УДК 539.67

СВЯЗАННАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ КОНЕЧНОГО ЦИЛИНДРА[1]

© 2003 С.А. Лычёв[2]

В работе построено замкнутое решение связанной динамической термоупругой задачи для конечного изотропного цилиндра. Решение представлено в форме спектральных разложений по биортогональной системе собственных функций несамосопряженного пучка дифференциальных операторов, порождаемых рассматриваемой задачей. Спектральные разложения получены с помощью специального класса несимметричных интегральных преобразований.

Введение

Термоупругость учитывает связанность процессов упругого деформирования и теплопроводности [1–4].Связанность полей оказывает существенное влияние на распределение деформаций и температуры при нестационарных процессах и импульсных нагружениях, особенно при резонансе [5]. В этой связи особый интерес представляют динамические задачи связанной термоупругости.

При учете связанности деформаций и температуры среда становится диссипативной, что, в частности, изменяет характер волновых процессов: в термоупругой среде волны затухают и обладают дисперсией. Все эти особенности отражаются и на специфике математической модели: дифференциальные уравнения термоупругого движения оказываются несамосопряженными.

В настоящее время разработан ряд способов интегрирования уравнений термоупругости. Так, в монографии [3] приведены общие схемы решения, в ходе которых производится сведение дифференциальных уравнений к интегродифференциальным либо интегральным, с последующей процедурой численного решения, а также построение представлений с помощью обобщенной теоремы Сомильяны и преобразования Лапласа, обращение которого также осуществляется численно.

---

[1] Представлена доктором физико-математических наук профессором Ю.Н. Радаевым.

[2] Лычёв Сергей Александрович (lychev@ssu.samara.ru), кафедра механики сплошных сред Самарского государственного университета 443011, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

Интегральные преобразования, в отличие от перечисленных выше методов, позволяют построить замкнутые решения без использования численных процедур. Эффективность такого способа зависит от выбора ядра преобразования, которое может быть построено с помощью алгоритмической процедуры метода конечных интегральных преобразований [5–7].

В настоящей работе, в силу несамосопряженности рассматриваемой задачи, ядра прямого и обратного преобразований оказываются различными, и решение строится в форме спектрального разложения по полной биортогональной системе вектор-функций [8, 9].

1. Постановка задачи и основные уравнения

В линейной теории термоупругости подразумевается, что в процессе деформирования происходят малые изменения температуры $\theta = T - T_0$ по отношению к абсолютной температуре T_0 начального состояния тела. При $|\theta/T_0| \ll 1$ выражения для свободной энергии F и энтропии S, отнесенные к единице объема, для изотропного материала формулируются следующим образом [3]:

$$F = \mu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} + \frac{\lambda}{2}\varepsilon_{kk}\varepsilon_{nn} - \gamma\varepsilon_{kk}\theta - \frac{c_\varepsilon}{2T_0}\theta^2, \quad S = \gamma\varepsilon_{kk} + \frac{c_\varepsilon}{T_0}\theta. \tag{1.1}$$

Здесь изотермические λ, μ — постоянные Ламе, γ — термомеханическая постоянная ($\gamma = (3\lambda + 2\mu)\alpha_t$, α_t — коэффициент теплового расширения), c_ε — теплоемкость при постоянной деформации, отнесенная к единице объема.

Из представлений (1.1) следуют уравнения Дюгамеля–Неймана

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + (\lambda\varepsilon_{kk} - \gamma\theta)\delta_{ij} \tag{1.2}$$

и уравнения термоупругого движения

$$(\lambda + 2\mu)\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}.\mathbf{u} - (\lambda + \mu)\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{u} - \gamma\boldsymbol{\nabla}\theta - \rho\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{X} = \mathbf{0}, \tag{1.3}$$

которые в совокупности с линеаризованным уравнением притока тепла[3] [10, 11, 3]

$$\Lambda\boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{\nabla}\theta - c_\varepsilon\dot{\theta} - T_0\gamma\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\nabla}.\mathbf{u} + \omega = 0 \tag{1.4}$$

формируют замкнутую систему уравнений термоупругости. В соотношениях (1.3), (1.4) использованы обозначения: Λ — коэффициент теплопроводности, $\boldsymbol{\nabla}$ — оператор Гамильтона, ρ — плотность, $\mathbf{X}$ — объемные силы, ω — мощность источников тепла, $\mathbf{u} = (u, v, w)$ — перемещения.

Отметим, что связанность уравнений (1.3), (1.4) проявляется через температурное слагаемое $\gamma\boldsymbol{\nabla}\theta$ и дилатационный член $\boldsymbol{\nabla}.\mathbf{u}$.

Рассмотрим термоупругий изотропный цилиндр радиуса R и высотой H. В цилиндрической системе координат соотношения Дюгамеля–Неймана

[3] Линеаризация осуществляется в предположении $|\theta/T_0| \ll 1$.

(1.2) принимают вид [3]:

$$\sigma_{rr}=(2\mu+\lambda)\frac{\partial u}{\partial r}+\lambda\Big(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\varphi}+\frac{u}{r}+\frac{\partial w}{\partial z}\Big)-\gamma\theta,\ \sigma_{r\varphi}=\mu\Big(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi}+\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r}\Big),$$
$$\sigma_{rz}=\mu\Big(\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial z}\Big),\ \sigma_{\varphi\varphi}=(2\mu+\lambda)\Big(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\varphi}+\frac{u}{r}\Big)+\lambda\Big(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial z}\Big)-\gamma\theta, \tag{1.5}$$
$$\sigma_{\varphi z}=\mu\Big(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\varphi}\Big),\ \sigma_{zz}=(2\mu+\lambda)\frac{\partial w}{\partial z}+\lambda\Big(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\varphi}+\frac{u}{r}\Big)-\gamma\theta,$$

