

УДК 539.374

К ТЕОРИИ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

© 2003 Ю.Н. Радаев, Ю.Н. Бахарева¹

Уравнения пространственной задачи теории пластичности проинтегрированы в изостатической координатной системе и явно указаны три интегрируемых соотношения. Установлено, что осесимметричная задача теории пластичности допускает ряд автомодельных решений, когда в качестве автомодельных переменных выступают произведения степеней изостатических координат. Получающаяся система дифференциальных уравнений при некоторых значениях параметров, определяющих форму автомодельного решения, может быть сведена к одному нелинейному неавтономному дифференциальному уравнению первого порядка. Построены интегральные кривые этого уравнения внутри естественной области определения. В области автомодельного решения численно получена зависимость наибольшего (наименьшего) главного напряжения от полярного угла в меридиональной плоскости.

Введение

Настоящая работа является логическим продолжением статьи [1], которая была посвящена поиску автомодельных решений осесимметричной задачи теории пластичности. Поиск автомодельных решений был реализован на основе соотношений пространственной задачи [2], сформулированных в изостатических координатах, с учетом осевой симметрии и возможности отделения еще одной изостатической координаты, помимо угловой переменной, и сведен в конце концов (при дополнительных предположениях о значениях показателей, определяющих форму автомодельных решений) к интегрированию единственного обыкновенного дифференциального уравнения, которое заменами может быть приведено к уравнению Абеля первого рода.

Автомодельные решения для скоростей, соответствующие граничным кинематическим условиям текучести, приводятся в монографии [3, с. 89-94]. В [4] рассматривается осесимметричное пластическое течение жесткопластического неупрочняющегося материала с условием пластичности Треска

¹ Радаев Юрий Николаевич (radayev@ssu.samara.ru), Бахарева Юлия Николаевна (bahareva@ssu.samara.ru), кафедра механики сплошных сред Самарского государственного университета, 443011, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

и ассоциированным с ним законом течения. В этой работе также изучены пластические поля напряжений, примыкающие к свободным от нагрузок коническим поверхностям.

Целью представляемой работы является численный анализ автомодельных уравнений осесимметричной задачи теории пластичности, вычисление распределений главных нормальных напряжений в зоне автомодельного решения и их анализ в зависимости от показателей, определяющих форму рассматриваемых автомодельных решений.

1. Автомодельные решения осесимметричной задачи

В работе [1] было доказано, что осесимметричная задача теории пластичности допускает ряд автомодельных решений, когда в качестве автомодельных переменных выступают произведения степеней изостатических координат. Будем использовать обозначения, согласующиеся с обозначениями указанной работы. Обозначим через σ_{ij} компоненты тензора напряжений; $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — собственные значения тензора напряжений (главные напряжения); $\mathbf{n}$ — собственный вектор, соответствующий либо наименьшему, либо наибольшему собственному значению, в качестве которого примем главное нормальное напряжение σ_3 .

Осесимметричное пластическое течение, когда напряженное состояние соответствует ребру призмы Треска, можно разделить на следующие два типа²:

- 1) тангенциальное напряжение является наибольшим (наименьшим) главным напряжением, а меридиональные главные напряжения равны;
- 2) тангенциальное напряжение равно одному из меридиональных главных напряжений, а максимальное касательное напряжение в меридиональной плоскости равно пределу текучести k . Первый случай исследуется элементарными средствами. Второй случай — состояние "полной пластичности" Хаара—Кармана. Если присвоить тангенциальному главному напряжению второй номер и обозначить через σ_3 наибольшее (наименьшее) из двух меридиональных главных напряжений, то приходим к соотношению, характеризующему состояние "полной пластичности":

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \pm 2k, \quad (1.1)$$

где k — предел текучести при чистом сдвиге. Пусть, ради определенности, σ_1 — наибольшее меридиональное главное напряжение, тогда

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 + 2k. \quad (1.2)$$

² Тангенциальное напряжение всегда будет главным напряжением при осесимметричном напряженном состоянии. Классификация различных режимов осесимметричного пластического течения приводится в [4].

Преобразуем, следуя [2], уравнение равновесия к криволинейным изостатическим координатам ξ^1, ξ^2, ξ^3 :

$$-\frac{\partial}{\partial \xi^l} \left(\frac{\sigma_3}{2k} \right) + g^{-1/2} g_{kl} \frac{\partial (g^{1/2} n^k n^m)}{\partial \xi^m} + n^r n^s [rs, l] = 0, \quad (1.3)$$

где g_{ij} — компоненты метрического тензора; g — определитель, составленный из компонент метрического тензора изостатической координатной системы; $[rs, l]$ — символы Кристоффеля первого рода. Через n^m обозначены контравариантные компоненты векторного поля $\mathbf{n}$, направленного вдоль главной оси напряжений, соответствующей наименьшему собственному значению σ_3 .

Ключевым для дальнейшего анализа системы уравнений пространственной задачи теории пластичности (1.3) выступает условие расслоенности векторного поля $\mathbf{n}$ в зоне пластического течения.

Можно показать, что нетривиальные решения уравнения (1.3) в некоторой области можно получить только в случае, если векторное поле $\mathbf{n}$ расслоенное (т.е. существует семейство поверхностей, заполняющее эту область, такое, что векторное поле единичных нормалей к поверхностям данного семейства совпадает с полем $\mathbf{n}$ собственных векторов тензора напряжений) и вихрь его ненулевой. Эти два условия (расслоенность и ненулевая завихренность) могут быть выражены следующим образом: $\mathbf{n} \cdot \text{rot} \mathbf{n} = 0$, $\text{rot} \mathbf{n} \neq 0$.

