УДК 517.956

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ ЗАДАЧИ С КОСОЙ ПРОИЗВОДНОЙ[1]

© 2003 В.Б. Соколовский[2]

Устанавливается интегральное представление решения $u(x)$ задачи о восстановлении в n-мерном шаре гармонической функции по заданным на границе шара значениям выражения $D_l^k u(x)$ $(k \in \mathbb{N})$; здесь D_l — дифференциальный оператор, определяемый равенством $D_l u(x) = (u'(x), Ax)$ ($A \mid \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — линейный оператор, удовлетворяющий некоторым условиям; $(u'(x), Ax)$ — производная по направлению $l = Ax$ от $u(x)$), D_l^i $(i \in \mathbb{N})$ — i-я степень этого оператора, вводимая индуктивно. Тем самым расширяется круг краевых задач для уравнения Лапласа, решения которых записываются в явном виде через интеграл.

Введение

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — единичный открытый шар с центром в 0, $\overline{\Omega}$ — его замыкание, $\partial\Omega$ — его граница, $\varphi(x)$ — заданная на $\partial\Omega$ функция, $A \mid \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — линейный оператор, матрица $\|a_{i,j}\|$ которого в естественном ортобазисе пространства $\mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию:

$$a_{ij} = -a_{ji}\ ,\ \ \forall\ i \neq j\ ;\ \ a_{ii} = \sigma \neq 0,\ \ \forall\ i = \overline{1, n}. \tag{1}$$

Пусть, далее, $l_x = Ax$ — заданное в $\overline{\Omega}$ векторное поле, D_l — дифференциальный оператор, определяемый равенством

$$D_l u(x) = (u'(x), Ax),$$

где $u'(x)$ — производная функции $u|\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ в точке x, $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$, D_l^i (i — натуральное число)— i-я степень этого оператора, вводимая индуктивно:

$$D_l^{i+1} u = D_l(D_l^i u).$$

Рассмотрим задачу о нахождении в шаре Ω гармонической функции $u(x)$, непрерывной в $\overline{\Omega}$, по заданным на $\partial\Omega$ значениям выражения $D_l^k u(x)$:

$$\Delta u = 0\ (x \in \Omega);\ \ D_l^k u(x)\big|_{\partial\Omega} = \varphi(x). \tag{2}$$

---

[1] Представлена доктором физико-математических наук профессором Ю.Н. Радаевым.

[2] Соколовский Валерий Борисович, кафедра функционального анализа и теории функций Самарского государственного университета, 443011, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

При $k = 1$ получается классическая задача с косой производной (если при этом A есть тождественный оператор, то — задача Неймана). С этой задачей связано большое количество результатов; библиографию по этому вопросу можно найти в [1]. Однако представление решения этой задачи через интеграл известно лишь в немногих частных случаях (см., например, [2]). В настоящей работе устанавливается интегральное представление решения задачи (2), а также находятся необходимое и достаточное условия ее разрешимости.

1. Некоторые леммы

Лемма 1. Пусть $A \mid \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — линейный оператор, задаваемый в естественном ортобазисе пространства $\mathbb{R}^n$ матрицей $\|a_{ij}\|$, и $u'(x)$ — производная в точке x функции $u \mid \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$. Тогда выражение $D_l u(x) = (u'(x), Ax)$ представляет собой гармоническую в шаре Ω функцию для любой гармонической в Ω функции u тогда и только тогда, когда матрица $\|a_{ij}\|$ удовлетворяет условию (1).

Доказательство. Пусть $u(x)$ — гармоническая в Ω функция. Для функции $D_l u(x) = (u'(x), Ax)$ имеем

$$\Delta(D_l u) = 2 \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} u''_{ij}(x) a_{ij}, \tag{3}$$

где $u''_{ij}(x)$ — частная производная второго порядка от функции u в точке x. Если матрица $\|a_{ij}\|$ оператора A удовлетворяет условию (1), то из (3) следует, что $\Delta(D_l u) = 0$ в Ω, то есть $(u'(x), Ax)$ — гармоническая в Ω функция.