а связанные уравнения движения и теплопроводности (1.3), (1.4) формулируются следующим образом

$$\mu\Big(\boldsymbol{\nabla}^2u-\frac{u}{r^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v}{\partial\varphi}\Big)+(\lambda+\mu)\frac{\partial e}{\partial r}-\rho\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-\gamma\frac{\partial\theta}{\partial r}=-X_r,$$
$$\mu\Big(\boldsymbol{\nabla}^2v-\frac{v}{r^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\Big)+(\lambda+\mu)\frac{1}{r}\frac{\partial e}{\partial\varphi}-\rho\frac{\partial^2v}{\partial t^2}-\frac{\gamma}{r}\frac{\partial\theta}{\partial\varphi}=-X_\varphi, \tag{1.6}$$
$$\mu\boldsymbol{\nabla}^2w+(\lambda+\mu)\frac{\partial e}{\partial z}-\rho\frac{\partial^2w}{\partial t^2}-\gamma\frac{\partial\theta}{\partial z}=-X_z,$$
$$\boldsymbol{\nabla}^2\theta-\frac{1}{\kappa}\frac{\partial\theta}{\partial t}-\eta\frac{\partial e}{\partial t}=-\omega,$$

где

$$\boldsymbol{\nabla}^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2},\quad e=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru)+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\varphi}+\frac{\partial w}{\partial z}.$$

Будем полагать, что боковая поверхность цилиндра свободна от нагрузок, т.е. $\sigma_{rr}|_{r=R}=\sigma_{r\varphi}|_{r=R}=\sigma_{rz}|_{r=R}=0$. Торцы не перемещаются в направлении оси z, но их перемещения в плоскости, перпендикулярной оси z, неограничены, т.е. $w|_{z=0,H}=\sigma_{z\varphi}|_{z=0,H}=\sigma_{rz}|_{z=0,H}=0$. Теплообмен цилиндра с окружающей средой не происходит, т.е. $\frac{\partial}{\partial r}\theta|_{r=R}=\frac{\partial}{\partial z}\theta|_{z=0,H}=0$.[4]

Перечисленные способы закрепления и теплоизоляции с учетом соотношений (1.5) определяют краевые условия:

$$\Big[(2\mu+\lambda)\frac{\partial u}{\partial r}+\lambda\Big(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\phi}+\frac{u}{r}+\frac{\partial w}{\partial z}\Big)-\gamma\theta\Big]\Big|_{r=R}=0,$$
$$\Big[\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial z}\Big]\Big|_{r=R}=0,\quad\Big[\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\varphi}\Big]\Big|_{r=R}=0,\quad\frac{\partial\theta}{\partial r}\Big|_{r=R}=0, \tag{1.7}$$

$$w\Big|_{z=0,H}=\Big[\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial z}\Big]\Big|_{z=0,H}=\Big[\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\varphi}\Big]\Big|_{z=0,H}=\frac{\partial\theta}{\partial z}\Big|_{z=0,H}=0. \tag{1.8}$$

Кроме того, для однозначного определения искомых функций следует принять условия периодичности по угловой переменной:

$$u\big|_{\varphi=0}=u\big|_{\varphi=2\pi},\ v\big|_{\varphi=0}=v\big|_{\varphi=2\pi},\ w\big|_{\varphi=0}=w\big|_{\varphi=2\pi},\ \theta\big|_{\varphi=0}=\theta\big|_{\varphi=2\pi}, \tag{1.9}$$

а также условия ограниченности на оси цилиндра:

$$u\big|_{r=0}<\infty,\quad v\big|_{r=0}<\infty,\quad w\big|_{r=0}<\infty,\quad\theta\big|_{r=0}<\infty. \tag{1.10}$$

[4] Нестационарные колебания конечного цилиндра с такими способами закрепления исследованы в работе [12].

Уравнения динамического термоупругого деформирования движения (1.6), краевые условия (1.7)— (1.10) совместно с начальными условиями

$$
\begin{gathered}
u\Big|_{t=0} = u_0, \quad v\Big|_{t=0} = v_0, \quad w\Big|_{t=0} = w_0, \quad \theta\Big|_{t=0} = \theta_0, \\
\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \dot{u}_0, \quad \frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0} = \dot{v}_0, \quad \frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0} = \dot{w}_0
\end{gathered} \tag{1.11}
$$

представляют собой математическую формулировку рассматриваемой начально-краевой задачи.

2. Операторная форма уравнений связанной термоупругости

На множестве 4-х мерных комплекснозначных вектор-функций, определенных в области $[0,R]\times[0,2\pi]\times[0,H]$, введем гильбертово пространство L_2^4 со скалярным произведением

$$
\langle \mathbf{y}, \mathbf{y}' \rangle = \int\limits_0^R \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^H \mathbf{y}^{\mathrm{T}} \overline{\mathbf{y}'}\, r dr d\varphi dz.
$$

Будем обозначать через $\mathbf{y} = (u, v, w, \theta)$ — искомую вектор-функцию, а через $\mathbf{f} = (-X_r, -X_\varphi, -X_z, -\omega)$ — заданную вектор-функцию, объемными массовыми силами X_r, X_φ, X_z и мощностью источников тепла ω. Далее будем полагать, что $\mathbf{y}, \mathbf{f} \in L_2^4$.

