

ФАКТОРИЗАЦИЯ, ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ. 2. НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ¹

© 2003 Л.М. Беркович²

Вторая часть обзорной статьи. В ней представлены развитые автором методы факторизации, автономизации и точной линеаризации, которые в совокупности с методами группового анализа и дифференциальной алгебры позволяют создать целостную картину для изучения и интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Это дает возможность конструктивно исследовать нелинейные и нестационарные задачи естествознания и, прежде всего, задачи механики и физики.

Первая часть была посвящена линейным уравнениям (см. Вестник СамГУ Естественнонаучная серия. 2003. Специальный выпуск. С. 5–43). Вторая часть посвящена нелинейным уравнениям. В основу статьи положена монография автора (см. Беркович Л.М. Факторизация и преобразования дифференциальных уравнений. Методы и приложения. М.: НИЦ РХД, 2002).

4. Метод автономизации

К числу важнейших задач, которые выдвигает наука, относятся нестационарные задачи. Не подлежит сомнению, что их роль в современной науке и ее приложениях будет еще большей, если будут развиты методы редукции их к менее сложным стационарным задачам [1]. Весьма эффективным является групповой анализ дифференциальных уравнений [2, 3]. Однако трудности, возникающие при практическом применении алгоритма С. Ли для нахождения точечных симметрий, побуждают к поиску альтернативных подходов. В данном параграфе представлен один из таких подходов — метод автономизации ОДУ — с использованием класса точечных преобразований Куммера—Лиувилля (КЛ). Хотя область его применения уже, чем у группового анализа, однако он является не менее эффективным средством исследования нестационарных задач в тех случаях, когда он применим.

¹ Представлена доктором физико-математических наук профессором Ю.Н. Радаевым.

² Беркович Лев Мейлихович (berk@ssu.samara.ru), действительный член Академии нелинейных наук, кафедра алгебры и геометрии Самарского государственного университета, 443011, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

Естественное представление нелинейного уравнения в виде суммы линейного и нелинейного выражений является отличительной особенностью этого метода. При этом линейный член (в общем случае неавтономный) предполагают *приводимым*, а нелинейный член хотя и требует определенного согласования с линейным членом, но не предполагается малым. При выполнении определенных соотношений между нелинейным и линейным членами удастся преобразовать данное неавтономное уравнение в автономное (хотя оно и остается нелинейным). Другой особенностью предложенного метода является то, что независимо от порядка исходного уравнения для нахождения искомого преобразования КЛ достаточно проинтегрировать лишь одно нелинейное ОДУ 2-го порядка. Кроме того, стало возможным установить явную структуру ОДУ, допускающих автономизацию. При этом были унифицированы известные и найдены новые признаки приведения к автономным уравнениям, а также новые признаки интегрируемости в замкнутом виде нелинейных уравнений. Используя результаты по классификации линейных уравнений, дана классификация нелинейных уравнений со степенной нелинейностью. Эффективность метода автономизации продемонстрирована на примере уравнения Эмдена, к которому были применены помимо метода автономизации также методы С. Ли и Э. Нетер.

Широкий класс ОДУ, имеющих как теоретическое, так и прикладное значение, образуют **нелинейные уравнения с приводимой линейной частью** [4, 5]. Их можно представить в виде

$$(NLNA)y \equiv L_n y = F(x, y, y', \dots, y^{(m)}), \quad (4.1)$$

где присоединенное линейное уравнение

$$L_n y \equiv y^{(n)} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a_k y^{(n-k)} = 0, \quad a_k \in \mathbb{C}^{n-k}(i), \quad (') = d/dx$$

приводимо в смысле Альфана [6, 7].