Обратно, если функция $D_l u(x) = (u'(x), Ax)$ — гармоническая в Ω для любой гармонической в Ω функции $u(x)$, то, полагая $u(x) = x_i^2 - x_j^2$ $(i \neq j)$, из (3) получим: $a_{ii} - a_{jj} = 0,\ \forall\ i \neq j$. Полагая затем $u(x) = x_i x_j$ $(i \neq j)$, находим $a_{ij} + a_{ji} = 0,\ \forall\ i \neq j$. Таким образом, условие (1) выполняется.

Замечание. Условие (1) инвариантно относительно выбора ортобазиса в $\mathbb{R}^n$, в котором рассматривается матрица оператора A: если матрица $\|a_{ij}\|$ оператора A в каком-нибудь ортобазисе удовлетворяет условию (1), то будет удовлетворять этому условию и его матрица $\|a'_{ij}\|$ в любом другом ортобазисе. Это проверяется непосредственно с учетом того, что при переходе к новому ортобазису матрица линейного оператора A преобразуется с помощью ортогональной матрицы $\|c_{ij}\|$ по правилу:

$$\|a'_{ij}\| = \|c_{ij}\|^{-1}\, \|a_{ij}\|\, \|c_{ij}\|$$

($\|c_{ij}\|$ — матрица перехода от старого ортобазиса к новому).

Следствие. Пусть линейный оператор $A \mid \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию (1), и $u(x)$ — гармоническая в Ω функция. Тогда при любом натуральном k $D_l^k u(x)$ — тоже гармоническая в Ω функция.

Справедливость следствия легко устанавливается индукцией по k.

Лемма 2. Линейный оператор $A \mid \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, матрица $\|a_{ij}\|$ которого в некотором ортобазисе удовлетворяет условию (1), это нормальный оператор в $\mathbb{R}^n$[3].

Доказательство. Оно состоит в перемножении матрицы $\|a_{ij}\|$ и матрицы, транспонированной к ней (это будет матрица сопряженного оператора A^*) в том и другом порядке. Последующее сравнение результатов показывает, что $AA^* = A^*A$; это и означает по определению нормальность оператора A.

2. Основной результат

Как всякий нормальный оператор в $\mathbb{R}^n$, линейный оператор A, матрица которого в каком-либо ортобазисе удовлетворяет условию (1), в некотором ортобазисе $g_1, \ldots, g_n$ задается квазидиагональной матрицей [3, с. 305] с k $(0 \leqslant k \leqslant [\frac{n}{2}])$ диагональными клетками размером 2×2

$$\begin{pmatrix} \sigma & \tau_j \\ -\tau_j & \sigma \end{pmatrix} \ (j = \overline{1, k})$$

и $n - 2k$ диагональными клетками размером 1×1, элементами которых является σ:

$$\begin{pmatrix} \sigma & \tau_1 & & & & & & \\ -\tau_1 & \sigma & & & & 0 & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & \sigma & \tau_k & & & \\ & & & -\tau_k & \sigma & & & \\ & 0 & & & & \sigma & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & \sigma \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где числа $\lambda_{1j} = \sigma + i\tau_j$, $\lambda_{2j} = \sigma - i\tau_j$ $(j = \overline{1, k})$ представляют собой $2k$ $(0 \leqslant k \leqslant [\frac{n}{2}])$ комплексных собственных значений оператора A, а число $\lambda_3 = \sigma$ — вещественное собственное значение кратности $n - 2k$; если $k = \frac{n}{2}$, то вещественных собственных значений нет.

Теорема. Пусть $\varphi(x) \in C^{k,\alpha}(\partial\Omega)$ $(0 < \alpha < 1,\ k \geqslant 1$ — натуральное число). Тогда для разрешимости в $C^k(\overline{\Omega})$ задачи (2) необходимо, чтобы среднее значение функции $\varphi(x)$ по сфере $\partial\Omega$ равнялось 0. Если это условие выполняется, то единственным решением ее в $C^k(\overline{\Omega})$, принимающим заданное значение c в точке 0, является функция

$$u(x) = c + \frac{(-1)^{k-1}}{\sigma^k (k-1)!} \int\limits_0^1 \frac{\ln^{k-1} t}{t} \mu[\varphi](tB(t)x)\, dt. \tag{5}$$

[3] Линейный оператор $A|\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ называется нормальным, если он коммутирует со своим сопряженным (см. [3, с. 275])