Запишем уравнения термоупругого движения (1.6) в операторной форме

$$
\begin{pmatrix} \mathcal{L}_1 & -\gamma\mathcal{L}_2 \\ 0 & \boldsymbol{\nabla}^2 \end{pmatrix} \mathbf{y} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\eta\mathcal{L}_3 & -\frac{1}{\kappa} \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{y} + \begin{pmatrix} -\rho\mathcal{E} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial t}\mathbf{y} = \mathbf{f}, \tag{2.1}
$$

где $\kappa = \dfrac{\Lambda}{c_\varepsilon}$ — коэффициент температуропроводности, $\eta = T_0\gamma$, $\mathcal{E}$ — единичный оператор, $\mathcal{L}_1$ — симметричный матричный дифференциальный оператор, соответствующий чисто упругому деформированию цилиндра

$$
\mathcal{L}_1 = \begin{pmatrix}
\mu(\boldsymbol{\nabla}^2 - \frac{1}{r^2}) + (\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial r}(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}) & \frac{\lambda+\mu}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}) - \frac{2\mu}{r^2}\frac{\partial}{\partial\varphi} & (\lambda+\mu)\frac{\partial^2}{\partial r\partial z} \\
\frac{2\mu}{r^2}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{\lambda+\mu}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}) & \mu(\boldsymbol{\nabla}^2 - \frac{1}{r^2}) + \frac{\lambda+\mu}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} & \frac{\lambda+\mu}{r}\frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial z} \\
(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}) & \frac{\lambda+\mu}{r}\frac{\partial^2}{\partial z\partial\varphi} & \mu\boldsymbol{\nabla}^2 + (\lambda+\mu)\frac{\partial^2}{\partial z^2}
\end{pmatrix},
$$

а векторные операторы $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_3$ имеют смысл градиента и дилатации соответственно:

$$
\mathcal{L}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad \mathcal{L}_3 = \begin{pmatrix} (\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}) & \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}.
$$

Все перечисленные операторы задаются в области $\mathcal{D} \subset L_2^4$:

$$
\mathcal{D} = \{\mathbf{y} | \mathbf{y} \in L_2^4, \mathcal{B}\mathbf{y} = 0, \mathbf{y} = O(1)\}. \tag{2.2}
$$

Здесь $\mathcal{B}$ — оператор краевых условий ($\vartheta = 2\mu + \lambda$):

$$
\mathcal{B}\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \mathcal{B}_1\mathbf{y}\big|_{r=R} \\ \mathcal{B}_2\mathbf{y}\big|_{z=0} \\ \mathcal{B}_2\mathbf{y}\big|_{z=H} \\ [\mathbf{y}]_0^{2\pi} \end{pmatrix}, \;
\mathcal{B}_1 = \begin{pmatrix} \vartheta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\lambda}{r} & \frac{\lambda}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi} & \lambda\frac{\partial}{\partial z} & -\gamma \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial r} \end{pmatrix}, \;
\mathcal{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial r} \end{pmatrix}. \tag{2.3}
$$

где $[\mathbf{y}]_0^{2\pi} = \mathbf{y}\big|_{\varphi=0} - \mathbf{y}\big|_{\varphi=2\pi}$.

Начально-краевую задачу можно рассматривать как задачу Коши с операторными коэффициентами [13]:

$$\mathcal{A}_0\mathbf{y} + \mathcal{A}_1\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{y} + \mathcal{A}_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{y} = \mathbf{f}, \quad \mathbf{y}|_{t=0} = \mathbf{y}_0, \quad \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t}|_{t=0} = \dot{\mathbf{y}}_0, \tag{2.4}$$

где

$$\mathcal{A}_0 = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_1 & -\gamma\mathcal{L}_2 \\ 0 & \boldsymbol{\nabla}^2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\eta\mathcal{L}_3 & -\frac{1}{\kappa} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} -\rho\mathcal{E} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

$$\mathbf{y}_0 = (u_0, v_0, w_0, \theta_0), \quad \dot{\mathbf{y}}_0 = (\dot{u}_0, \dot{v}_0, \dot{w}_0, 0).$$

Решение задачи (2.4) может быть представлено в форме спектрального разложения по полной биортогональной системе собственных и присоединенных функций пучка операторов (2.5) [9, 14].

3. Спектральное разложение решения

Для построения спектрального разложения, следуя [9], построим квадратичный операторный пучок

$$\mathcal{L}_\nu = \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1\nu + \mathcal{A}_2\nu^2. \tag{3.1}$$

Сопряженный пучок имеет вид (см. [9, теорема 1]):

$$\mathcal{L}^*_{\overline{\nu}} = \mathcal{A}^*_0 + \mathcal{A}^*_1\overline{\nu} + \mathcal{A}_2\overline{\nu}^2, \quad \mathcal{A}^*_0 = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_1 & 0 \\ \gamma\mathcal{L}_3 & \boldsymbol{\nabla}^2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}^*_1 = \begin{pmatrix} 0 & \eta\mathcal{L}_2 \\ 0 & -\frac{1}{\kappa} \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

где черта обозначает комплексное сопряжение. Область определения $\mathcal{D}^*$ пучка $\mathcal{L}^*_{\overline{\nu}}$ задается сопряженным оператором краевых условий

$$\mathcal{B}^*\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \mathcal{B}^*_1\mathbf{y}\big|_{r=R} \\ \mathcal{B}_2\mathbf{y}\big|_{z=0} \\ \mathcal{B}_2\mathbf{y}\big|_{z=H} \\ [\mathbf{y}]_0^{2\pi} \end{pmatrix}, \mathcal{B}^*_1 = \begin{pmatrix} (2\mu+\lambda)\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\lambda}{r} & \frac{\lambda}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi} & \lambda\frac{\partial}{\partial z} & \nu\eta \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial r} \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Собственные вектор-функции $\mathbf{k}$ пучка $\mathcal{L}_\nu$, собственные вектор–функции $\mathbf{k}^*$ сопряженного пучка $\mathcal{L}^*_{\overline{\nu}}$ и соответствующие собственные значения ν определяются из решений прямой и сопряженной обобщенных задач Штурма–Лиувилля[5]

$$\mathcal{L}_\nu\mathbf{k} = 0 \quad (\mathbf{k} \in \mathcal{D}), \quad \mathcal{L}^*_{\overline{\nu}}\mathbf{k}^* = 0 \quad (\mathbf{k}^* \in \mathcal{D}^*). \tag{3.4}$$

Совокупность решений задач (3.4) образуют два счетных множества, которые могут быть упорядочены по возрастанию абсолютных величин собственных значений ν_i. Далее элементы этих множеств будем обозначать $\{\mathbf{k}_i\}$ и $\{\mathbf{k}^*_i\}$.