Теорема 4.1. Для приведения (4.1) к автономному виду

$$(NLA)z \equiv z^{(n)}(t) + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} b_k z^{(n-k)}(t) = a\Phi(z, z'(t), \dots, z^{(m)}(t)), \quad b_k, a = \text{const}, \quad (4.2)$$

преобразованием КЛ

$$y(x) = v(x)z, \quad dt = u(x)dx, \quad vu \neq 0, \forall x \in i_0 \subset i, \quad v, u \in C^n(i_0) \quad (4.2')$$

необходимо и достаточно, чтобы нелинейная часть F могла быть представлена в виде

$$F(x, y, y', \dots, y^{(m)}) = au^n v \Phi \left[\frac{y}{v}, \frac{1}{v} \left(\frac{1}{u} D - \frac{v'}{vu} \right) y, \dots, \frac{1}{v} \left(\frac{1}{u} D - \frac{v'}{vu} \right)^m y \right], \quad (4.3)$$

где $a = \text{const}$, $\left(\frac{1}{u} D - \frac{v'}{vu} \right)^k y$ — k -я итерация дифференциального выражения $\left(\frac{1}{u} D - \frac{v'}{vu} \right) y$.

При этом (4.1) допускает частные решения вида

$$y = \rho v(x), \quad b_n \rho = a \Phi(\rho, 0, \dots, 0), \quad (4.4)$$

где $v(x)$ находится, исходя из уравнений

$$v(x) = |u|^{-\frac{n-1}{2}} \exp\left(-\int a_1 dx + b_1 \int u dx\right),$$

$$\frac{1}{2} \frac{u''}{u} - \frac{3}{4} \left(\frac{u'}{u}\right)^2 + \frac{3}{n+1} B_2 u^2 = \frac{3}{n+1} A_2(x), \quad B_2 = b_2 - b_1^2 = \text{const}, \quad (4.4')$$

причем $v(x)$ и $u(x)$ удовлетворяют также неопределенному дифференциальному уравнению³

$$v^{(n)} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a_k(x) v^{(n-k)} - b_n u^n v = 0.$$

Уравнение (4.1) допускает точечную симметрию с оператором

$$X \equiv \xi(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{v'}{uv} y \frac{\partial}{\partial y},$$

т.е. точечная симметрия удовлетворяет определяющему уравнению Ли

$$X(L_n y - F)|_{L_n y = F} = 0, \quad (4.5)$$

где X_n есть n -е продолжение генератора X :

$$X_n = X + \sum_{k=1}^n \eta_k \frac{\partial}{\partial y^{(k)}}, \quad \eta_k = \frac{d\eta_{k-1}}{dx} - y^{(k)} \frac{d\xi}{dx}. \quad (4.6)$$

Выражения

$$J_k(x, y, y', \dots, y^{(k)}) = \frac{1}{v} \left(\frac{1}{u} D - \frac{v'}{uv} \right)^k y, \quad k = \overline{0, m} \quad (4.7)$$

являются дифференциальными инвариантами (4.7) порядка k , т.е. функционально независимыми решениями уравнения $X_n \Psi = 0$.

Таким образом, метод автономизации можно рассматривать как конструктивную альтернативу к теории точечных симметрий С. Ли, т.к. он приводит к тем же результатам, но позволяет оперировать только с ОДУ (4.4'). Однако метод автономизации (по крайней мере в том виде, как он представлен в работе) имеет и ограничения. Он дает возможность найти подалгебру алгебры Ли точечных симметрий, допускаемых уравнением (4.1) и операторы которых имеют вид

$$X = \xi(x) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x) y \frac{\partial}{\partial y}, \quad (4.8)$$

и (или) вид

$$X = \xi(x) \frac{\partial}{\partial x} + [\eta_1(x) y + \eta_2(x)] \frac{\partial}{\partial y}, \quad \eta_2(x) \neq 0. \quad (4.9)$$

³ Явные формулы для $v(x)$ содержатся в работе [7, формулы (3.20)].

Теорема 4.2. Если линейная часть $L_n u$ уравнения

$$(NLNA)u \equiv L_n u + \sum_{s=1}^l f_s(x) u^{m_s} = F(x), \quad 1 < m_1 < m_2 < \dots < m_l \quad (4.10)$$

приводима преобразованием KL и при этом выполняются условия $p_s u^n = f_s(x) v^{m_s-1}$, $p_s = \text{const}$, то

1) уравнение (4.10) преобразуется в уравнение

$$(NLA)z \equiv M_n z + \sum_{s=1}^l p_s z^{m_s} = v^{-1}(x(t)) u^{-n}(x(t)) F(x(t));$$

2) однородное уравнение

$$L_n u + \sum_{s=1}^l f_s(x) u^{m_s} = 0,$$

соответствующее (4.10), допускает решения вида (4.4), где ρ удовлетворяет алгебраическому уравнению

$$b_n \rho + \sum_{s=1}^l p_s \rho^{m_s} = 0.$$

Тест автономизации.

