

Если разделить первое уравнение на второе и положить $\mu = -2$, то устраняется зависимость от автомодельной переменной ξ и получается одно уравнение

$$1+\left(\frac{d\rho}{\rho d\iota}\right)^2=\frac{4\alpha^4\rho^6\cos^2\iota}{C}. \tag{1.8}$$

Затем, следуя [1], произведем замены переменных по формулам: $\ln\rho = W$, $e^{6W}=v^s$ (s — постоянный показатель), $\sin\iota=u$. После этого уравнение (1.8) приобретает следующий вид:

$$\frac{1}{\cos^2\iota}+\frac{s^2}{36v^2}\left(\frac{dv}{du}\right)^2=l^2v^s, \tag{1.9}$$

где $l^2=4\alpha^4/C$.

С целью упрощения последнего дифференциального уравнения положим $s=-2$. Обозначая через $\bar v$ безразмерное отношение v/l, в итоге имеем

$$\left(\frac{d\bar v}{du}\right)^2=3^2\left(1-\frac{\bar v^2}{1-u^2}\right). \tag{1.10}$$

При приведении последнего уравнения к нормальной форме в правой части возникает иррациональность корневого типа. Целью настоящей работы является изучение основного уравнения (1.10) в плане возможного преобразования его к форме, которая могла бы быть классифицирована, а само уравнение отнесено к одному из известных типов.

2. Канонические формы основного уравнения

Чтобы избавиться от корневой иррациональности в уравнении (1.10), совершим замену переменных $(u,\bar v)\to(\iota,\tau)$, где $\bar v=\sin\tau\sqrt{1-u^2}$:

$$\frac{d\tau}{d\iota}=\pm\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{3}+\operatorname{tg}\tau\operatorname{tg}\iota. \tag{2.1}$$

Уравнение (2.1) иррациональное, с иррациональностью тригонометрического типа. Чтобы устранить эту иррациональность, произведем замену переменных $p=\operatorname{tg}\tau$, $q=\operatorname{tg}\iota$. При этом получаем следующее уравнение:

$$\frac{dp}{dq}=\frac{(p^2+1)(pq-3)}{(q^2+1)}. \tag{2.2}$$

Уравнение (2.2) представляет собой уравнение Абеля первого рода (см., например, [4] или более полное справочное издание [5]), т.е. уравнение вида

$$\frac{dp}{dq}=a_3(q)p^3+a_2(q)p^2+a_1(q)p+a_0(q) \tag{2.3}$$

с кубическим полиномом относительно неизвестной функции в правой части.

Согласно [4], уравнение Абеля первого рода имеет ряд канонических форм. Одна из них получается, если известно хотя бы одно его частное решение $p=\tilde p(q)$. В этом случае уравнение (2.3) заменой

$$p=\tilde p(q)+\frac{E(q)}{z(q)}, \tag{2.4}$$

где

$$E(q) = \exp\left[\int (3a_3\tilde{p}^2 + 2a_2\tilde{p} + a_1)dq\right], \tag{2.5}$$

приводится к более простому виду

$$zz' = \Phi_1(q)z + \Phi_0(q), \tag{2.6}$$

где, в свою очередь,

$$-\Phi_0 = a_3E^2, \quad -\Phi_1 = (3a_3\tilde{p} + a_2)E. \tag{2.7}$$

Это — уравнение Абеля второго рода, т.е. уравнение вида

$$(p + h(q))\frac{dp}{dq} = h_2(q)p^2 + h_1(q)p + h_0(q). \tag{2.8}$$

Подстановками оно приводится к специальному виду, форма которого идентична (2.6).

Уравнение (2.6) подстановкой $z = Z + \Phi(q)$, где $\Phi(q) = \int \Phi_1 dq$, и заменой независимой переменной $\Theta = \int \Phi_0 dq$ приводится к виду

$$(Z + \Phi(\Theta))\frac{dZ}{d\Theta} = 1. \tag{2.9}$$

Другой подход состоит в линейной подстановке в (2.2) вида $p = b_1(q)\varsigma + b_0(q)$ такой, чтобы это уравнение максимально упростилось. Произведя указанную замену, получим

$$\begin{aligned} -b_1(q^2+1)\frac{d\varsigma}{dq} &= -b_1^3q\varsigma^3 + (3b_1^2 - 3b_1^2qb_0)\varsigma^2 + \\ &+ (6b_1b_0 + \frac{db_1}{dq}q^2 - 3b_1b_0^2q + \frac{db_1}{dq} - qb_1)\varsigma + \\ &+ \frac{db_0}{dq}q^2 - qb_0 - b_0^3q + 3 + 3b_0^2 + \frac{db_0}{dq}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Коэффициент при нулевой степени ς удается устранить, только если известно хотя бы одно частное решение уравнения (2.2).

