УДК 517.946

АНАЛОГ ФОРМУЛЫ ПУАНКАРЕ—БЕРТРАНА В ПРОСТРАНСТВАХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ[1]

© 2003 Х.А. Чиханов[2]

В статье приводится аналог формулы Пуанкаре—Бертрана в пространствах распределений.

Введение

Обозначим через H_λ банахово пространство Гельдера комплекснозначных функций с нормой

$$\|f(x)\|_{\lambda,x} = \sup_{x,y\in[a,b]} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\lambda},$$

индекс x означает, что норма вычисляется по x.

Теорема 1. Пусть $\phi(t,\tau) \in H_\lambda$ по каждой переменной равномерно относительно другой переменной (то есть $\|\phi(t,\tau)\|_{\lambda,t} < A$ и $\|\phi(t,\tau)\|_{\lambda,\tau} < A$, где $A = \mathrm{const}$). Тогда классическая формула Пуанкаре—Бертрана имеет вид [5, гл. 3, § 28]:

$$\int_a^b \frac{dt}{t-x}\left[\int_a^b \frac{\phi(t,\tau)d\tau}{\tau-t}\right] = -\pi^2\phi(x,x) + \int_a^b d\tau \int_a^b \frac{\phi(t,\tau)dt}{(t-x)(\tau-t)},\ a < x < b. \tag{1}$$

Интегралы здесь понимаются в смысле главного значения по Коши. Для произвольного кусочно-гладкого контура формула (1) обобщается с помощью соответствующего гомоморфизма.

Поводом для написания этой статьи послужил следующий достаточно очевидный факт: внутренний интеграл справа в (1) при $\tau = x$ имеет вид

$$-\int_a^b \frac{\phi(t,\tau)dt}{(t-x)^2} \tag{2}$$

и не существует в смысле главного значения по Коши.

[1] Представлена доктором физико-математических наук профессором Ю.Н. Радаевым.

[2] Чиханов Хамит Александрович, кафедра уравнений математической физики Самарского государственного университета, 443011, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

Произведем дальнейшее упрощение формулы (1). Пусть $q(\tau) = \phi(\tau,\tau)$. Для функции $\phi(t,\tau) - q(t)$ формула (1) имеет вид:

$$\int\limits_a^b \frac{dt}{t-x}\left[\int\limits_a^b \frac{(\phi(t,\tau)-\phi(\tau,\tau))d\tau}{\tau-t}\right] = \int\limits_a^b d\tau \int\limits_a^b \frac{(\phi(t,\tau)-\phi(\tau,\tau))dt}{(t-x)(\tau-t)}, \tag{3}$$

где $a < x < b$. Здесь внутренний интеграл слева существует как обычный несобственный и после перестановки порядка интегрирования внеинтегральный член не появляется и никаких претензий к формуле (3) нет. Теперь из формул (1) и (3) имеем:

$$\int\limits_a^b \frac{dt}{t-x}\left[\int\limits_a^b \frac{q(\tau)d\tau}{\tau-t}\right] = -\pi^2 q(x) + \int\limits_a^b q(t)d\tau \int\limits_a^b \frac{dt}{(t-x)(\tau-t)},\ a < x < b. \tag{4}$$

Не умаляя общности, можно считать, что носитель функции $q(x)$ расположен строго внутри отрезка $[a,b]$ (т.е. $q(x) \equiv 0$ при $x < a+\epsilon$ и $x > b-\epsilon$). Тогда мы можем записать формулу, которую мы сможем интерпретировать ниже в пространстве обобщенных функций:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t-x}\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{q(\tau)d\tau}{\tau-t}\right] = -\pi^2 q(x) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} q(t)d\tau \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(t-x)(\tau-t)}. \tag{5}$$

1. Пространства распределений

Классическое преобразование Фурье (ПФ) и обратное к нему имеют вид:

$$(\mathbf{F}f)(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} f(x)dx, \qquad (\mathbf{F}^{-1}h)(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} h(\xi)d\xi. \tag{6}$$

Эти формулы проверяются на "хороших" функциях (например, для характеристической функции интервала $\kappa_{(a,b)}(x)$); по непрерывности ПФ продолжается на гильбертово пространство $L_2[-\infty,\infty]$ с нормой

$$\|f\|_{0,0} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sqrt{|f(x)|^2}dx\ ; \quad \text{при этом} \quad (\mathbf{F}f,\mathbf{F}g)_{0,0} = 2\pi(f,g)_{0,0}, \quad f,\ g \in L_2. \tag{7}$$

Таким образом, с точностью до множителя ПФ является непрерывным (и даже унитарным) оператором в L_2 [2, глава 2, §6].