[5] В настоящей работе будем полагать, что спектр исследуемого квадратичного пучка простой и система корневых подпространств определяется только собственными функциями. Общий случай полной системы собственных и присоединенных функций рассмотрен в [9].

Вектор-функции $\{\mathbf{k}_i\}$ и $\{\mathbf{k}_i^*\}$ образуют биортогональную систему с двумя соотношениями биортогональности (см. [9, теорема 4])

$$\langle \mathcal{A}_1\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_j^*\rangle + (\nu_i + \nu_j)\langle \mathcal{A}_2\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_j^*\rangle = 0,$$
$$\langle \mathcal{A}_0\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_j^*\rangle - \nu_i\nu_j\langle \mathcal{A}_2\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_j^*\rangle = 0.$$

В подробной записи первое из них имеет вид

$$\int\limits_0^R\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-H}^H\left[\left(\frac{\eta}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rk_{ui}) + \frac{\eta}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}k_{vi} + \eta\frac{\partial}{\partial z}k_{wi} - \frac{1}{\kappa}k_{\theta i}\right)\overline{k}^*_{\theta j} - \right.$$
$$\left. - (\nu_i + \nu_j)\rho(k_{ui}\overline{k}^*_{uj} + k_{vi}\overline{k}^*_{vj} + k_{wi}\overline{k}^*_{wj})\right] r dr d\varphi dz = N_i\delta_{ij} \quad (3.5)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, N_i — нормирующий множитель

$$N_i = \int\limits_0^R\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-H}^H\left[\left(\frac{\eta}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rk_{ui}) + \frac{\eta}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}k_{vi} + \eta\frac{\partial}{\partial z}k_{wi} - \frac{1}{\kappa}k_{\theta i}\right)\overline{k}^*_{\theta i} - \right.$$
$$\left. - (\nu_i + \nu_j)\rho(k_{ui}\overline{k}^*_{ui} + k_{vi}\overline{k}^*_{vi} + k_{wi}\overline{k}^*_{wi})\right] r dr d\varphi dz. \quad (3.6)$$

Отметим, что, несмотря на громоздкий вид квадратур (3.6), их удается получить в замкнутом виде, если воспользоваться методикой [15].

Элементы биортогональной системы определяют ядра прямого и обратного интегральных преобразований, позволяющих отделить пространственные переменные и свести задачу Коши с операторными коэффициентами (2.4) к задаче Коши с постоянными коэффициентами. Процедура построения и нормировки ядер преобразования, а также решения задачи для трансформанты и операция обращения подробно изложены в [9]. Здесь мы приведем лишь окончательный результат — представление решения начально-краевой задачи (1.6)–(1.11):

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{\infty}\left[\left(\langle \mathcal{A}_1^*\mathbf{k}_i^* + \overline{\nu}_i\mathcal{A}_2^*\mathbf{k}_i^*, \mathbf{y}_0\rangle + \langle \mathcal{A}_2^*\mathbf{k}_i^*, \dot{\mathbf{y}}_0\rangle\right)\exp(\overline{\nu}_i t) + \right.$$
$$\left. + \int\limits_0^t \langle \mathbf{f}(\tau), \mathbf{k}_i^*\rangle \exp\left(\overline{\nu}_i(t-\tau)\right) d\tau\right]\mathbf{k}_i N_i^{-1}. \quad (3.7)$$

Спектральные разложения (3.7) являются сходящимися [16, 17] и определяют замкнутое решение рассматриваемой начально-краевой задачи (1.6)–(1.11) при условии, что известны эффективно вычислимые представления для биортогональной системы $\{\mathbf{k}_i\}$, $\{\mathbf{k}_i^*\}$. В следующем разделе будут построены такие представления, выражающие $\{\mathbf{k}_i\}$, $\{\mathbf{k}_i^*\}$ через цилиндрические функции.

4. Построение биортогональной системы

Напомним, что $\{\mathbf{k}_i\}$, $\{\mathbf{k}_i^*\}$ — решения сопряженных обобщенных задач Штурма–Лиувилля (3.4). Поскольку эти задачи отличаются только значениями постоянных коэффициентов, входящих в дифференциальные уравнения и краевые условия (2.3), (2.5), (3.2), (3.3), то имеет смысл подробно рассмотреть лишь одну из них.

Построим решения системы дифференциальных уравнений

$$\mathcal{L}_\nu \mathbf{k} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{k} = (k_u, k_v, k_w, k_\theta), \tag{4.1}$$

где $\mathcal{L}_\nu$ — дифференциальный оператор (3.1). Для этого представим компоненты k_u, k_v, k_w в форме разложения Гельмгольца

$$(k_u, k_v, k_w) = \boldsymbol{\nabla}\Phi + \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\Psi}, \quad \boldsymbol{\Psi} = (\Xi, \Upsilon, \Gamma).$$

Такое представление в цилиндрической системе координат определяет искомую вектор–функцию $\mathbf{k}$ через пять скалярных функций $\Phi, \Xi, \Upsilon, \Gamma, \Theta$:

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} k_u \\ k_v \\ k_w \\ k_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r}\Phi - \frac{n}{r}\Gamma - \frac{m\pi}{H}\Upsilon \\ \frac{n}{r}\Phi + \frac{m\pi}{H}\Xi - \frac{\partial}{\partial r}\Gamma \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\Upsilon) - \frac{m\pi}{H}\Phi + \frac{n}{r}\Xi \\ \Theta \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

В результате подстановки соотношений (4.2) в уравнения (4.1) происходит их декомпозиция на две независимые системы: первая определяет скалярный потенциал Φ и температурную компоненту Θ

$$\begin{aligned} &(\lambda + 2\mu)\boldsymbol{\nabla}^2\Phi - \gamma\theta - \nu^2\rho\Phi = 0, \\ &\boldsymbol{\nabla}^2\theta - \frac{1}{\kappa}\nu\theta - \nu\eta\boldsymbol{\nabla}^2\Phi = 0, \end{aligned} \tag{4.3}$$