Приравняем коэффициенты при ς^2 и ς нулю:

$$\begin{aligned} 3b_1^2 - 3b_1^2qb_0 &= 0, \\ 6b_1b_0 + \frac{db_1}{dq}q^2 - 3b_1b_0^2q + \frac{db_1}{dq} - qb_1 &= 0. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Отсюда находим

$$b_0 = \frac{1}{q}, \tag{2.12}$$

и дифференциальное уравнение

$$(1 + q^2)\frac{db_1}{dq} = (q - 3/q)b_1. \tag{2.13}$$

Поэтому необходимо найти хотя бы одно частное решение уравнения (2.13). Интеграл уравнения (2.13) без труда находится:

$$b_1 = \exp\left[\int \frac{q - 3/q}{1 + q^2}dq\right] = \frac{(q^2+1)^2}{q^3}. \tag{2.14}$$

В итоге уравнение (2.10) приводится к виду

$$\frac{(q^2+1)^2}{q^3}\frac{d\varsigma}{dq} = \frac{(q^2+1)^5}{q^8}\varsigma^3 - \frac{1}{q^2}, \tag{2.15}$$

или

$$\frac{(q^2+1)^2}{q}\frac{d\varsigma}{dq} = \frac{(q^2+1)^5}{q^6}\varsigma^3 - 1. \tag{2.16}$$

Далее произведем замену независимой переменной так, чтобы

$$d\upsilon = -2\frac{q}{(q^2+1)^2}dq, \tag{2.17}$$

т.е.

$$\upsilon = \frac{1}{q^2+1}. \tag{2.18}$$

В результате получим каноническую форму

$$2\frac{d\varsigma}{d\upsilon} = 1 - \frac{\varsigma^3}{\upsilon^2(1-\upsilon)^3}, \tag{2.19}$$

в которой отсутствуют иррациональности и которая по-прежнему классифицируется как уравнение Абеля первого рода. Заметим, что переменная υ изменяется в полуоткрытом интервале $(0,1]$.

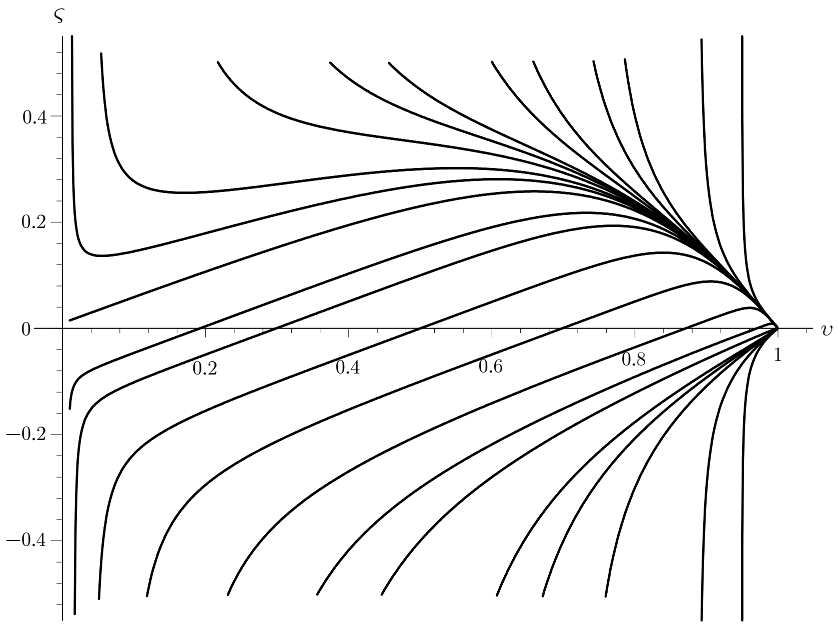

Рис. Интегральные кривые уравнения (2.19) внутри полосы $0 < \upsilon < 1$

Интегральные кривые уравнения (2.19) изображены на рисунке. Видно, что все интегральные кривые выходят из точки $\upsilon = 1$, $\varsigma = 0$.

Уравнение Абеля (2.19) не может иметь более двух существенно различных трансцендентных интегралов. Всякий однозначный интеграл уравнения (2.19) — рациональная функция[4].

Литература

[1] Радаев Ю.Н., Бахарева Ю.Н., Рябова Ю.Н. Автомодельные решения осесимметричной задачи теории пластичности// Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2003. №2(28). С. 96-112.

[2] Радаев Ю.Н. О канонических преобразованиях Пуанкаре и инвариантах уравнений пластического равновесия// Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. 1990. №1. С. 86-94.

[3] Радаев Ю.Н. К теории трехмерных уравнений математической теории пластичности// Изв. РАН. Мех. тверд. тела. 2003. №5. С. 63–65.

[4] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1976. 576 с.

[5] Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Факториал, 1997. 512 с.

ON THE CANONICAL FORMS OF EQUATIONS OF AXIALLY-SYMMETRIC PROBLEM OF THE MATHEMATICAL THEORY OF PLASTICITY

Y.N. Radayev, V.A. Gudkov[5]

The equations of axially-symmetric problem of the mathematical theory of plasticity are considered in the case when a stress state corresponds to an edge of the Tresca prism. The self-similar solutions when the self-similar variable being a product of power function of isostatic co-ordinates are obtained. Supposing special values for parameters involved in self-similar solution the problem is reduced to obtaining solution of a non-linear non-autonomous ordinary differential equation. This equation is transformed into the Abel form whereby it can be identified. The Abel form is then represented in its canonical pattern.

Поступила в редакцию 27/*VIII*/2003;
в окончательном варианте — 27/*IX*/2003.

[4] Все эти результаты читатель может найти в монографии: Голубев В.В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.: Гостехиздат, 1950. 436 с.

[5] Radayev Yuri Nickolaevich (`radayev@ssu.samara.ru`), Gudkov Vasilij Alexandrovich, Dept. of Continuum Mechanics, Samara State University, Samara, 443011, Russia.