Определение 1. Топологическое пространство Шварца S — счетно-нормированное пространство с семейством полунорм

$\|f\|_{k,n,C} = \sup\limits_{R^1}, \quad |x^k f^{(n)}(x)|, \quad k,n = \overline{0,\infty}.$

Теорема 2. $\mathbf{F}$ является непрерывным автоморфизмом в S [1, глава 1, 1.7].

Определение 2. S' — пространство обобщенных функций над S с значениями функционала $(\cdot,\cdot)_S$. Для $f \in S'$ ПФ определяется по формуле $(\mathbf{F}f,\phi)_S = (f,\mathbf{F}\phi)_S$ [2, глава 2, §6, п.1].

Ясно,что ПФ непрерывно в S' в основной (слабой) топологии S'.

Определение 3. $\langle x\rangle = \sqrt{1+|x|^2}$ — это функция класса C^∞.

Теорема 3. Оператор умножения $\langle x\rangle^s$ определен в S' для любого $s \in R^1$ и непрерывен в S'. Оператор $(1-\Delta)^{s/2} \equiv \langle\xi\rangle^s\mathbf{F}$ является сверточным оператором с функцией

$$L_s(x) = \begin{cases} \left[1-\left(\dfrac{d}{dx}\right)^2\right]^{-s/2} \delta(x), & \text{если} \quad -s \geqslant 0 \quad \text{— четное}, \\ \dfrac{2^{1-s/4}}{\sqrt{2\pi}\Gamma(s/4)}\,|x|^{s/4-1/2}\,K_{1/2-s/4}(|x|), & \text{если} \quad s > n, \end{cases} \tag{8}$$

где K_ν — функция Макдональда (свертка $L_s(x) * f(x)$ называется бесселевым потенциалом) [2, глава 2, §10]. Оператор $(1-\Delta)^{p/2}$ также непрерывен в S'.

Определение 4. Пространство $H_{s,p}$ — это гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(f,g)_{s,p} = ((1-\Delta)^{s/2} < x >^p f, (1-\Delta)^{s/2} < x >^p g)_{0,0}; \tag{9}$$

$H_{0,p}$ есть весовое пространство $L_2[\langle x\rangle^p, (-\infty,\infty)]$; $H_{2n,0}, n = \overline{1,\infty}$ изоморфно соболевскому пространству $W_2^{2n}(-\infty,\infty)$. Для вещественных $s \geqslant 0$ пространства $H_{s,p}$ являются естественным обобщением W_2^n [8, часть 2, §1]. Они дают расщепление S' : $\cap H_{s,p} = S$, $\cup H_{s,p} = S'$. Одно из самых замечательных свойств этих пространств заключается в следующем: действие $\mathbf{F}$ на $H_{s,p}$ сводится просто к перестановке индексов: $H_{s,p} \xrightarrow{\mathbf{F}} H_{p,s}$. [3, часть 2, п.12.1]

Теорема 3. Операторы $\langle x\rangle^p$, $(1-\Delta)^{p/2}$, $1 \pm ix$, $1 \pm \Delta$ переводят пространства $H_{s,p}$ друг в друга. Следующие диаграммы коммутативны:

$$\left|\begin{array}{ccc} H_{s,p-1} & \xrightarrow{1\pm D} & H_{s-1,p-1} \\ \uparrow\ {\scriptstyle 1\pm ix} & & \uparrow\ {\scriptstyle 1\pm ix} \\ H_{s,p} & \xrightarrow{1\pm D} & H_{s-1,p} \end{array}\right|, \quad \left|\begin{array}{ccc} H_{s,p-\beta} & \xrightarrow{(1-\Delta)^{\alpha/2}} & H_{s-\alpha,p-\beta} \\ \uparrow\ {\scriptstyle \langle x\rangle^\beta} & & \uparrow\ {\scriptstyle \langle x\rangle^\beta} \\ H_{s,p} & \xrightarrow{(1-\Delta)^{\alpha/2}} & H_{s-\alpha,p} \end{array}\right|. \tag{9}$$

Дифференцирование и сдвиг аргумента являются сверточными операторами. Эти три оператора перестановочны между собой как прообразы умножения (если, конечно, соответствующие свёртки существуют).