а вторая — вихревые потенциалы Ξ, Υ, Γ:

$$\begin{aligned} &\mu(\boldsymbol{\nabla}^2\Xi - \frac{1}{r^2}\Xi - \frac{2}{r^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\Upsilon) - \nu^2\rho\Xi = 0, \\ &\mu(\boldsymbol{\nabla}^2\Upsilon - \frac{1}{r^2}\Upsilon + \frac{2}{r^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\Xi) - \nu^2\rho\Upsilon = 0, \\ &\mu\boldsymbol{\nabla}^2\Gamma - \nu^2\rho\Gamma = 0. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Для решений системы уравнений (4.3), (4.4), удовлетворяющих условиям на торцах цилиндра (1.8) и условиям периодичности (1.9), удается отделить переменные z и φ, представив искомые функции Φ, Ξ, Υ, Γ, Θ в виде

$$\begin{aligned} \Phi &= \begin{Bmatrix} \sin(n\varphi) \\ \cos(n\varphi) \end{Bmatrix} \cos\left(\frac{m\pi z}{H}\right)\tilde{\Phi}(r), \quad \Xi = \begin{Bmatrix} \cos(n\varphi) \\ \sin(n\varphi) \end{Bmatrix} \sin\left(\frac{m\pi z}{H}\right)\tilde{\Xi}(r), \\ \Upsilon &= \begin{Bmatrix} \sin(n\varphi) \\ \cos(n\varphi) \end{Bmatrix} \sin\left(\frac{m\pi z}{H}\right)\tilde{\Upsilon}(r), \quad \Gamma = \begin{Bmatrix} \cos(n\varphi) \\ \sin(n\varphi) \end{Bmatrix} \cos\left(\frac{m\pi z}{H}\right)\tilde{\Gamma}(r), \\ & \qquad \Theta = \begin{Bmatrix} \sin(n\varphi) \\ \cos(n\varphi) \end{Bmatrix} \cos\left(\frac{m\pi z}{H}\right)\tilde{\Theta}(r). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Заметим, что такие представления являются сходящимися в силу полноты систем функций $\{\sin(\frac{m\pi z}{H})\}_{m=1}^{\infty}$ и $\{\cos(\frac{m\pi z}{H})\}_{m=0}^{\infty}$ на интервале $z \in [0, H]$ и системы $\{\sin(n\varphi), \cos(n\varphi)\}_{n=0}^{\infty}$ на интервале $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Функции $\tilde{\Phi}, \tilde{\Xi}, \tilde{\Upsilon}, \tilde{\Gamma}, \tilde{\Theta}$ зависят только от радиальной координаты, и для их определения достаточно решить две системы обыкновенных дифференциальных уравнений, получаемых в результате подстановки (4.5) в (4.3) и (4.4):

$$
\begin{aligned}
&(\lambda + 2\mu)\tilde{\boldsymbol{\nabla}}^2\tilde{\Phi} - \gamma\tilde{\theta} - \nu^2\rho\tilde{\Phi} = 0,\\
&\tilde{\boldsymbol{\nabla}}^2\tilde{\theta} - \frac{1}{\kappa}\nu\tilde{\theta} - \nu\eta\boldsymbol{\nabla}^2\tilde{\Phi} = 0;
\end{aligned} \tag{4.6}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mu(\tilde{\boldsymbol{\nabla}}^2\tilde{\Xi} - \frac{1}{r^2}\tilde{\Xi} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\tilde{\Upsilon}) - \nu^2\rho\tilde{\Xi} = 0,\\
&\mu(\tilde{\boldsymbol{\nabla}}^2\tilde{\Upsilon} - \frac{1}{r^2}\tilde{\Upsilon} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\tilde{\Xi}) - \nu^2\rho\tilde{\Upsilon} = 0,\\
&\mu\tilde{\boldsymbol{\nabla}}^2\tilde{\Gamma} - \nu^2\rho\tilde{\Gamma} = 0,
\end{aligned} \tag{4.7}
$$

где $\tilde{\boldsymbol{\nabla}}^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \left(\frac{n^2}{r^2} + \frac{m^2\pi^2}{H^2}\right)$.

Сначала рассмотрим первую из них. Поскольку уравнения (4.6) могут быть записаны в форме линейной системы относительно вектор-функции $\mathbf{v} = (\Phi, \Theta)$ и оператора $\tilde{\boldsymbol{\nabla}}^2$

$$
\begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & 0 \\ -\eta\nu & 1 \end{pmatrix}\tilde{\boldsymbol{\nabla}}^2\mathbf{v} + \begin{pmatrix} -\nu^2\rho & -\gamma \\ 0 & -\frac{\nu}{\kappa} \end{pmatrix}\mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v} = (\tilde{\Phi}, \tilde{\Theta}), \tag{4.8}
$$

то ее решением будет вектор-функция $\mathbf{v}(r) = (a, b)V(r)$, где a, b — постоянные, а $V(r) = V$ — решение скалярного порождающего уравнения с неопределенным пока параметром ξ:

$$
\tilde{\boldsymbol{\nabla}}^2 V = \xi V. \tag{4.9}
$$

Подстановка формы решения $\mathbf{v} = (a, b)V$ в уравнения (4.8) преобразует последние в систему линейных алгебраических уравнений относительно постоянных a, b:

$$
\left[\begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & 0 \\ \eta\nu & 1 \end{pmatrix}\xi + \begin{pmatrix} -\nu^2\rho & -\gamma \\ 0 & -\frac{\nu}{\kappa} \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} V = 0. \tag{4.10}
$$

Нетривиальные решения a, b системы (4.10) получим при условии обращения в нуль характеристического определителя

$$
\begin{vmatrix} (\lambda + 2\mu)\xi - \nu^2\rho & -\gamma \\ -\eta\nu\xi & \xi - \frac{\nu}{\kappa} \end{vmatrix} = 0,
$$

откуда следует, что параметр ξ — это корень квадратного уравнения

$$
\xi^2 + \nu\left(\frac{-\eta\gamma - \nu\rho}{\lambda + 2\mu} - \frac{1}{\kappa}\right)\xi + \frac{\nu^3\rho}{\kappa(\lambda + 2\mu)} = 0.
$$

Двум различным значениям корней[6] $\xi = \xi_1, \xi_2$ соответствуют нетривиальные решения (4.10) a, b:

$$
\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 - \frac{\nu}{\kappa} \\ \eta\nu\xi_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_2 - \frac{\nu}{\kappa} \\ \eta\nu\xi_2 \end{pmatrix}. \tag{4.11}
$$

[6] В случае кратного корня отыскивается присоединенное решение.