1°. С помощью критерия приводимости [7, теорема 3.5] проверить, является ли приводимым линейное уравнение $L_n u = 0$, присоединенное к нелинейному уравнению (4.1).

2°. Убедившись, что уравнение $L_n u = 0$ приводимо (а для $n = 2$ это всегда выполняется), представить его общее решение в виде формулы⁴

$$y = v \sum_{k=1}^n c_k \exp(r_k U), \quad U = \int u dx,$$

где r_k — простые корни характеристического уравнения

$$M_n(r) \equiv r^n + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} b_k r^{n-k} = 0 \quad (4.10')$$

и (или) формулы

$$y = v \sum_{k=1}^m \sum_{s=1}^{l_k} \frac{1}{(s-1)!} U^{s-1} \exp(r_k U), \quad \sum_{k=1}^m l_k = n,$$

где r_k — кратные характеристические корни уравнения (4.10'), $u(x)$ удовлетворяет формуле

$$u(x) = (AY_2^2 + BY_2 Y_1 + CY_1^2)^{-1}, \quad \delta = B^2 - 4AC = -12/(n+1)B_2,$$

⁴ См. [7, предложение 3.2.]

где $Y_1, Y_2 = Y_1 \int Y_1^{-2} dx$ есть фундаментальная система решений (ФСР) линейного уравнения

$$Y'' + \frac{3}{n+1} A_2 Y = 0,$$

а $v(x)$ находится согласно [7, предложение 3.1].

3°. Проверить, можно ли неавтономность нелинейного члена $F(x, y, y', \dots, y^{(m)})$ "уравновесить" с помощью "веса" $v(x)u^n(x)$, и при утвердительном ответе попытаться представить его в виде (4.3).

Пример 4.1. Эффективность теста автономизации продемонстрируем на примере уравнения Эмдена

$$y'' + \frac{2}{x} y' + y^5 = 0, \quad n \neq 0; 1. \quad (4.11)$$

Оно является частным случаем уравнения Эмдена—Фаулера

$$y'' + \frac{a}{x} y' + b x^{m-1} y^n = 0, \quad n \neq 0; 1, \quad a, b = \text{const.}$$

Применительно к уравнению (4.11) при условии, что $n \neq 2$, функции $v(x)$ и $u(x)$ должны быть связаны соотношением $vu^2 = v^5$, тогда как общее решение линейного уравнения $y'' + \frac{2}{x} y' = 0$ можно представить либо в виде $y = v(x)[c_1 \exp(r_1 \int u(x) dx) + c_2 \exp(r_2 \int u(x) dx)]$, $r_1 \neq r_2$, либо в виде $y = v(x) \exp(r_1 \int u(x) dx)(c_1 + c_2 \int u(x) dx)$, где $r_1 = r_2$ суть const. Легко прийти к выводу, что уравнение (4.11) преобразованием КЛ $y = x^{-1/2} z$, $dt = x^{-1} dx$ сводится к уравнению с постоянными коэффициентами $\ddot{z} - 1/4 \dot{z} + z^5 = 0$ (см. (4.2)) и имеет также элементарное решение $y = \rho x^{-1/2}$, $-1/4 \rho + \rho^5 = 0$ (см. (4.3)). Из полученного автономного уравнения легко перейти к первому интегралу

$$x^2 \left(\frac{1}{3} x y^6 + y y' + x y'^2 \right) = C. \quad (4.12)$$

А найденное преобразование КЛ приводит к оператору группы Ли

$$X = x \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2} y \frac{\partial}{\partial y}. \quad (4.13)$$

В конце этого параграфа мы вновь вернемся к уравнению (4.9), применив к нему метод С. Ли, а также метод, связанный с теоремой Нетер, с целью сравнения различных методов по эффективности.