Для $s,p \geqslant 0$ пространство $H_{-s,-p}$ является пространством распределелений над $H_{s,p}$ и может быть введено с помощью отрицательной нормы по Лаксу [1, глава 1, §1]. Следующая диаграмма коммутативна (все вложения непрерывны в соответствующих топологиях):

$$\left|\begin{array}{ccccccccc} H_{\infty,-\infty} & \subset & H_{s,-\infty} & \subset & H_{0,-\infty} & \subset & H_{-s,-\infty} & \subset & S' \\ \cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\ H_{\infty,-p} & \subset & H_{s,-p} & \subset & H_{0,-p} & \subset & H_{-s,-p} & \subset & H_{-\infty,-p} \\ \cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\ H_{\infty,0} & \subset & W_2^{s/2} & \subset & L_2 & \subset & H_{-s,0} & \subset & H_{-\infty,0} \\ \cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\ H_{\infty,p} & \subset & H_{s,p} & \subset & H_{0,p} & \subset & H_{-s,p} & \subset & H_{-\infty,p} \\ \cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\ S & \subset & H_{s,\infty} & \subset & H_{0,\infty} & \subset & H_{-s,\infty} & \subset & H_{-\infty,\infty} \end{array}\right|. \tag{10}$$

Внутри диаграммы — гильбертовы пространства; левый и нижний края — счетно-нормированные топологические пространства — проективные пределы (пересечения); правый и верхний края — индуктивные пределы — (объединения); в левом нижнем углу — пространство Шварца S (точнее, функции из S с точностью до функций, равных нулю почти всюду); в правом верхнем углу — пространство обобщенных функций (распределений) Соболева—Шварца. Движение вверх по диаграмме означает ухудшение асимптотики функции; движение вправо — ухудшение локальных свойств функции. Каждое пространство из правого верхнего треугольника диаграммы есть распределение над соответствующим пространством из левого нижнего треугольника. Центральная симметрия диаграммы есть переход от основной функции к распределению. Преобразование Фурье $\mathbf{F}$ дает симметрию относительно второй диагонали. Таким образом, мы имеем помимо S и S' еще одномерную шкалу пространств, инвариантных относительно преобразования Фурье:

$$S \subset H_{p,p} \subset L_2 \subset H_{-p,-p} \subset S'. \tag{11}$$

Асимптотические свойства преобразования Фурье в пространствах распределений лежат в основе теории Wavelet-систем [4].

Взаимосвязь асимптотических и локальных свойств преобразования Фурье показана в (см. [7]). Это свойство — одно из важнейших свойств ПФ — может быть использовано для нахождения асимптотики ПФ. Для этого достаточно разложить функцию в ряд по "локальной гладкости" (то есть выделять с помощью функций простой структуры сначала самые плохие точки, например, точки с особенностями; затем точки разрыва функции, точки разрыва производных и так далее. При этом можно не обращать внимания на асимптотику членов ряда!).

Распределения над шиловскими пространствами позволяют умножать функции на экспоненты $e^{\lambda x}$ [6, гл. 4]. Но тогда у прообраза функции можно сдвигать аргумент в комплексную плоскость. На практике это означает возможность нахождения асимптотики интегралов с особенностями подынтегрального выражения в комплексной области. Рассмотрим в качестве примера интегральное представление функции Макдональда:

$$K_\nu(z) = \frac{(z/2)^\nu \sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_1^\infty e^{-zt}(t^2 - 1)^{\nu - 1/2} dt, \quad \mathrm{Re}\left(\nu + \frac{1}{2}\right) > 0, \tag{12}$$