Уравнения (1.3) в криволинейных координатах ξ^m , выбранных таким образом, что координатные поверхности $\xi^3 = \text{const}$ есть слои поля $\mathbf{n}$, а поверхности $\xi^1 = \text{const}$ и $\xi^2 = \text{const}$ — интегральные поверхности поля $\mathbf{n}$, существенно упрощаются [2]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi^1} \left(\frac{\sigma_3}{2k} + \ln \sqrt{g_{33}} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \xi^2} \left(\frac{\sigma_3}{2k} + \ln \sqrt{g_{33}} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \xi^3} \left(\frac{\sigma_3}{2k} + \ln \sqrt{g_{33}} - \ln \sqrt{g} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Необходимое и достаточное условие интегрируемости системы (1.2) состоит в возможности разложения детерминанта g в произведение двух положительных функций:

$$g = G_1(\xi^1, \xi^2) G_2(\xi^3). \quad (1.5)$$

Ясно, что в условиях осевой симметрии декартовы координаты x_1, x_2, x_3 и криволинейные изостатические координаты ξ^1, ξ^2, ξ^3 связаны соотношениями

$$x_1 = f(\xi^1, \xi^3) \cos \xi^2, \quad x_2 = f(\xi^1, \xi^3) \sin \xi^2, \quad x_3 = h(\xi^1, \xi^3). \quad (1.6)$$

Необходимо также отметить, что в осесимметричном случае в (1.3) нет зависимости от угловой переменной ξ^2 .

Будем искать, следуя [1], автомодельное решение осесимметричной задачи математической теории пластичности в форме

$$f = \xi^1 \alpha \xi^3 \beta F(\xi), \quad h = \xi^1 \alpha_1 \xi^3 \beta_1 H(\xi), \quad (1.7)$$

где $\xi = \xi^1 \gamma \xi^3 \delta$ — автомодельная переменная; $\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1, \gamma, \delta$ — некоторые показатели. Тогда при условии, что существует показатель ω такой, что

$$\xi^\omega = \xi^{1-\alpha_1-\alpha} \xi^{3-\beta_1-\beta}, \quad (1.8)$$

система двух уравнений в частных производных (см. [1]) сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \alpha\beta F^2 + \xi(\alpha\delta + \gamma\beta)FF' + \xi^2\gamma\delta F'^2 + \\ + \xi^{2\omega}[\alpha_1\beta_1 H^2 + \xi(\alpha_1\delta + \beta_1\gamma)HH' + \xi^2\gamma\delta H'^2] = 0, \\ \left(FH' - HF' + \frac{\omega}{\xi}HF\right)^2 = G_1(\xi^1)G_2(\xi^3) \times \\ \times [(\alpha\delta - \beta\gamma)\xi^{1-1-2\alpha-2\alpha_1}\xi^{3-1-2\beta-2\beta_1}\xi F]^{-2}, \end{cases} \quad (1.9)$$

где в силу условия (1.8) должны выполняться равенства $\alpha_1 = \alpha + \gamma\omega$, $\beta_1 = \beta + \delta\omega$, а остальные показатели независимы; штрихом здесь и в дальнейшем обозначается дифференцирование по автомодельной переменной ξ . Естественно предполагается выполнение неравенства $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

С целью устранения переменных ξ^1 и ξ^3 в (1.9) представим G_1 и G_2 в следующем виде:

$$G_1(\xi^1) = C_1 \xi^{1-4\alpha-2\alpha_1+\gamma(\mu+1)-2}, \quad G_2(\xi^3) = C_2 \xi^{3-4\beta-2\beta_1+\delta(\mu+1)-2}, \quad (1.10)$$

где C_1 и C_2 — некоторые положительные константы, а μ — некоторый показатель.

Преобразуем полученную систему (1.9), вводя в плоскости $\xi^{-\omega/2}F$, $\xi^{\omega/2}H$ полярные координаты:

$$\xi^{-\omega/2}F = \rho \cos \iota, \quad \xi^{\omega/2}H = \rho \sin \iota. \quad (1.11)$$

В меридиональной плоскости $x_2 = 0$ справедливы соотношения:

$$\xi^\omega \xi^{1-\alpha} \xi^{3-\beta} \rho^2 = x_1^2 + x_3^2, \quad \operatorname{tg} \iota = \frac{x_3}{x_1},$$

исходя из которых можно сделать вывод, что ι есть полярный угол в меридиональной плоскости.

Автомодельную переменную ξ , как показано в [1], удается устранить, положив $\mu = \omega - 2$; в результате порядок системы (1.9) понижается на одну единицу и получается³ дифференциальное уравнение первого порядка

$$l_1 e^{6W} \cos^2 \iota + l_2 e^{3W} \cos \iota \frac{dW}{d\iota} = 1 + \left(\frac{dW}{d\iota}\right)^2, \quad (1.12)$$

где $W = \ln \rho$, а постоянные коэффициенты l_1 и l_2 определяются следующим образом:

$$l_1 = \frac{-(4\alpha\beta + 2\omega(\alpha\delta + \beta\gamma) + \omega^2\gamma\delta)(\alpha\delta - \beta\gamma)^2}{4C\gamma\delta},$$

$$l_2 = \frac{-(\alpha\delta + \beta\gamma + \omega\gamma\delta)(\alpha\delta - \beta\gamma)}{\sqrt{C}\gamma\delta} \operatorname{sign}(\alpha\delta - \beta\gamma).$$

³ Мы полагаем, что $d\iota/d\xi > 0$.

