

УДК 519.27

ВЫЧИСЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ КВАДРАТИЧНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ ВИНЕРОВСКИХ ПРОЦЕССОВ¹

© 2003 Ю.В. Солодянников, Д.П. Кожан²

Статья посвящена вычислению характеристических функций некоторых функционалов от винеровских процессов и броуновских мостов. Полученные результаты полностью описывают свойства характеристических функций случайных величин $X = w \circledast w + L(w)$ и $X = w * w + L(w)$.

1. Предварительные сведения

Пусть $w \circledast w = \int_0^1 w(1-t)dw(t)$, $L(w) = \int_0^1 g(t)dw(t)$, где $g(t)$ — неслучайная функция из пространства L_2 . Рассмотрим так называемый сверточный функционал от стандартного винеровского процесса $w(t)$ вида

$$X = w \circledast w + L(w).$$

Сверточные функционалы от винеровских процессов и броуновских мостов возникают во многих технических и статистических приложениях. Так, если вместо функции $F(t)$ мы можем наблюдать лишь сумму $\bar{F}(t) = F(t) + w(t)$, то разность $\bar{F} \circledast \bar{F}(t) - F \circledast F(t)$ является случайной величиной рассматриваемого вида. В работе [4] вычислена характеристическая функция случайной величины

$$X = \int_0^1 w(1-t)w(t)dt + \int_0^1 g(t)dw(t).$$

Основным результатом данной статьи является явная формула для характеристической функции случайной величины $X = w \circledast w + L(w)$.

¹ Представлена доктором физико-математических наук профессором С.В. Асташкиным.

² Солодянников Юрий Васильевич (samdi@samara.ru), Кожан Дмитрий Петрович (kdp@ssu.samara.ru), кафедра функционального анализа и теории функций Самарского государственного университета, 443011, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

2. Вычисление характеристической функции функционала $X = w \circledast w + L(w)$

Теорема 1. *Характеристическая функция случайной величины*

$$X = \int_0^1 w(1-t)dw(t) + \int_0^1 g(t)dw(t),$$

где w_t — стандартный винеровский процесс, а $g(t)$ — неслучайная функция из пространства L_2 , равна

$$\phi(t) = (\operatorname{ch} t + i \operatorname{sh} t)^{-1/2} \exp \left[-\frac{t^2}{2} \int_0^1 g^2(t)dt - \frac{it^3 F}{4} \right], \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{где} \quad F &= \frac{1}{2 \cos(2it)} \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-u}^u \left(\sin(2it(v+u)) + \cos(2it(v-u)) \right) du dv + \\ &+ \frac{1}{2 \cos(2it)} \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-u}^u \left(\cos(2it(u+v-1)) - \sin(2it(u-v-1)) \right) du dv. \end{aligned}$$

Доказательство. Запишем свертку в виде

$$w \circledast w = \int_0^1 w(1-t)dw(t) = \int_0^1 \int_0^{1-t} dw(u)dw(t) = \int_0^1 \int_0^1 K(s,t)dw(s)dw(t),$$

$$\text{где} \quad K(s,t) = \begin{cases} 1, & s+t \leq 1; \\ 0, & s+t > 1, \end{cases}$$

и, следуя Кацу—Зигерту [9], рассмотрим вполне непрерывный самосопряженный оператор $A(f) = \int_0^1 K(s,t)f(t)dt$. Обозначим λ_i и ψ_i его собственные значения и ортонормированные собственные функции. Тогда

$$K(s,t) = \sum_i \lambda_i \psi_i(s) \psi_i(t); g(t) = \sum_i a_i \psi_i(t); X = \sum_i \lambda_i \xi_i^2 + a_i \xi_i, \quad (2)$$

где $a_i = \int_0^1 g(t) \psi_i(t) dt$ и $\xi_i = \int_0^1 \psi_i(t) dw(t)$ — независимые стандартные нормальные случайные величины. Из соотношения (2) находим характеристическую функцию

$$\begin{aligned} \phi_X(t) &= M(e^{itX}) = \prod_k M(e^{it(\sum_k \lambda_k \xi_k^2 + a_k \xi_k)}) = \\ &= \prod_k (1 - 2it\lambda_k)^{-\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{a_k^2 t^2}{2} - \frac{a_k^2 t^3 i \lambda_k}{1 - 2it\lambda_k} \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