Здесь $\mu[\varphi](x)$ — интеграл Пуассона, представляющий собой решение задачи Дирихле $\Delta u = 0$ в Ω, $u(x) = \varphi(x)$ на $\partial\Omega$; $B(t)$ при каждом $t \in (0,1]$ — изометрический оператор в $\mathbb{R}^n$, матрица которого в ортобазисе $g_1, ..., g_n$ (в котором матрица оператора A квазидиагональна) квазидиагональна с k $(0 \leqslant k \leqslant [\frac{n}{2}])$ диагональными клетками

$$\begin{pmatrix} \cos(\frac{\tau_i}{\sigma} lnt) & \sin(\frac{\tau_i}{\sigma}\ln t) \\ -\sin(\frac{\tau_i}{\sigma}\ln t) & \cos(\frac{\tau_i}{\sigma} lnt) \end{pmatrix} \ (i = \overline{1,k}) \tag{6}$$

и $n-2k$ диагональными клетками размером 1×1, элементами которых является 1.

Доказательство. Уравнение Лапласа $\Delta u = 0$ инвариантно относительно выбора ортобазиса в $\mathbb{R}^n$, граничное условие задачи (2) тоже не зависит от выбора ортобазиса в $\mathbb{R}^n$. Поэтому, рассматривая задачу (2), будем брать координаты точки $x \in \mathbb{R}^n$ в базисе $g_1, ..., g_n$, в котором матрица оператора A имеет вид (4).

Пусть $u(x) \in C^k(\overline{\Omega})$ — решение задачи (2). Определим в шаре $\overline{\Omega}$ функции $v_0(x), v_1(x), ..., v_k(x)$ следующим образом:

$$v_0(x) = u(x), v_1(x) = D_l v_0(x) = D_l u(x), ..., v_k(x) = D_l v_{k-1}(x) = D_l^k u(x)$$

(напомним, что $D_l v_0(x) = (v_0'(x), Ax)$). Согласно следствию из леммы 1, каждая из этих функций — гармоническая в Ω. В частности, гармонической в Ω является функция $v_k(x) = D_l^k u(x)$. Поскольку, в силу граничного условия задачи (2), на сфере $\partial\Omega$ выполняется $D_l^k u(x) = \varphi(x)$, в шаре $\overline{\Omega}$ имеет место равенство

$$v_k(x) = \mu[\varphi](x). \tag{7}$$

Считая $x \in \overline{\Omega}$ фиксированным, рассмотрим теперь на $[0,1]$ функции

$$h_0(t) = v_0(tB(t)x), \quad h_1(t) = v_1(tB(t)x), ..., h_{k-1}(t) = v_{k-1}(tB(t)x).$$

При $t = 0$ полагаем $tB(t)x$ равным 0. Здесь $B(t)$ — линейный оператор, описанный в формулировке теоремы. Очевидно, эти функции дифференцируемы на (0, 1]. Найдем их производные. Имея в виду, что $tB(t)x$ — точка в $\overline{\Omega}$ с координатами $x_1(t), ..., x_n(t)$, где

$$\left.\begin{aligned} x_{2i-1}(t) &= t\cos(\frac{\tau_i}{\sigma}\ln t)x_{2i-1} + t\sin(\frac{\tau_i}{\sigma}\ln t)x_{2i}, \\ x_{2i}(t) &= -t\sin(\frac{\tau_i}{\sigma}\ln t)x_{2i-1} + t\cos(\frac{\tau_i}{\sigma}\ln t)x_{2i}, \end{aligned}\right\} \ (i = \overline{1,k}) \tag{8}$$

$$x_i(t) = tx_i \qquad (i = \overline{2k+1,n}),$$

легко проверяем равенства:

$$x_{2i-1}'(t) = (\sigma x_{2i-1}(t) + \tau_i x_{2i}(t))\frac{1}{\sigma t},$$

$$x_{2i}'(t) = (-\tau_i x_{2i-1}(t) + \sigma_i x_{2i}(t))\frac{1}{\sigma t} \ (i = \overline{1,k}),$$

$$x_i'(t) = x_i \ (i = \overline{2k+1, n}).$$

Поэтому для производных $h_0'(t), h_1'(t), ..., h_{k-1}'(t)$ имеем следующие выражения:

$$h_0'(t) = (v_0'(tB(t)x), AtB(t)x)\frac{1}{\sigma t},$$

$$h_1'(t) = (v_1'(tB(t)x), AtB(t)x)\frac{1}{\sigma t}; \tag{9}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$h_{k-1}'(t) = (v_{k-1}'(tB(t)x), AtB(t)x)\frac{1}{\sigma t}.$$