Исследуем знак коэффициента l_1 , для чего необходимо исследовать знак квадратного трехчлена $4\alpha\beta + 2(\alpha\delta + \beta\gamma)\omega + \gamma\delta\omega^2$. Подсчитывая его корни

$$\omega_{1,2} = \frac{-(\alpha\delta + \beta\gamma) \pm |\alpha\delta - \beta\gamma|}{\gamma\delta},$$

для l_1, l_2 находим выражения

$$l_1 = -\gamma^2\delta^2 \frac{(\omega_1 - \omega_2)^2(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)}{16C},$$

$$l_2 = -\gamma\delta \frac{(\omega_1 - \omega_2)(2\omega - \omega_1 - \omega_2)}{4\sqrt{C}}.$$

Предположим, что $l_1 > 0$, т.е. либо γ и δ одного знака и $\omega_2 < \omega < \omega_1$, либо γ и δ разных знаков и $\omega_1 < \omega < \omega_2$. Тогда, поскольку $\text{sign}(\gamma\delta)\text{sign}(\omega_1 - \omega_2) = 1$, то

$$\frac{l_2}{\sqrt{l_1}} = -\frac{\omega' + \omega''}{\sqrt{|\omega'\omega''|}},$$

где $\omega' = \omega - \omega_1$, $\omega'' = \omega - \omega_2$. Произведем замены переменных $e^{3W} = z^{-1}$ и $\sin \iota = u$. Обозначая $\bar{v} = z/\sqrt{l_1}$, уравнение (1.12) представим в форме

$$\left(\frac{d\bar{v}}{du}\right)^2 = 3^2 \left(1 + \frac{\omega' + \omega''}{3\sqrt{|\omega'\omega''|}} \frac{d\bar{v}}{du} - \frac{\bar{v}^2}{1-u^2}\right), \quad (1.13)$$

или в форме, разрешенной относительно производной

$$\frac{2}{3} \frac{d\bar{v}}{du} = \frac{\omega' + \omega''}{\sqrt{|\omega'\omega''|}} \pm \sqrt{\frac{(\omega' + \omega'')^2}{|\omega'\omega''|} + 4\left(1 - \frac{\bar{v}^2}{1-u^2}\right)}. \quad (1.14)$$

Естественной областью определения этого уравнения служит внутренность эллипса, уравнение которого есть

$$u^2 + \frac{\bar{v}^2}{\gamma_1^2} = 1,$$

а большая полуось определяется как

$$\gamma_1 = \sqrt{1 + \frac{(\omega' + \omega'')^2}{4|\omega'\omega''|}}.$$

Нетрудно заметить, что при условии $l_1 > 0$ необходимо $\omega'\omega'' < 0$, т.е.

$$\gamma_1^2 = -\frac{(\omega' - \omega'')^2}{4\omega'\omega''}.$$

Уравнение (1.14) представляет собой нелинейное неавтономное дифференциальное уравнение, содержащее иррациональность в правой части. Аналитически уравнение (1.13) пока проинтегрировать не удастся. Поэтому проанализируем его численно⁴. На рис. 1 изображены интегральные кривые уравнения (1.14) внутри естественной области определения.

⁴ Численная реализация базируется на методе Рунге—Кутты 4-го порядка точности; шаг имеет порядок 10^{-4} .

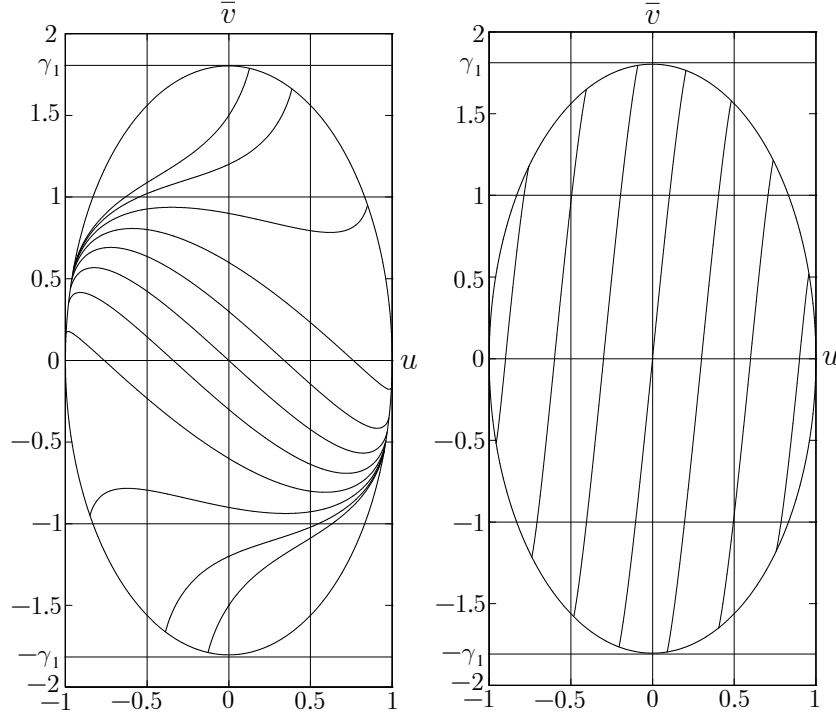


Рис. 1. Интегральные кривые уравнения (1.14). Рисунок слева соответствует отрицательному знаку в этом уравнении. Значение отношения $-l_2 l_1^{-1/2}$ выбрано равным трем

Вводя вместо пары переменных $\bar{v}$ и u пару τ , ι по формулам $\bar{v} = \gamma_1 \sin \tau \cos \iota$, $u = \sin \iota$, приходим к уравнению, содержащему тригонометрическую иррациональность

$$\frac{d\tau}{d\iota} = \left(\frac{3}{2} \frac{\omega' + \omega''}{\gamma_1 \sqrt{|\omega' \omega''|} \cos \tau} \pm 3 \right) + \operatorname{tg} \tau \operatorname{tg} \iota, \quad (1.15)$$

которое, учитывая, что $\omega' \omega'' < 0$ при условии $l_1 > 0$, может быть преобразовано к

$$\frac{d\tau}{d\iota} = 3 \left(\frac{\omega' + \omega''}{|\omega' - \omega''| \cos \tau} \pm 1 \right) + \operatorname{tg} \tau \operatorname{tg} \iota. \quad (1.16)$$

Предположим далее, что $l_1 < 0$, т.е. 1) γ и δ одного знака и $\omega > \omega_1$; 2) γ и δ одного знака и $\omega < \omega_2$; 3) γ и δ разных знаков и $\omega > \omega_2$; 4) γ и δ разных знаков и $\omega < \omega_1$.