Наконец, отметим, что порождающее уравнение (4.9) представляет собой уравнение Бесселя

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}V + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}V - \left(\frac{n^2}{r^2} + \frac{m^2\pi^2}{H^2} + \xi_{1,2}\right)V = 0, \tag{4.12}$$

и его решения — функции Бесселя первого J_n и второго Y_n рода [18] — определяют общее решение системы дифференциальных уравнений (4.6)

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix}\tilde{\Phi}\\ \tilde{\Theta}\end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix}a_1\\ b_1\end{pmatrix}J_n(is_1r) + c_2\begin{pmatrix}a_2\\ b_2\end{pmatrix}J_n(is_2r) + \\ + c_1'\begin{pmatrix}a_1\\ b_1\end{pmatrix}Y_n(is_1r) + c_2'\begin{pmatrix}a_2\\ b_2\end{pmatrix}Y_n(is_2r), \tag{4.13}$$

где c_1, c_2, c_1', c_2' — произвольные постоянные; $s_{1,2} = \sqrt{\frac{m^2\pi^2}{H^2} + \xi_{1,2}}$.

В дальнейшем нас будут интересовать только ограниченные при $r = 0$ решения, поскольку в формулировке исходной начально-краевой задачи присутствуют условия ограниченности (1.10). Для таких решений следует положить $c_1' = c_2' = 0$. Тогда, производя простые преобразования, приходим к окончательным выражениям для Ф и Θ:

$$\tilde{\Phi} = c_1\zeta_1J_n(is_1r) + c_2J_n(is_2r), \quad \tilde{\Theta} = c_1J_n(is_1r) + c_2\zeta_2J_n(is_2r). \tag{4.14}$$

Здесь использованы обозначения:

$$\zeta_1 = \frac{\zeta_3 - \zeta_4 + \zeta_5}{2\zeta_3\nu^2}, \ \zeta_2 = \frac{2\zeta_3\nu^2}{\zeta_3 - \zeta_4 - \zeta_5}, \quad s_{1,2} = \sqrt{\frac{m^2\pi^2}{H^2} + \nu\frac{\zeta_3 + \zeta_4 \pm \zeta_5}{2\kappa(\lambda + 2\mu)}},$$

$$\zeta_3 = \nu\rho\kappa, \quad \zeta_4 = \gamma\eta\kappa + \lambda + 2\mu, \quad \zeta_5 = \sqrt{(\zeta_3 + \zeta_4)^2 - 4\zeta_3(\lambda + 2\mu)}$$

Произведем аналогичные преобразования первого и второго уравнений системы (4.7):

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}r^2\boldsymbol{\nabla}_1^2\mathbf{w} - \begin{pmatrix}0 & -2n\\ -2n & 0\end{pmatrix}\mathbf{w} = 0, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix}\tilde{\Xi}\\ \tilde{\Upsilon}\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\nabla}_1^2 = \boldsymbol{\nabla}^2 - \frac{1}{r^2}. \tag{4.15}$$

Порождающее (4.15) скалярное уравнение имеет следующий вид:

$$\mathbf{w} = (d, f)W, \quad r^2\tilde{\boldsymbol{\nabla}}_1W = \tau W. \tag{4.16}$$

Параметры τ, a, b определяются из однородной системы линейных алгебраических уравнений

$$\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\tau - \begin{pmatrix}0 & -2n\\ -2n & 0\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}d\\ f\end{pmatrix}W = 0, \tag{4.17}$$

причем τ находится как корень характеристического уравнения, а f, g — как соответствующие нетривиальные решения системы (4.17), т.е.

$$\begin{vmatrix}\tau & -2n\\ -2n & \tau\end{vmatrix} = \tau^2 - 4n^2 = 0, \quad \tau = \pm 2n, \quad \begin{pmatrix}d\\ f\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ \pm 1\end{pmatrix}. \tag{4.18}$$

Порождающее уравнение (4.16) представляет собой уравнение Бесселя

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}W + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}W - \left(\frac{(n \pm 1)^2}{r^2} + s_3^2\right)W = 0, \quad s_3 = \sqrt{\frac{m^2\pi^2}{H^2} + \frac{\nu^2\rho}{\mu}},$$

и его решения

$$W = c_{4,5}J_{n\pm1}(is_3r) + c'_{4,5}Y_{n\pm1}(is_3r)$$

с учетом условий ограниченности (т.е. $c'_{4,5} = 0$) определяют выражения для потенциалов Ξ, Υ:

$$\tilde{\Xi} = c_4J_{n+1}(is_3r) + c_5J_{n-1}(is_3r), \quad \tilde{\Upsilon} = c_4J_{n+1}(is_3r) - c_5J_{n-1}(is_3r). \tag{4.19}$$

Наконец, ограниченное решение последнего уравнения системы (4.7), которое непосредственно является уравнением Бесселя, может быть представлено в виде

$$\tilde{\Gamma} = c_3J_n(is_3r). \tag{4.20}$$

Отметим, что четыре компоненты k_u, k_v, k_w, k_θ выражаются через пять потенциальных функций, определяемых с точностью до пяти констант $c_1, \ldots, c_5$, и, следовательно, одна из этих констант может задаваться произвольно. Положим $c_5 = 0$.