В работе [8] была вычислена характеристическая функция свертки $w \circledast w$:

$$M(e^{itw \circledast w}) = \prod_k (1 - 2it\lambda_k)^{-\frac{1}{2}} = (\operatorname{ch} t + i \operatorname{sh} t)^{-1/2}.$$

Подставляя это значение в (3) и пользуясь тем, что $\sum_k a_k^2 = \int_0^1 g^2(t)dt$, получим

$$\phi_X(t) = (\operatorname{ch} t + i \operatorname{sh} t)^{-1/2} \exp \left[-\frac{t^2}{2} \int_0^1 g^2(t)dt - it^3 \sum_k \frac{a_k^2 \lambda_k}{1 - 2it\lambda_k} \right]. \quad (4)$$

Ряд в экспоненте можно выразить через резольвентное ядро (функцию Грина) $G(x, y; \lambda)$ оператора $A(f) = \int_0^1 K(s, t)f(t)dt$:

$$G(x, y; \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_k \Phi_k(x) \bar{\Phi}_k(y)}{1 - \lambda \lambda_k}, \quad (5)$$

где $K_n(x, y) = \int_0^1 \dots \int_0^1 K(x, t_1)K(t_1, t_2) \dots K(t_{n-1}, y) dt_1 \dots dt_{n-1}$ — итерированные ядра оператора A .

Из соотношения (5) получаем

$$\int_0^1 \int_0^1 G(x, y; \lambda) g(x) g(y) dx dy = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_k a_k^2}{1 - \lambda \lambda_k}.$$

Это позволяет записать формулу (4) в виде

$$M(e^{itX}) = (\operatorname{ch} t + i \operatorname{sh} t)^{-1/2} \times \\ \times \exp \left[-\frac{t^2}{2} \int_0^1 g^2(t)dt - it^3 \int_0^1 \int_0^1 G(x, y; \lambda) g(x) g(y) dx dy \right]. \quad (6)$$

Произведя замену переменных $u = \frac{1}{2} - x$, $v = \frac{1}{2} - y$, получим

$$K(x, y) = \tilde{K}(u, v) = \begin{cases} 1, & u + v \geq 0, \\ 0, & u + v < 0, \end{cases}$$

где $|u| \leq \frac{1}{2}$, $|v| \leq \frac{1}{2}$. Итерированные ядра будут задаваться интегралами $K(x, y) = \tilde{K}(u, v) = \int_D dt_1 \dots dt_n$, где область D определяется условием

$$D = \left\{ t_i : t_i + t_{i+1} \geq 0, |t_i| \leq \frac{1}{2}, t_1 + u \geq 0, t_n + v \geq 0 \right\}.$$

Для определенности считаем $u \geq v$. Разобьем область D на части:

$$D = \bigcup_{i=0}^n D_i, D_i \cap D_j = \emptyset, i \neq j.$$

Вычислим интеграл по области D_0 , где

$$D_0 = \{t_i \in D : t_i < u, i = \overline{1, n}\}.$$

После замены переменных $t'_i = t_i/u$ получаем

$$\begin{aligned} \int_{D_0} dt_1 \dots dt_n &= u^n \int_{D'_0} dt'_1 \dots dt'_n = \\ &= u^n \int_{-v/u}^1 \int_{-t'_n}^1 \int_{-t'_2}^1 dt'_1 \dots dt'_n = u^n P_{n+1}(v/u), \end{aligned}$$