Учитывая, что, в силу определения функций $v_0(x), ..., v_k(x)$ и $h_0(t), ..., h_{k-1}(t)$, при каждом $i = \overline{1,k}$ выполняются равенства

$$(v_{i-1}'(x), Ax) = D_l v_{i-1}(x) = v_i(x), \ \ v_{i-1}(tB(t)x) = h_{i-1}(t),$$

а также принимая во внимание (7), окончательно получим искомые выражения для $h_0'(t), ..., h_{k-1}'(t)$ на $(0, 1]$:

$$h_0' = \frac{1}{\sigma t}h_1 \ , ..., \ \ h_{k-2}' = \frac{1}{\sigma t}h_{k-1}, \ \ h_{k-1}' = \frac{1}{\sigma t}\mu[\varphi](tB(t)x). \tag{10}$$

Очевидна следующая равносильность этой системы равенств:

$$\sigma t h_0' = h_1 \ , ..., \ \ \sigma t h_{k-2}' = h_{k-1}, \ \ \sigma t h_{k-1}' = \mu[\varphi](tB(t)x). \tag{11}$$

Переходя в этих равенствах к пределу при $t \to 0$, в силу ограниченности на $(0, 1]$ производных $h_0', ..., h_{k-1}'$ (видной, например, из выражений (9) для них), получим, во-первых, равенство $\mu[\varphi](0) = 0$, то есть равенство нулю среднего значения по сфере $\partial\Omega$ функции φ; тем самым доказано необходимое условие разрешимости задачи (2). Во-вторых, получим равенства:

$$h_1(0) = 0, \ \ h_2(0) = 0 \ , ..., \ \ h_{k-1}(0) = 0. \tag{12}$$

Интегрируя от α до r $(0 < \alpha < r \leqslant 1)$ равенства (10) последовательно, начиная с последнего, и переходя затем в полученных равенствах к пределу при $\alpha \to 0$, в силу непрерывности на $[0, 1]$ функций $h_i(t)$ $(i = \overline{0, k-1})$ и равенств (12) получим

$$h_0(r) - h_0(0) = \int\limits_0^r \frac{(\ln r - \ln t)^{k-1}}{(k-1)!\sigma^k t}\mu[\varphi](tB(t)x)\,dt.$$

Полагая здесь $r = 1$ и замечая, что $h_0(1) = u(x)$, $h_0(0) = u(0) = c$, получим представление (5) для $u(x)$. Таким образом, если решение $u(x)$ задачи (2) существует, то оно представимо в виде (5) и, значит, единственно.

Существование решения задачи (2) можно доказать, проверяя непосредственно, что функция (5) удовлетворяет уравнению Лапласа и граничному условию задачи (2). Для этого предварительно найдем частные производные первого порядка $D_i u(x)$ $(i = \overline{1,n})$ и второго порядка $D_{i,i}u(x)$ $(i = \overline{1,n})$ от функции (5).

Используя возможность дифференцирования интеграла из (5) под знаком интеграла и вспоминая, что $tB(t)x$ — точка в $\mathbb{R}^n$ с координатами $x_1(t), ..., x_n(t)$, задаваемыми формулами (8), находим:

$$D_{2i-1}u(x) = \frac{(-1)^{k-1}}{\sigma^k(k-1)!}\int_0^1 \frac{\ln^{k-1} t}{t}\Big\{D_{2i-1}\mu[\varphi](tB(t)x)t\cos(\frac{\tau_i}{\sigma}\ln t) - \tag{13}$$

$$-D_{2i}\mu[\varphi](tB(t)x)t\sin(\frac{\tau_i}{\sigma}\ln t)\Big\}\,dt$$

$$(i = \overline{1,k}),$$

$$D_{2i}u(x) = \frac{(-1)^{k-1}}{\sigma^k(k-1)!}\int_0^1 \frac{\ln^{k-1} t}{t}\Big\{D_{2i-1}\mu[\varphi](tB(t)x)t\sin(\frac{\tau_i}{\sigma}\ln t) + \tag{14}$$