Располагая выражениями для потенциалов Φ, Ξ, Υ, Γ, Θ, определенных с точностью до постоянных $c_1, \ldots, c_4$, запишем представления решений системы уравнений (4.1):

$$\mathbf{k} = \mathcal{Y}\mathbf{C}, \quad \mathbf{C} = (c_1, c_2, c_3, c_4), \tag{4.21}$$

где

$$\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_{\varphi z}\mathcal{Y}_r,$$

$$\mathcal{Y}_{\varphi z} = \operatorname{diag}\left[\begin{Bmatrix}\sin n\varphi\\ \cos n\varphi\end{Bmatrix}\cos m'z, \begin{Bmatrix}\cos n\varphi\\ \sin n\varphi\end{Bmatrix}\cos m'z, \begin{Bmatrix}\sin n\varphi\\ \cos n\varphi\end{Bmatrix}\sin m'z, \begin{Bmatrix}\sin n\varphi\\ \cos n\varphi\end{Bmatrix}\cos m'z\right],$$

$$\mathcal{Y}_r = \begin{pmatrix} \mathcal{Y}_r^{11} & \mathcal{Y}_r^{12} & -\frac{n}{r}J_n(s_3r) & -\frac{m\pi}{H}J_{n+1}(s_3r) \\ \frac{n\zeta_1}{r}J_n(s_1r) & \frac{n}{r}J_n(s_2r) & s_3J_{n+1}(s_3r) - \frac{n}{r}J_n(s_3r) & \frac{m\pi}{H}J_{n+1}(s_3r) \\ -\frac{m\pi\zeta_1}{H}J_n(s_1r) & -\frac{m\pi}{H}J_n(s_2r) & 0 & s_3J_n(s_3r) \\ J_n(s_1r) & \zeta_2J_n(s_2r) & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$m' = \frac{m\pi}{H}, \quad \mathcal{Y}_r^{11} = \frac{n\zeta_1}{r}J_n(s_1r) - s_1\zeta_1J_{n+1}(s_1r), \; \mathcal{Y}_r^{12} = \frac{n}{r}J_n(s_2r) - s_2J_{n+1}(s_2r).$$

Решения (4.21) системы уравнений (4.1) удовлетворяют краевым условиям на торцах (1.8), а также условиям периодичности (1.9) и ограниченности (1.10), но при произвольных значениях постоянных $c_1, \ldots, c_4$ и параметра ν, вообще говоря, не выполняются условия (1.7) на боковой поверхности цилиндра.

Подстановка выражений (4.21) в краевые условия (1.7) приводит к однородной системе алгебраических уравнений относительно постоянных $c_1, ..c_4$

$$\mathbf{DC} = 0, \quad \mathbf{C} = (c_1, c_2, c_3, c_4), \quad \mathbf{D} = \mathcal{B}_1\mathcal{Y}. \tag{4.22}$$

После выполнения соответствующих операций дифференцирования и приведения функций Бесселя к порядкам n и $n+1$ приходим к такому выражению для матрицы $\mathbf{D}$:

$$\mathbf{D} = \mathbf{A}\,\mathrm{diag}[J_n(s_1 r), J_n(s_2 r), J_n(s_3 r), J_n(s_3 r)] + \\ + \mathbf{B}\,\mathrm{diag}[J_{n+1}(s_1 r), J_{n+1}(s_2 r), J_{n+1}(s_3 r), J_{n+1}(s_3 r)], \quad (4.23)$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \zeta_1\left(\frac{2\mu l}{R^2} - \vartheta s_1^2 - \frac{\lambda m^2\pi^2}{H^2}\right) - \gamma & \frac{2\mu l}{R^2} - \vartheta s_2^2 - \frac{\lambda m^2\pi^2}{H^2} - \gamma\zeta_2 & -\frac{2\mu l}{R^2} & -\frac{2\mu m\pi s_3}{H} \\ -2mn\frac{\pi\zeta_1}{HR} & -2mn\frac{\pi}{HR} & mn\frac{\pi}{HR} & n\frac{s_3}{R} \\ 2l\frac{\zeta_1}{R^2} & 2\frac{l}{R^2} & s_3^2 - 2\frac{l}{R^2} & m\frac{\pi s_3}{H} \\ \frac{n}{R} & n\frac{\zeta_2}{R} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2\mu\frac{s_1\zeta_1}{R} & 2\mu\frac{s_2}{R} & 2\mu\frac{ns_3}{R} & 2\mu\frac{m(n+1)\pi}{HR} \\ 2\frac{m\pi s_1\zeta_1}{H} & 2\frac{m\pi s_2}{H} & 0 & \frac{m^2\pi^2}{H^2} - s_3^2 \\ -2\frac{ns_1\zeta_2}{R} & -2\frac{ns_2}{R} & -2\frac{s_3}{R} & -2\frac{m(n+1)\pi}{HR} \\ -s_1 & -s_2\zeta_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \vartheta = \lambda + 2\mu, \ l = n^2 - n.$$

Система однородных уравнений (4.22) имеет нетривиальные решения при условии обращения в нуль определителя

$$|\mathbf{D}| = |\mathbf{D}(n, m, \nu)| = 0. \quad (4.24)$$

Для фиксированных целых $n = N, m = M$ корни уравнения (4.24) образуют последовательность собственных значений

$$\{\nu_i^{NM}\}_{i=1}^{\infty} = \{\nu | \nu \in \mathbb{C}, \mathbf{D}(M, N, \nu) = 0\},$$

которым соответствуют нетривиальные решения системы алгебраических уравнений (4.22) $\mathbf{C}_i^{NM} = (c_{1i}^{NM}, \ldots, c_{4i}^{NM})$, а также нетривиальные решения краевой задачи Штурма—Лиувилля (3.4), то есть собственные функции $\mathbf{k}_i^{NM} = \mathfrak{Y}|_{n=N, m=M, \nu=\nu_i^{NM}} \mathbf{C}_i^{NM}$. Объединение последовательностей $\{\mathbf{k}_i^{NM}\}$ построенных для всех целых N, M, образует полную систему собственных функций, которая может быть линейно упорядочена по возрастанию абсолютных величин соответствующих собственных значений ν_i^{NM}. В этой связи далее для собственных значений и собственных функций будем использовать обозначения ν_i, $\mathbf{k}_i$.