причем область D_0 перейдет в область D'_0 , определяемую равенством

$$D'_0 = \{t'_i : t'_i + t'_{i+1} \geq 0, |t'_i| \leq 1, t'_n + v/u \geq 0\},$$

а многочлены $P_j(x)$ задаются с помощью рекуррентных формул:

$$P_1(x) = 1, \quad P_{j+1}(x) = \int_{-x}^1 P_j(t) dt, \quad (7)$$

то есть

$$\begin{aligned} P_1(t_1) &= 1, \\ P_2(t_2) &= \int_{-t_2}^1 P_1(t_1) dt_1 = \int_{-t_2}^1 dt_1, \\ P_3(t_3) &= \int_{-t_3}^1 P_2(t_2) dt_2 = \int_{-t_3}^1 \int_{-t_2}^1 dt_1 dt_2, \\ &\dots \end{aligned}$$

Отметим несколько свойств многочленов $P_j(x)$.

1. $\deg P_j(x) = j - 1$.
2. $P'_{j+1}(x) = P_j(-x)$, $j \geq 1$.
3. $P_j(-1) = 0$, $j \geq 2$; $P'_j(1) = 0$, $j \geq 3$.
4. $P''_{j+2}(x) = -P'_j(x)$, $j \geq 1$.
5. $P''_j(-1) = 0$, $j \geq 3$.

Вычислим производящую функцию для многочленов $P_j(x)$, которая понадобится в дальнейшем для вычисления резольвентного ядра.

Введем обозначение

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_{j+1}(x) z^j = f(x, z).$$

Дифференцируя это равенство по x и используя свойство 2, получим

$$z \sum_{j=0}^{\infty} P_{j+1}(-x) z^j = f'_x(x, z),$$

т.е.

$$zf(-x, z) = f'_x(x, z). \quad (8)$$

Продифференцируем последнее соотношение еще раз по x :

$$-zf'_x(-x, z) = f''_{xx}(x, z).$$

Тогда имеем линейное дифференциальное уравнение:

$$-z^2 f(x, z) = f''_{xx}(x, z),$$

из которого следует, что

$$f(x, y) = A(z) \cos(xz) + B(z) \sin(xz).$$

Подставляя полученное выражение в уравнение (8), получаем

$$A(z) \cos(xz) - B(z) \sin(xz) = -A(z) \sin(xz) + B(z) \cos(xz),$$

откуда при $x = 0$ следует $A(z) = B(z)$. По свойству 3

$$f(-1, z) = \sum_{j=0}^{\infty} P_{j+1}(-1)z^j = 1$$

(т.к. $P_1(x) \equiv 1$). Тогда $A(z) \cos xz - B(z) \sin xz = 1$, следовательно,

$$A(z) = B(z) = \frac{1}{\cos z - \sin z}.$$

Окончательно получаем

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_{j+1}(x)z^j = \frac{\cos xz + \sin xz}{\cos z - \sin z}. \quad (9)$$

Через многочлены можно выразить интегралы по оставшимся областям D_j .

$$\begin{aligned} \int_{D_j, j \neq 0} dt_1 \dots dt_n &= \int_u^{1/2} \int_{\substack{t_i \leq t_j, t_i + t_{i+1} \geq 0 \\ t_1 + u \geq 0, t_n + v \geq 0}} dt'_1 \dots dt'_n = [t'_i = \frac{t_i}{t_j}, i \neq j] = \\ &= \int_u^{1/2} t_j^{n-1} \left(\int_{\substack{|t'_i| \leq 1, t'_i + t'_{i+1} \geq 0 \\ t'_1 + u/t_j \geq 0}} dt'_1 \dots dt'_{j-1} \right) \left(\int_{\substack{|t'_i| \leq 1, t'_i + t'_{i+1} \geq 0 \\ t'_1 + v/t_j \geq 0}} dt'_{j+1} \dots dt'_n \right) dt_j = \\ &= \int_u^{1/2} t_j^{n-1} P_j(u/t_j) P_{n-j+1}(v/t_j) dt_j = \int_u^{1/2} t^{n-1} P_j(u/t) P_{n-j+1}(v/t) dt. \end{aligned}$$