$|\arg z| < \pi/2$. Этот интеграл можно расссматривать как преобразование Фурье, если брать мнимые значения z. При этом подынтегральная функция терпит разрыв в точке $t = 1$. Первое приближение функции $\phi(t) = (t^2 - 1)^{\nu - \frac{1}{2}}$ по гладкости в точке $t = 1$ есть $[2(t-1)]^{\nu - 1/2}$. Соответственно, первая асимптотика имеет вид:

$$K_\nu(z) \approx \frac{z^\nu \sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\sqrt{2}} \int_1^\infty e^{-zt}(t - 1)^{\nu - 1/2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, e^{-z}. \tag{13}$$

2. Формула Пуанкаре—Бертрана в S'

В формуле (5) интеграл слева очевидным образом трактуется как повторная свертка. Так как $\mathbf{F}\left[\frac{1}{x}\right] = \pi i\,\mathrm{sgn}(\xi)$ и $\frac{1}{x} * \frac{1}{x} = \delta(x)$, то в силу коммутативности и ассоциативности свертки интеграл слева дает как раз $-\pi^2 q(x)$. Внутренний интеграл справа, также рассматриваемый как свертка, равен $-\pi^2\delta(x)$. Поэтому двойной интеграл справа также дает $-\pi^2 q(x)$. Таким образом, внеинтегральный член в (5) является излишним.

Возможна и другая трактовка интегралов в формуле Пуанкаре—Бертрана: пусть $\phi(t,\tau) \in S(R^2)$ — основная (пробная) функция на плоскости, а $\omega(t,\tau) = 1/[(t-x)(\tau-t)]$ — обобщенная функция (прямое произведение на афинно—повернутой плоскости). Тогда интегралы в (5) можно трактовать как значения повторных функционалов для $\omega(t,\tau)$. Внеинтегральный член опять является лишним!

Интегрирование обобщенных функций — достаточно сложная и многогранная тема. Классические интегралы принимают обычно числовые значения (вещественные или комплексные). (Раньше зачастую функционал записывали как интеграл.) Интеграл как свертка является уже элементом соответствующего пространства. Если же рассматривать интегрирование как операцию, обратную дифференцированию обобщенных функций, то интеграл будет обобщенной функцией меньшего порядка по соответствующей переменной (вообще говоря). Например, для $\delta(x,y) \in S'(R^2)$ имеем: $\int \delta(x,y)dy = \delta(x)(\theta(y) + c(x))$, где $c(x) \in C(R^1)$, а $\theta(y)$ — функция Хевисайда.

Заключение

1. Классическая формула Пуанкаре—Бертрана, строго говоря, неверна, так как внутренний интеграл справа не существует при $t = x$.

2. Аналог формулы Пуанкаре—Бертрана в пространствах обобщенных функций не содержит внеинтегрального члена (т.е. порядок интегрирования в двойных интегралах можно менять всегда?)

3. Для приложений все вышесказанное не имеет значения, так как формула Пуанкаре—Бертрана в обычном ее понимании верна и применяется правильно.

4. Полученные результаты могут оказаться полезными для построения различных теорий интегрирования обобщенных функций.

Литература

[1] Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Наукова думка, 1965. 800 с.

[2] Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979. 320 с.

[3] Кириллов А.А. Элементы теории представлений. М.: Наука, 1978. 344 с.

[4] Кравченко В.Ф., Рвачев В.А. Wavelet—системы и их применение к обработке сигналов// Зарубежная радиоэлектроника. 1996. №4. С. 3–18.

[5] Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.

[6] Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Пространства основных и обобщенных функций. М.: ФМ, 1958. 307 с.

[7] Паламодов В.П. Работы Шилова по теории обобщенных функций. УМН, XXXIII. № 4(202).

[8] Шварц Л. Комплексные многообразия. Эллиптические уравнения. М.: Мир, 1964. 212 с.

AN ANALOGUE OF THE POINCARE—BERTRANDS FORMULA IN THE SPACE OF DISTRIBUTIONS[3]

© 2003 Ch.A. Chikhanov[4]

In the paper the analogue of the Poincare—Bertrands formula in the space of distributions is obtained.

Поступила в редакцию 9/*VI*/2003.

[3] Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. Y.N. Radayev.

[4] Chikhanov Chamit Alexandrovich, Dept. of Partial Differential Equations, Samara State University, Samara, 443011, Russia.