Поскольку сопряженная задача Штурма–Лиувилля (3.4) может быть формально получена из прямой задачи за счет перестановки противоположных значений коэффициентов $\nu\eta, \gamma$, то сопряженные собственные функции $\mathbf{k}_i^*$ вычисляются по тем же зависимостям, что и $\mathbf{k}_i$, с учетом указанной перестановки и замены ν на $\overline{\nu}$.

Располагая аналитическими выражениями (4.21) для вектор-функций биортогональной системы $\mathbf{k}_i$, $\mathbf{k}_i^*$, не составляет труда получить замкнутое решение рассматриваемой начально-краевой задачи (1.6)–(1.11) на основании общего представления (3.7):

$$\mathbf{y}=\sum_{i=1}^{\infty}\int\limits_0^R\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^H\Big\{\Big[\Big(\eta\frac{\partial}{\partial r}k^*_{\theta i}+\nu_i\rho k^*_{ui}\Big)u_0+\Big(\frac{\eta}{r}\frac{\partial}{\partial r}k^*_{\theta i}+\nu_i\rho k^*_{vi}\Big)v_0+$$
$$+\Big(\eta\frac{\partial}{\partial z}k^*_{\theta i}+\nu_i\rho k^*_{wi}\Big)w_0+\frac{1}{\kappa}k^*_{\theta i}\theta_0+\rho(k^*_{ui}\dot{u}_0+k^*_{vi}\dot{v}_0+k^*_{wi}\dot{w}_0)\Big]\exp(\overline{\nu}_i t)+$$
$$+\int\limits_0^t\Big[k^*_{ui}X_r(\tau)+k^*_{vi}X_\varphi(\tau)+k^*_{wi}X_z(\tau)+k^*_{\theta i}\omega(\tau)\Big]\exp(\overline{\nu}_i(t-\tau))d\tau\Big\}rdrd\varphi dz\mathbf{k}_i N_i^{-1}. \quad (4.25)$$

Отметим, что последовательность собственных значений ν_i, в отличие от спектральных множеств диссипативных задач, исследованных в работе [14], имеет единственную бесконечно удаленную точку накопления. В этой связи функциональные ряды (4.25) обладают достаточно быстрой сходимостью в обычном смысле. В частном случае, когда поля перемещений и температур не связаны, решение (4.25) приводится к известным [3].

Литература

[1] Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. М.: Мир, 1964. 520 с.

[2] Карслоу. Г, Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 488 с.

[3] Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.

[4] Петров Н., Бранков Й. Современные проблемы термодинамики. М.: Мир, 1986. 285 с.

[5] Сеницкий Ю.Э. К решению связанной динамической задачи термоупругости для бесконечного цилиндра и сферы // Прикл. мех. 1982. Т.18. №6. С. 34-41.

[6] Сеницкий Ю.Э. Исследование упругого деформирования элементов конструкций при динамических воздействиях методом конечных интегральных преобразований. Саратов: Изд–во Саратовск. ун-та, 1985. 176 с.

[7] Сеницкий Ю.Э. Вторая связанная динамическая задача термоупругости для плоского слоя // Прикладная механика АН УССР. 1986. Т.22. №11. С. 22-28.

[8] Сеницкий Ю.Э. Обобщенные биортогональные конечные интегральные преобразования и их приложение к нестационарным задачам механики // Доклады РАН. 1995. Т.341. №4.

[9] Лычев С.А., Сеницкий Ю.Э. Несимметричные интегральные преобразования и их приложения к задачам вязкоупругости // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2002. Специальный выпуск. С. 16–38.

[10] Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высш. школа, 1967. 599 с.

[11] Карслоу Х. С. Теория теплопроводности. М.; Л: Гостехиздат, 1947. 288 с.

[12] Сеницкий Ю.Э. К решению осесимметричной задачи динамики для анизотропного короткого толстостенного цилиндра // Прикл. мех. 1981. Т.17. №8. С. 95-100.

[13] Егоров И.Е.,Пятков С.Г., Попов С.В. Неклассические дифференциально-операторные уравнения. Новосибирск: Наука. 2000. 336 с.

[14] Лычев С.А. Нестационарные колебания стареющего вязкоупругого стержня // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2003. Специальный выпуск. С. 95–119.

[15] Сеницкий Ю.Э., Лычев С.А. Определение нормы ядер конечных интегральных преобразований и их приложения // Изв. вузов. Математика. 1999. №8. С. 60–69.

[16] Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 526 с.

[17] Келдыш М.В. О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов // УМН. 1971. Т.26. Вып. 4(160). С. 15–41.

[18] Абрамовиц М., Стиган И.М. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 830 с.

COUPLED DYNAMIC THERMOELASTIC PROBLEM FOR A FINITE CYLINDER[7]

S.A. Lychev[8]

In the present study a closed solution of coupled dynamic thermoelastic problem for a finite cylinder is obtained. The solution is of the form of spectral expansion based on the biorthogonal eigenfunction system of non self-adjoined differential pencil, generated by the initial boundary value problem under consideration. The representation of spectral expansion is then obtained by the special non-symmetrical integral transformation.

Поступила в редакцию 27/X/2003
в окончательном варианте — 17/XI/2003.

[7] Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. Y.N. Radayev.

[8] Lychev Sergey Alexandrovich (lychev@ssu.samara.ru), Dept. of Continuum Mechanics, Samara State University, Samara, 443011, Russia.