Тогда итерированные ядра примут вид

$$\tilde{K}_{n+1}(u, v) = u^n P_{n+1}(v/u) + \sum_{j=1}^n \int_u^{1/2} t^{n-1} P_j(u/t) P_{n-j+1}(v/t) dt =$$

$$= u^n P_{n+1}(v/u) + \int_u^{1/2} \sum_{j=1}^n t^{j-1} P_j(u/t) t^{n-j} P_{n-j+1}(v/t) dt.$$

Подставляем это выражение в формулу для резольвентного ядра:

$$\begin{aligned} \tilde{G}(u, v; \lambda) &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} \tilde{K}_n(u, v) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \tilde{K}_{n+1}(u, v) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n u^n P_{n+1}(v/u) + \int_u^{1/2} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda \lambda^{n-1} \left(\sum_{j=1}^n t^{j-1} P_j(u/t) t^{n-j} P_{n-j+1}(v/t) \right) dt = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda u)^n P_{n+1}(v/u) + \lambda \int_u^{1/2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^n (\lambda t)^{j-1} P_j(u/t) (\lambda t)^{n-j} P_{n-j+1}(v/t) \right) dt = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda u)^n P_{n+1}(v/u) + \lambda \int_u^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda t)^{j-1} P_j(u/t) \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda t)^{k-1} P_k(v/t) \right) dt. \end{aligned}$$

Используя равенство (9), получаем

$$\begin{aligned} \tilde{G}(u, v; \lambda) &= \frac{\cos \lambda v + \sin \lambda v}{\cos \lambda u - \sin \lambda u} + \lambda \int_u^{1/2} \frac{(\cos \lambda u + \sin \lambda u)(\cos \lambda v + \sin \lambda v)}{(\cos \lambda t - \sin \lambda t)(\cos \lambda t - \sin \lambda t)} dt = \\ &= \frac{\cos \lambda v + \sin \lambda v}{\cos \lambda u - \sin \lambda u} + (\cos \lambda u + \sin \lambda u) (\cos \lambda v + \sin \lambda v) \int_{u\lambda}^{\lambda/2} \frac{dx}{(\cos x - \sin x)^2} = \\ &= \frac{\cos \lambda v + \sin \lambda v}{\cos \lambda u - \sin \lambda u} + (\cos \lambda u + \sin \lambda u) (\cos \lambda v + \sin \lambda v) \int_{u\lambda}^{\lambda/2} \frac{d \operatorname{tg} x}{(\operatorname{tg} x - 1)^2} = \\ &= \frac{\cos \lambda v + \sin \lambda v}{\cos \lambda u - \sin \lambda u} - (\cos \lambda u + \sin \lambda u)^2 \left(\frac{1}{\operatorname{tg}(\lambda/2) - 1} - \frac{1}{\operatorname{tg}(\lambda u) - 1} \right). \end{aligned}$$

Тогда после преобразований получим

$$\begin{aligned} \tilde{G}(u, v; \lambda) &= \\ &= \frac{\sin(\lambda(v+u)) + \cos(\lambda(v-u)) - \sin(\lambda(u-v-1)) + \cos(\lambda(u+v-1))}{2 \cos(\lambda)}. \end{aligned} \quad (10)$$

Теорема 1 получается из (10) элементарными преобразованиями.

Рассмотрим в качестве примера применения теоремы 1 случайную величину $X = w \otimes w + aw(1)$. Ей соответствует случай $g(t) = a$. Выполняя необходимые интегрирования, находим

$$M(e^{itw \otimes w + isw(1)}) = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch} t + i \operatorname{sh} t}} \exp \left\{ \frac{s^2 \operatorname{sh} t}{2t(\operatorname{ch} t + i \operatorname{sh} t)} \right\}, \quad (11)$$

где $s = at$. Из равенства (1) следует

Теорема 2. *Характеристическая функция случайной величины*

$$X = \xi(t) \circledast \xi = \int_0^1 \xi(1-t) d\xi(t),$$

где ξ — броуновский мост на $[0, 1]$, определяется равенством:

$$\phi_X(t) = \sqrt{\frac{t}{\operatorname{sh} t}}. \quad (12)$$

Доказательство. По определению, все статистические характеристики броуновского моста $\xi(t)$ совпадают с условными характеристиками винеровского процесса $w(t)$, при условии $w(1) = 0$, т.е.