$$+\ D_{2i}\mu[\varphi](tB(t)x)t\cos(\frac{\tau_i}{\sigma}\ln t)\Big\}\,dt$$

$$(i = \overline{1,k}),$$

$$D_i u(x) = \frac{(-1)^{k-1}}{\sigma^k(k-1)!}\int_0^1 \frac{\ln^{k-1} t}{t} D_i\mu[\varphi](tB(t)x)t\,dt \tag{15}$$

$$(i = \overline{2k+1,n}),$$

$$D_{2i-1,2i-1}u(x) = \frac{(-1)^{k-1}}{\sigma^k(k-1)!}\int_0^1 \frac{\ln^{k-1} t}{t}\{t^2\cos^2(\frac{\tau_i}{\sigma}\ln t)D_{2i-1,2i-1}\mu[\varphi](tB(t)x) -$$

$$-2t^2\cos(\frac{\tau_i}{\sigma}\ln t)\sin(\frac{\tau_i}{\sigma}\ln t)D_{2i-1,2i}\mu[\varphi](tB(t)x) +$$

$$+t^2\sin^2(\frac{\tau_i}{\sigma}\ln t)D_{2i,2i}\mu[\varphi](tB(t)x)\}\,dt,$$

$$D_{2i,2i}u(x) = \frac{(-1)^{k-1}}{\sigma^k(k-1)!}\int_0^1 \frac{\ln^{k-1} t}{t}\{t^2\sin^2(\frac{\tau_i}{\sigma}\ln t)D_{2i-1,2i-1}\mu[\varphi](tB(t)x) +$$

$$+2t^2\sin(\frac{\tau_i}{\sigma}\ln t)\cos(\frac{\tau_i}{\sigma}\ln t)D_{2i-1,2i}\mu[\varphi](tB(t)x) +$$

$$+t^2\cos^2(\frac{\tau_i}{\sigma}\ln t)D_{2i,2i}\mu[\varphi](tB(t)x)\}\,dt \qquad (i = \overline{1,k}),$$

$$D_{i,i}u(x) = \frac{(-1)^{k-1}}{\sigma^k(k-1)!}\int_0^1 \frac{\ln^{k-1} t}{t} D_{i,i}\mu[\varphi](tB(t)x)t^2\,dt$$

$$(i = \overline{2k+1,n}).$$

Окончательно имеем

$$\Delta u(x) = \frac{(-1)^{k-1}}{\sigma^k(k-1)!}\int_0^1 \frac{\ln^{k-1} t}{t}\sum_{i=1}^n D_{i,i}\mu[\varphi](tB(t)x)t^2\,dt.$$

Поскольку $\mu[\varphi](x)$ — гармоническая в Ω функция, отсюда следует, что $\Delta u(x) = 0$ в Ω. Таким образом, функция (5) удовлетворяет в Ω уравнению Лапласа.

Чтобы проверить, что она удовлетворяет граничному условию задачи (2), найдем сначала $D_l u(x)$ в $\overline{\Omega}$. Учитывая следующие равенства для координат точки Ax:

$$(Ax)_{2i-1} = \sigma x_{2i-1} + \tau_i x_{2i} \qquad (i = \overline{1,k}),$$

$$(Ax)_{2i} = -\tau_i x_{2i-1} + \sigma x_{2i} \qquad (i = \overline{1,k}),$$

$$(Ax)_i = \sigma x_i \qquad (i = \overline{2k+1,n})$$

и используя выражения (13)–(15) для частных производных функции $u(x)$, получим для $x \in \overline{\Omega}$

$$D_l u(x) = (u'(x), Ax) =$$

$$= \frac{(-1)^{k-1}}{\sigma^k (k-1)!} \int_0^1 \frac{\ln^{k-1} t}{t} \{ \sum_{i=1}^k (\sigma t x'_{2i-1}(t) D_{2i-1} \mu[\varphi](tB(t)x) +$$

$$+\sigma t x'_{2i}(t) D_{2i} \mu[\varphi](tB(t)x)) + \sum_{i=2k+1}^n \sigma t x'_i(t) \mu[\varphi](tB(t)x)\} \, dt =$$

$$= \frac{(-1)^{k-1}}{\sigma^{k-1}(k-1)!} \int_0^1 \ln^{k-1} t \frac{d}{dt} \mu[\varphi](tB(t)x) \, dt.$$