Производя в уравнении (1.12) замены $e^{3W} = z^{-1}$, $\sin \iota = u$ и обозначая $\bar{v} = z / \sqrt{-l_1}$, приходим к следующему уравнению:

$$\left(\frac{d\bar{v}}{du} \right)^2 = 3^2 \left(-1 + \frac{\omega' + \omega''}{3 \sqrt{|\omega' \omega''|}} \frac{d\bar{v}}{du} - \frac{\bar{v}^2}{1 - u^2} \right), \quad (1.17)$$

или в форме, разрешенной относительно производной

$$\frac{2}{3} \frac{d\bar{v}}{du} = \frac{\omega' + \omega''}{\sqrt{|\omega' \omega''|}} \pm \sqrt{\frac{(\omega' + \omega'')^2}{|\omega' \omega''|} - 4 \left(1 + \frac{\bar{v}^2}{1 - u^2}\right)}. \quad (1.18)$$

Естественной областью определения этого уравнения служит внутренность эллипса, уравнение которого есть

$$u^2 + \frac{\bar{v}^2}{\gamma_2^2} = 1,$$

а большая полуось определяется как

$$\gamma_2 = \sqrt{-1 + \frac{(\omega' + \omega'')^2}{4|\omega' \omega''|}}.$$

Нетрудно заметить, что при условии $l_1 < 0$ необходимо $\omega' \omega'' > 0$, т.е.

$$\gamma_2^2 = \frac{(\omega' - \omega'')^2}{4\omega' \omega''}.$$

Поведение интегральных кривых уравнения (1.18) внутри естественной области определения представлено на рис. 2.

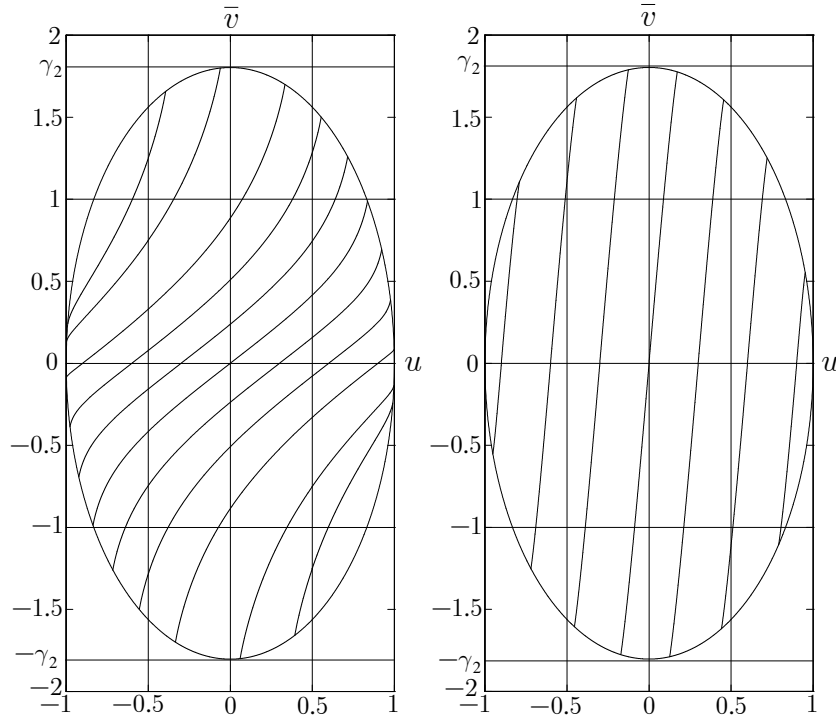


Рис. 2. Интегральные кривые уравнения (1.18). Рисунок слева соответствует отрицательному знаку в этом уравнении. Значение выражения $l_2(-l_1)^{-1/2}$ принято равным $\sqrt{17}$

Вводя вместо пары переменных $\bar{v}$ и u пару τ , ι по формулам $\bar{v} = \gamma_2 \sin \tau \cos \iota$, $u = \sin \iota$, приходим к уравнению, совпадающему с (1.16).

Форма автомодельного решения в переменных τ , ι определяется, как это следует из уравнения (1.16), единственным параметром

$$\omega^* = \frac{\omega' + \omega''}{|\omega' - \omega''|}. \quad (1.19)$$

Этот параметр может быть выражен через показатели автомодельного решения:

$$\omega^* = \text{sign}(\gamma\delta) \frac{\alpha\delta + \beta\gamma + \omega\gamma\delta}{|\alpha\delta - \beta\gamma|}. \quad (1.20)$$

Уравнение (1.16) анализировалось численно. На рис. 3, 4 изображены интегральные кривые уравнения (1.16) внутри квадрата $[-\pi/2, \pi/2] \times [-\pi/2, \pi/2]$.