$$\phi_I(t) = M(e^{it\xi \circledast \xi}) = M(e^{itw \circledast w} | w(1) = 0).$$

Условное математическое ожидание вычисляется по формуле

$$M(e^{itY} | X = x) f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} \phi_{X,Y}(t, s) ds, \quad (13)$$

где $\phi_{X,Y}(t, s) = M(e^{isX+itY})$ — совместная х. ф. с. в. X и Y , а $f_X(x)$ — плотность распределения с. в. X . Докажем формулу (13):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} \phi_{X,Y}(t, s) ds &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{is(X-x)+itY} f(X, Y) dX dY ds = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itY} \delta(X-x) f(X, Y) dX dY = \\ &= M(e^{itY} | X = x) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(X-x) f(X, Y) dX dY = M(e^{itY} | X = x) f_X(x). \end{aligned}$$

Совместная х. ф. с. в. $w \circledast w$ и $w(1)$ получается из (11) при условии $a = 1$:

$$\phi_{X,Y}(t, s) = (\operatorname{ch} t + i \operatorname{sh} t)^{-1/2} \exp \left\{ \frac{s^2 \operatorname{sh} t}{2t(\operatorname{ch} t + i \operatorname{sh} t)} \right\}.$$

Используя то, что стандартная нормальная плотность в нуле равна $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, получим

$$\begin{aligned} \phi_X(t) &= M(e^{itw \circledast w} | w(1) = 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{X,Y}(t, s) ds = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\operatorname{ch} t + i \operatorname{sh} t)^{-1/2} \exp \left\{ \frac{s^2 \operatorname{sh} t}{2t(\operatorname{ch} t + i \operatorname{sh} t)} \right\} ds = \sqrt{\frac{t}{\operatorname{sh} t}}. \end{aligned}$$

Характеристическая функция случайной величины $X = \xi \circledast \xi$ раскладывается в ряд:

$$\phi_{\xi \circledast \xi}(t) = 1 - \frac{1}{12} t^2 + \frac{1}{160} t^4 + O(t^6),$$

откуда

$$MX = 0, \quad DX = 1/12.$$

Следствие. Справедливо следующее равенство:

$$\xi \circledast \xi = \frac{2}{\pi} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{X_k^2}{k},$$

где X_k — независимые стандартные нормальные с.в.

Теорема 3. Плотность распределения случайной величины $\xi \circledast \xi$ определяется формулой:

$$\begin{aligned} f_{\xi \circledast \xi}(x) &= \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{2\pi}} C_{-1/2}^k \left(\frac{4}{(4k+1)^2 + 4x^2} \right)^{3/4} \cos\left(\frac{3}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x}{4k+1}\right)\right), \end{aligned} \quad (14)$$

где коэффициенты $C_{-1/2}^k$ задаются равенством:

$$C_{-1/2}^k = \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)\dots(-\frac{1}{2}-k+1)}{k!}, \quad (15)$$

а $-\infty < x < \infty$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} f_{\xi \circledast \xi}(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \sqrt{\frac{t}{\operatorname{sh} t}} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(tx) \sqrt{\frac{t}{\operatorname{sh} t}} dt = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\infty} \sqrt{t} \cos(tx) \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k C_{-1/2}^k e^{-\frac{t}{2}(4k+1)} \right) dt = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k C_{-1/2}^k \left(\int_0^{\infty} \sqrt{t} \cos(tx) e^{-\frac{t}{2}(4k+1)} dt \right), \end{aligned}$$

так как ряд $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k C_{-1/2}^k e^{-\frac{t}{2}(4k+1)}$, где $C_{-1/2}^k$ определяются формулой (15), сходится равномерно при $t > 0$. Мы использовали разложение

$$(1+z)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} C_\alpha^k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} z^k, \quad |z| < 1.$$

С помощью формулы

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \sqrt{t} \cos(tx) e^{-at} dt = \frac{\sqrt{2}}{2} (a^2 + x^2)^{-\frac{3}{4}} \cos\left(\frac{3}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}\right)$$

(см. [1, с. 562]) найдем, что

$$\int_0^{\infty} \sqrt{t} \cos(tx) e^{-\frac{t}{2}(4k+1)} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{4}{(4k+1)^2 + 4x^2} \right)^{3/4} \cos \left(\frac{3}{2} \operatorname{arctg} \frac{2x}{4k+1} \right).$$

Упрощая, получаем (14). Теорема доказана.