Применяя к последнему интегралу формулу интегрирования по частям, устанавливаем, что

$$D_l u(x) = \frac{(-1)^{k-2}}{\sigma^{k-1}(k-2)!} \int_0^1 \frac{\ln^{k-2} t}{t} \mu[\varphi](tB(t)x) \, dt.$$

Применяя последовательно оператор D_l к обеим частям этого равенства, аналогично получим

$$D_l^{k-1} u(x) = \frac{1}{\sigma} \int_0^1 \frac{1}{t} \mu[\varphi](tB(t)x) \, dt,$$

$$D_l^k u(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt} \mu[\varphi](tB(t)x) \, dt = \mu[\varphi](x) - \mu[\varphi](0).$$

Так как $\mu[\varphi](0) = 0$ (в силу необходимого условия разрешимости задачи (2)), окончательно находим $D_l^k u(x) = \mu[\varphi](x)$. Если $x \in \partial\Omega$, то $\mu[\varphi](x) = \varphi(x)$ и, следовательно, $D_l^k u(x) = \varphi(x)$, то есть функция (5) удовлетворяет граничному условию задачи (2).

Таким образом, теорема доказана.

Следствие. Предположим, что матрица оператора A в естественном ортобазисе представлена в виде произведения $q\alpha q'$, где q — ортогональная матрица, q' — транспонированная к ней, а α — квазидиагональная матрица (4) с $\sigma \neq 0$. Тогда решение задачи (2) записывается в виде (5) с зависящим от $t \in (0,1]$ линейным оператором $B(t) \mid \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, задаваемым в естественном ортобазисе матрицей, представимой в виде произведения $q\beta(t)q'$, где $\beta(t)$ — квазидиагональная матрица с k $(0 \leqslant k \leqslant [\frac{n}{2}])$ диагональными клетками (6) размером 2×2 и $n - 2k$ диагональными клетками размером 1×1, элементами которых является 1.

Доказательство. Если матрица оператора A представлена в указанном выше виде, то в силу правила, по которому преобразуется матрица линейного оператора при переходе к другому ортобазису, α — матрица оператора A в некотором ортобазисе. Тогда по доказанной теореме решение $u(x)$ задачи (2) записывается в виде (5) с оператором $B(t)$, задаваемым в том же ортобазисе матрицей $\beta(t)$. Но тогда в естественном ортобазисе матрица оператора $B(t)$ должна представляться в виде $q\beta(t)q'$.

Литература

[1] Янушаускас А. И. Задача с наклонной производной теории потенциала. Новосибирск, 1985. 262 с.

[2] Бицадзе А. В. Об одном частном случае задачи наклонной производной для гармонических функций в трехмерных областях// Доклады АН СССР. 1964. Т. 155. № 4. С. 730–731.

[3] Шилов Г. Е. Математический анализ. Конечномерные линейные пространства. М.: Наука, 1969. 432 с.

AN INTEGRAL REPRESENTATION OF SOLUTIONS OF A PROBLEM WITH DIRECTIONAL DERIVATIVE[4]

V.B. Sokolovsky[5]

An integral representation of solution of the problem on determination in n — dimensional ball of a harmonic function by $D_l^k(x)$ $(k \in \mathbb{N})$, given on the boundary of the ball, is obtained; D_l is the differential operator defined by $D_l u(x) = (u'(x), Ax), A \mid \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n)$ is a linear operator which satisfy some conditions; $(u'(x), Ax)$ is a directional $l = Ax$ derivative of $u(x); D_l^i$ $(i \in \mathbb{N})$ is a i — power of the operator which is inductively determined. Additional solutions of boundary value problems for the Laplace equation can be explicitly expressed by the obtained integral representation.

Поступила в редакцию 6/X/2003.

[4] Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. Y.N. Radayev.

[5] Sokolovsky Valery Borisovich, Dept. of Theory of Functions and Functional Analysis, Samara State University, Samara, 443011, Russia.