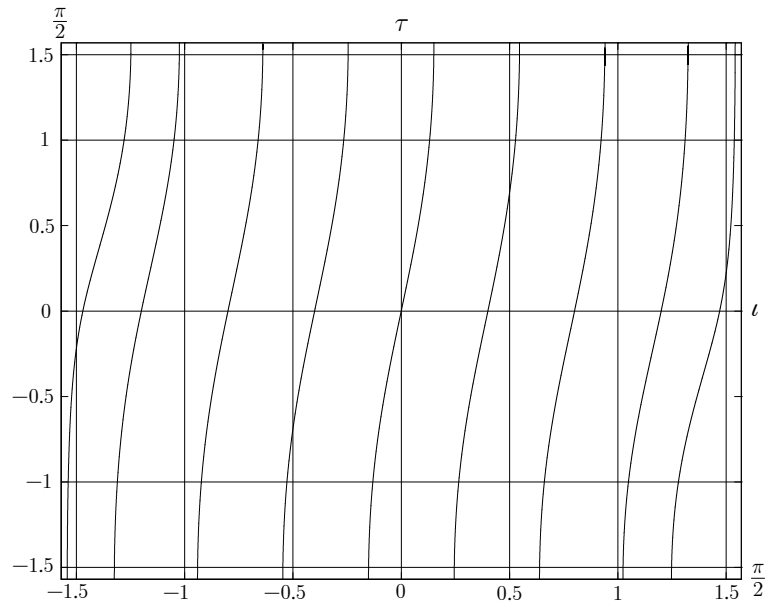


Рис. 3. Интегральные кривые уравнения $\frac{d\tau}{d\iota} = 3 \left(\frac{\omega^*}{\cos \tau} + 1 \right) + \text{tg}\tau \text{tg}\iota$. Значение параметра (1.19) выбрано равным трем

Уравнение (1.16) упрощается, если $\omega' + \omega'' = 0^5$, т.е. когда показатель ω подобран в соответствии с формулой

$$-\omega = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\delta}.$$

⁵ Речь не идет об уравнении (1.17), поскольку равенство $\omega' + \omega'' = 0$ предполагает, что $\omega'\omega'' < 0$.

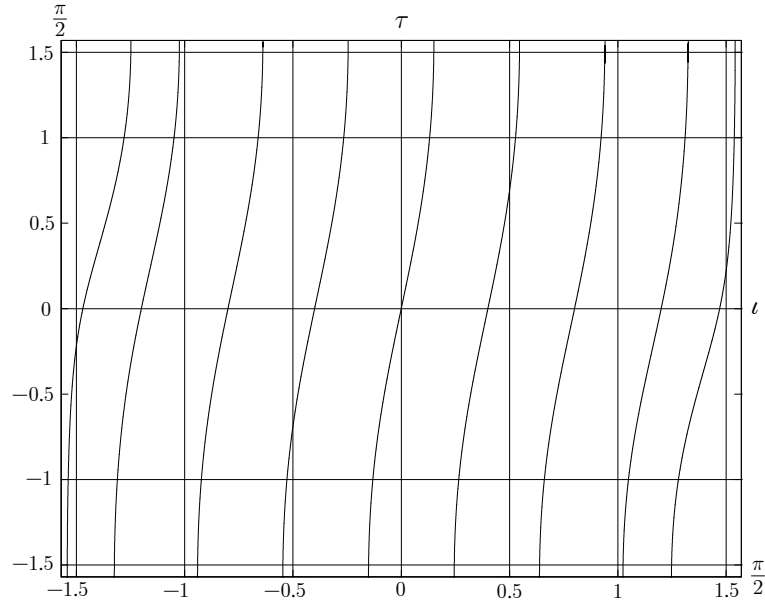


Рис. 4. Интегральные кривые уравнения $\frac{d\tau}{dt} = 3\left(\frac{\omega^*}{\cos \tau} - 1\right) + \text{tg}\tau \text{tgi}$. Значение параметра (1.19) выбрано равным трем

После того как определена зависимость функций F и H от автомодельной переменной ξ , разыскание главных осей напряжений и величин главных напряжений не представляет труда.

2. Распределение главных напряжений в области автомодельного решения

Вычисляя метрику, соответствующую преобразованию координат (1.5), на основании (1.2) может быть найдено распределение главного нормального напряжения σ_3 в зоне автомодельного решения.

С помощью несложных расчетов компоненту g_{33} метрического тензора можно получить в форме

$$g_{33} = \xi^{1-2\alpha+\gamma\omega} \xi^{3-2\beta+\delta\omega-2} \left[((\beta + \delta\omega/2)\rho + \gamma\xi\rho')^2 + (\gamma\xi\rho')^2 \right]. \quad (2.1)$$

Определитель g в соответствии с формулами (1.3), а также представлениями (см. (1.10))

$$G_1(\xi^1) = C_1 \xi^{1-6\alpha+2\gamma\omega+\gamma(\mu+1)-2}, \quad G_2(\xi^3) = C_2 \xi^{3-6\beta+2\delta\omega+\delta(\mu+1)-2}, \quad (2.2)$$

вычисляется в виде

$$g = C \xi^{1-6\alpha+2\gamma\omega-2+\gamma(1+\mu)} \xi^{3-6\beta+2\delta\omega-2+\delta(1+\mu)}. \quad (2.3)$$

Преобразуем выражение (2.1). Для этого рассмотрим систему уравне-

ний, полученную из (1.9) в результате замены переменных (1.11):

$$\begin{cases} \alpha\beta\rho^2 + (\alpha\delta + \gamma\beta)\omega\rho^2/2 + \gamma\delta\omega^2\rho^2/4 + \\ + \xi[(\alpha\delta + \beta\gamma + \omega\gamma\delta)\rho\rho'] + \xi^2\gamma\delta(\rho'^2 + \rho^2\iota'^2) = 0, \\ \iota'^2 = \frac{C\xi^{\mu-\omega}}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2\rho^6\cos^2\iota}. \end{cases} \quad (2.4)$$