Приведем таблицу квантилей распределения $F_I(x)$ случайной величины $I = \xi \circledast \xi$, вычисленных по формуле (14):

$P\{X < x\}$	0,0008	0,01	0,1	0,5	0,9	0,99	0,99957
x	-1	-0,91	-0,5	-0,04	0,7	0,96	1

Теорема 4. Пусть $w_1(t)$ и $w_2(t)$ — два независимых винеровских процесса, $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ — соответствующие им броуновские мосты. Распределения случайных величин $I_1 = \int_0^1 \xi_1(t) d\xi_1(1-t)$, $I_2 = \int_0^1 w_1(s) d\xi_2(s)$ и $I_3 = \int_0^1 \xi_1(s) dw_2(s)$ совпадают, а характеристические функции определяются формулой:

$$\phi(t) = \sqrt{\frac{t}{\operatorname{sh} t}}.$$

Доказательство можно найти в [8].

Полученная в данной работе формула для характеристической функции функционала $X = w \circledast w + L(w)$ совместно с формулой работы [4] для функционала $X = w * w + L(w)$ полностью описывают распределения этого класса функционалов. Другие следствия теоремы 1 можно найти в [8].

Литература

- [1] Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике. М.: Наука, 1981. 719 с.
- [2] Вирченко Ю.П., Мазманишвили А.С. Распределение вероятностей случайного функционала-свертки от нормального марковского процесса // Проблемы передачи информации. 1990. Т. XXVI, Вып. 3. С. 96–101.
- [3] Клячко А.А., Солодяников Ю.В. Вычисление распределения свертки винеровского процесса // Проблемы передачи информации. 1985. Т. XXI. Вып. 4. С. 41–48.
- [4] Клячко А.А., Солодяников Ю.В. Вычисление характеристических функций некоторых функционалов от винеровского процесса и броуновского моста // Теория вероятностей и ее применения. 1986. Вып. 3. С. 569–573.
- [5] Леви П. Стохастические процессы и броуновское движение. М.: Наука, 1972. 375 с.

- [6] Лиске Х. О распределении одного функционала от винеровского процесса // Теория случайных процессов. 1982. №10. С. 50–54.
- [7] Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1992. 820 с.
- [8] Солодянников Ю.В., Кожан Д.П. Вычисление распределений некоторых функционалов от винеровских процессов // Вестник Самарского гос. университета. Естественная серия. 2003. №2. С. 10–27.
- [9] Кас М., Siegert A.J. An explicite representation of stationary Gaussian process // Ann. Math. Statist., 1947. V.18. P. 438–442.

CALCULATION OF CHARACTERISTIC FUNCTIONS OF FUNCTIONALS OF THE WIENER PROCESSES AND BROWNIAN BRIDGES³

© 2003 Y.V. Solodiannikov, D.P. Kojan⁴

The paper is devoted to calculation of characteristic functions of some convolutions of Wiener processes and Brownian bridges. The obtained results describe properties of characteristic functions of all functionals $X = w \circledast w + L(w)$ and $X = w * w + L(w)$.

Поступила в редакцию 6/V/2003;
в окончательном варианте — 20/XI/2003.

³ Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. S.V. Astashkin.

⁴ Solodiannikov Yuriy Vasilyevich (samdi@samara.ru), Kojan Dmitriy Petrovich, (kdp@ssu.samara.ru), Dept. of Theory of Functions and Funcional Analysis, Samara State University, Samara, 443011, Russia.