Воспользуемся первым уравнением системы (2.4), разрешим его относительно ρ' . Дискриминант квадратного относительно ρ' уравнения есть

$$D = \frac{\xi^2}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2\rho^4\cos^2\iota} [(\alpha\delta - \beta\gamma)^4\rho^6\cos^2\iota - 4C\gamma^2\delta^2\xi^{\mu-\omega+2}]. \quad (2.5)$$

Для дальнейших рассуждений удобно ввести обозначение:

$$D^* = (\alpha\delta - \beta\gamma)^4\rho^6\cos^2\iota - 4C\gamma^2\delta^2\xi^{\mu-\omega+2}.$$

Тогда система уравнений (2.4) примет вид:

$$\begin{cases} \rho' = -\frac{\alpha\delta + \beta\gamma + \gamma\delta\omega}{2\gamma\delta} \frac{\rho}{\xi} \pm \frac{\sqrt{D^*}}{2\gamma\delta\xi(\alpha\delta - \beta\gamma)\rho^2\cos\iota}, \\ \iota' = \text{sign}(\alpha\delta - \beta\gamma) \frac{\sqrt{C}\xi^{(\mu-\omega)/2}}{(\alpha\delta - \beta\gamma)\rho^3\cos\iota}. \end{cases} \quad (2.6)$$

Отметим, что из определения автомодельной переменной ξ следует, что $\xi^1 = \xi^{1/\gamma}\xi^{3-\delta/\gamma}$. Устранив таким образом переменную ξ^1 и учитывая систему уравнений (2.6), на основании которой можно исключить производные ρ' , ι' , запишем соотношение (2.1) для g_{33} в форме

$$g_{33} = \xi^{3-2(\beta-\alpha\delta/\gamma-1)}\xi^{2\alpha/\gamma+\omega} \left[L_1\rho^2 \pm \frac{L_2\sqrt{D^*}}{\rho\cos\iota} \right], \quad (2.7)$$

где

$$\begin{aligned} L_1 &= \delta^2(\alpha\delta - \beta\gamma)^2(L_2^2 + (2\delta^2)^{-2}), \\ 2L_2 &= (2\beta + \delta\omega - \alpha - \beta\gamma\delta^{-1} - \gamma\omega)\delta^{-1}(\alpha\delta - \beta\gamma)^{-1}. \end{aligned}$$

После этого, определив g_{33} , можно следующим образом найти выражение для σ_3 . Из анализа первых двух уравнений системы (1.2) можно сделать вывод о том, что сумма $\sigma_3/2k + \ln\sqrt{g_{33}}$ может зависеть только от координаты ξ^3 :

$$\frac{\sigma_3}{2k} + \ln\sqrt{g_{33}} = f(\xi^3). \quad (2.8)$$

Тогда последнее уравнение этой системы позволяет заключить, что

$$\frac{\partial}{\partial\xi^3} (f(\xi^3) - \ln\sqrt{g}) = 0. \quad (2.9)$$

Воспользуемся далее соотношением для определителя метрического тензора (2.3), устраним в нем переменную ξ^1 (выразив ее через ξ и ξ^3) и, интегрируя (2.9), установим вид функции $f(\xi^3)$:

$$f(\xi^3) = (3\beta + \delta\omega - 1 + \delta(1 - \mu)/2)\ln|\xi^3| + \text{const}. \quad (2.10)$$

Таким образом удастся определить главное напряжение σ_3 в области автомодельного решения:

$$\sigma_3 = 2k \ln \left| \xi^3 \beta + \delta(3\omega - 1)/2 - 1 g_{33}^{-1/2} \right| + \text{const.} \quad (2.11)$$

Остальные главные напряжения определяются в соответствии с равенствами (1.2).

Отметим, что, согласно (2.11), главное напряжение σ_3 зависит от ξ , ξ^3 , ι и ρ . Численно анализируя систему (2.6), можно получить зависимости $\iota = \iota(\xi)$, $\rho = \rho(\xi)$ и тем самым выразить главное напряжение σ_3 только через переменные ξ и ξ^3 . Мы будем избегать прямого анализа системы (2.6) и в целях простоты ограничимся лишь минимальным набором параметров, определяющих форму автомодельного решения.

Прежде всего, удобно, используя (2.11), подобрать такую величину, которая зависела бы только от автомодельной переменной ξ :

$$\begin{aligned} \sigma_3 - k(4\beta + 3\delta\omega + 2\alpha\delta\gamma^{-1} + \delta(1 - \mu)) \ln |\xi^3| = \\ = -k \ln \left| \xi^{2\alpha/\gamma + \omega} \left[\rho^2 L^1 \pm \frac{L_2 \sqrt{D^*}}{\rho \cos \iota} \right] \right| + \text{const.} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Рассмотрим далее частный случай. В определении автомодельной переменной ξ положим $\gamma = 1$ и $\delta = -1$, т.е.

$$\xi = \frac{\xi^1}{\xi^3}.$$

Предположим также, что все остальные параметры, определяющие, согласно (1.7), форму автомодельного решения осесимметричной задачи, равны друг другу: $\alpha = \beta = \alpha_1 = \beta_1$. Тогда на основании (1.8) заключаем, что показатель $\omega = 0$. Заметим, что $\mu = -2$.

Необходимое для построения распределения главного напряжения σ_3 соотношение (2.7) представляется тогда в виде следующей зависимости:

$$g_{33} = \xi^{2\alpha} \xi^{3-4\alpha-2} \left(2\alpha^2 \rho^2 \pm \frac{\sqrt{D^*}}{2\rho \cos \iota} \right), \quad (2.13)$$

где для D^* имеет место равенство:

$$D^* = 16\alpha^4 \rho^6 \cos^2 \iota - 4C.$$

Соотношение (2.12) с учетом сделанных выше предположений о значениях показателей перепишем в виде

$$\sigma_3 - k(2\alpha - 3) \ln |\xi^3| = -k \ln \left| \xi^{2\alpha} \left(2\alpha^2 \rho^2 \pm \frac{\sqrt{D^*}}{2\rho \cos \iota} \right) \right| + \text{const}, \quad (2.14)$$

а систему уравнений (2.6) —

$$\begin{cases} \rho' = \pm \frac{\sqrt{D^*}}{4\alpha \xi \rho^2 \cos \iota}, \\ \iota' = \frac{\sqrt{C}}{2|\alpha| \xi \rho^3 \cos \iota}. \end{cases} \quad (2.15)$$

Ограничимся выбором положительного знака в первом уравнении системы (2.15). Для рассматриваемого частного случая значения параметров l_1 и l_2 вычисляются как

$$l_1 = 4\alpha^4/C, \quad l_2 = 0.$$

Ясно, что $l_1 > 0$, и уравнение (1.14) для переменных $u, \bar{v}$ будет иметь следующий вид:

$$\frac{d\bar{v}}{du} = \pm 3 \sqrt{1 - \frac{\bar{v}^2}{1 - u^2}}. \quad (2.16)$$

Проинтегрируем это уравнение (выбрав положительный знак) численно, задавая при $u = 0.1$ значения $\bar{v}$ на отрезке $[-0.8, 0.8]$ с шагом 0.1. Произведем затем обратные замены переменных. В результате получим функциональные зависимости $\rho = \rho(u)$ вдоль каждой из 17 интегральных кривых уравнения (2.16) на плоскости $u, \bar{v}$. Используя второе уравнение системы (2.15) и разделяя в нем переменные, находим зависимости $\xi = \xi(u)$ (или $u = u(\xi)$) вдоль упомянутых интегральных кривых. В итоге можно найти зависимость разности $k^{-1}\sigma_3 - (2\alpha - 3)\ln|\xi^3|$ от полярного угла u в меридиональной плоскости. Соответствующие графики приводятся на рис. 5, если $\bar{v} > 0$, и рис. 6, если $\bar{v} < 0$.

Разность $k^{-1}\sigma_3 - (2\alpha - 3)\ln|\xi^3|$ в зависимости от автомодельной переменной ξ представлена на рис. 7 и рис. 8 соответственно для случаев $\bar{v} > 0$ и $\bar{v} < 0$.

Интересно отметить, что разность $k^{-1}\sigma_3 - (2\alpha - 3)\ln|\xi^3|$ при $\alpha = 3/2$ в точности равна безразмерному третьему главному напряжению, которое, следовательно, будет зависеть в этом случае только от автомодельной переменной ξ (или только от полярного угла в меридиональной плоскости). Ясно, что и в общем случае (см. (2.12)), положив

$$4\beta + 3\delta\omega + 2\alpha\delta\gamma^{-1} + \delta(1 - \mu) = 0,$$

можно заключить, что наибольшее (наименьшее) главное нормальное напряжение в области автомодельного решения зависит только от автомодельной переменной ξ .

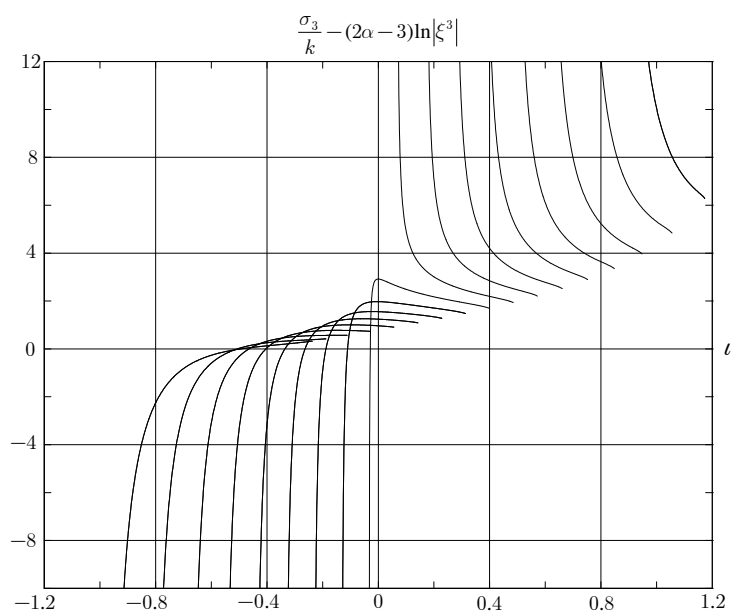


Рис. 5. Зависимость разности $k^{-1}\sigma_3 - (2\alpha - 3)\ln|\xi^3|$ от полярного угла ι в области автомодельного решения $\bar{v} > 0$

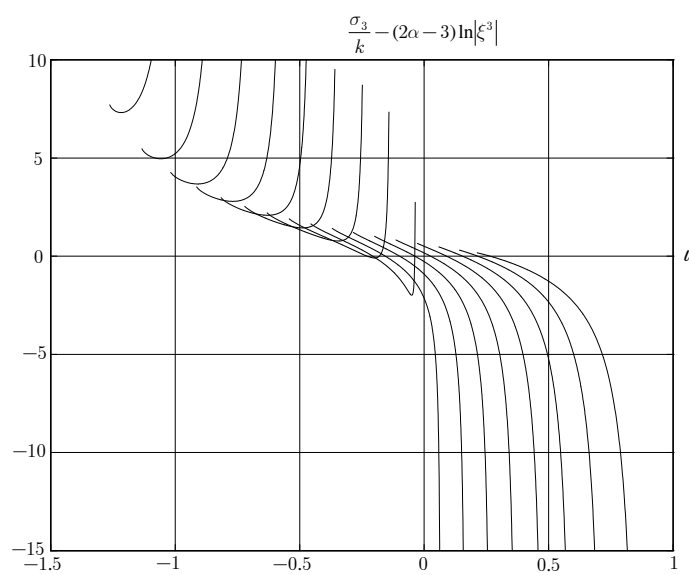


Рис. 6. Зависимость разности $k^{-1}\sigma_3 - (2\alpha - 3)\ln|\xi^3|$ от полярного угла ι в области автомодельного решения $\bar{v} < 0$

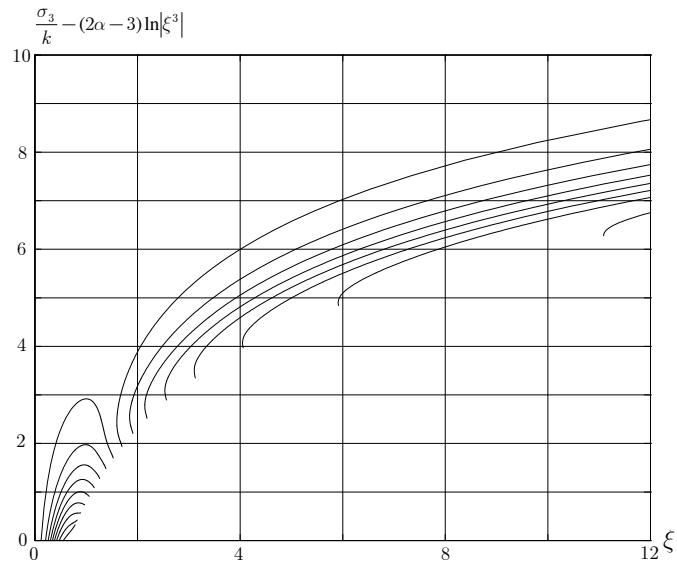


Рис. 7. Зависимость разности $k^{-1}\sigma_3 - (2\alpha - 3)\ln|\xi^3|$ от автомодельной переменной в области $\bar{v} > 0$

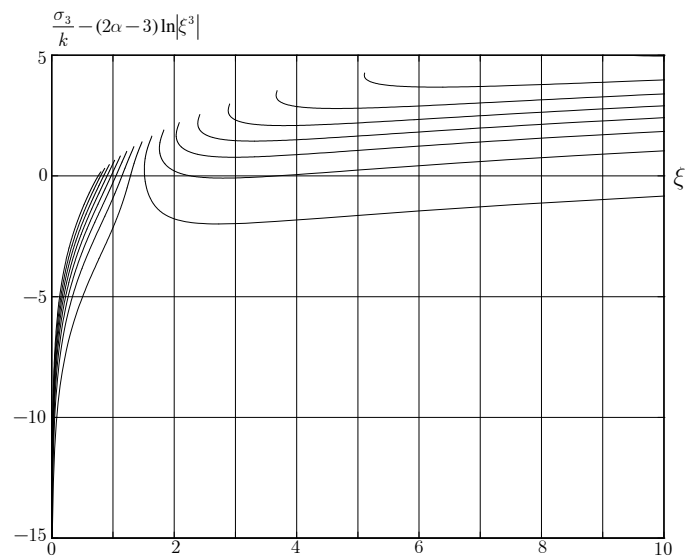


Рис. 8. Зависимость разности $k^{-1}\sigma_3 - (2\alpha - 3)\ln|\xi^3|$ от автомодельной переменной в области $\bar{v} < 0$

Литература

- [1] Радаев Ю.Н., Бахарева Ю.Н., Рябова Ю.Н. Автомодельные решения осесимметричной задачи теории пластичности// Вестник Самарского гос. ун-та. Естественнонаучная серия. 2003. №2 (28). С. 96-112.
- [2] Радаев Ю.Н. О канонических преобразованиях Пуанкаре и инвариантах уравнений пластического равновесия// Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. 1990. №1. С. 86-94.
- [3] Ивлев Д.Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 232 с.
- [4] Шилд Р.Т. О пластическом течении металлов в условиях осевой симметрии// Сб. переводов "Механика". 1957. №1. С. 102-122⁶.

TO THE THEORY OF AXIALLY-SYMMETRIC PROBLEM OF THE MATHEMATICAL THEORY OF PLASTICITY

Y.N. Radayev, Y.N. Bakhareva⁷

The equations of three-dimensional problem of the mathematical theory of plasticity are analysed in the isostatic co-ordinate net and the three stress principal line invariants are obtained. A number of self-similar solutions of the axially-symmetric problem is given by introducing a self-similar variable as the products of powers of the isostatic co-ordinates. For special values of parameters involved in the self-similar solution the problem is reduced to obtaining solution of a non-linear non-autonomous ordinary differential equation. Then this equation is numerically analyzed. The computation of principal stresses distributions within the self-similar solutions zone is implemented.

Поступила в редакцию 27/VII/2003;
в окончательном варианте — 27/IX/2003.

⁶ Оригинальная работа: Schield R.T. On the plastic flow of metals under conditions of axial symmetry// Proc. Roy. Soc. Lond. 1955. V. 233A. No. 1193. P. 267-287.

⁷ Radayev Yuri Nickolaevich (radayev@ssu.samara.ru), Bakhareva Yuliya Nickolaevna (bahareva@ssu.samara.ru), Dept. of Continuum Mechanics, Samara State University, Samara, 443011, Russia.