Далее рассмотрим каноническое обобщенное уравнение Эмдена—Фаулера (КОУЭФ)

$$y'' + f(x) y^n = 0, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1. \quad (4.14)$$

Найдем законы изменения $f(x)$ в конечной и дифференциальной формах, когда уравнение (4.14) допускает одну, две или три точечные симметрии С. Ли. Бóльшее число точечных симметрий уравнение КОУЭФ, как и ОУЭФ

$$y'' + a_1(x) y' + a_0(x) y + f(x) y^n = 0, \quad n \neq 0, \quad 1,$$

допускать не может. При этом соответствующие инфинитезимальные операторы могут быть лишь вида (4.8), либо (для $n = 2$), кроме (4.8), также вида (4.9).

Заметим, что к уравнению ЭФ и его обобщениям сводятся немало других нелинейных уравнений теоретической и математической физики (см., например, Фушич, Штеленъ, Серов [8]).

Случаем *общего положения* назовем случай, соответствующий оператору (4.8). *Особым* назовем случай, соответствующий оператору (4.9).

Теорема 4.3. [9, 10]. *Законы изменения $f(x)$, при которых уравнение (4.14) с помощью преобразования КЛ приводится к автономной форме*

$$\ddot{z} \pm b_1 \dot{z} + b_0 z + cz^n = 0, \quad b_1, b_0, c = \text{const}, \quad n \neq 0; 1$$

(что соответствует случаю общего положения), имеют вид

$$\begin{aligned} f_1(x) &= (\alpha_1 x + \beta_1)^{-\frac{3+n}{2} \pm \frac{b_1(1-n)}{2\sqrt{\delta_1}}} (\alpha_2 x + \beta_2)^{-\frac{3+n}{2} \mp \frac{b_1(1-n)}{2\sqrt{\delta_1}}}, \\ \delta_1 &= (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1)^2 > 0; \\ f_2(x) &= (Ax^2 + Bx + C)^{-\frac{3+n}{2}} \exp \left[\pm \frac{(1-n)b_1}{\sqrt{-\delta_2}} \operatorname{arctg} \frac{2Ax + B}{\sqrt{-\delta_2}} \right], \\ \delta_2 &= B^2 - 4AC < 0; \\ f_3(x) &= (\alpha x + \beta)^{-(n+3)} \exp \left[\pm \frac{(1-n)b_1}{2\alpha(\alpha x + \beta)} \right], \quad \delta_3 = 0, \quad \alpha \neq 0; \\ f_4(x) &= (\alpha x + \beta)^{-\frac{n+3}{2} \pm b_1 \frac{1-n}{2\alpha}}, \quad \delta_4 = \alpha^2 > 0; \\ f_5(x) &= C \exp \left(\pm \frac{1-n}{2} b_1 x \right), \quad \delta_5 = 0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Замечание 4.1. Законы изменения $f(x)$ в случае общего положения не могут быть ни периодическими, ни колеблющимися функциями от x .

Теорема 4.4. *Интегрирование КОУЭФ (4.14), (4.15) можно свести к интегрированию (4.14) при условии, что $f(x)$ удовлетворяет уравнению*

$$f'(x) = k f^m(x), \quad m \in [1, (5+n)/(3+n)]. \quad (4.16)$$

Уравнение (4.14), (4.16) называется *приведенным* КОУЭФ.

Теперь рассмотрим особый случай КОУЭФ

$$y'' + f(x)y^2 = 0. \quad (4.17)$$

Теорема 4.5.

1°. Следующие утверждения эквивалентны:

А. Уравнение (4.17) допускает точечную симметрию с оператором (4.9), где

$$\xi''' = -4k\eta_2 \xi^{-5/2} \exp \left(\pm \frac{1}{2} b_1 \int \frac{dx}{\xi} \right), \quad \eta_2'' = 0; \quad (4.18)$$

$$\eta_1 = \frac{1}{2}(\xi' \pm b_1); \quad f(x) = k\xi^{-5/2} \exp\left(\mp \frac{1}{2}b_1 \int \frac{dx}{\xi}\right).$$

Б. Уравнение (4.17) подстановкой

$$y = v(x)z + w(x), \quad dt = u(x)dx$$

приводится к автономному виду

$$\ddot{z} \pm b_1 \dot{z} + b_0 z + c + kz^2 = 0,$$

где

$$c = \frac{1}{4k}(b_0^2 - \frac{36}{625}b_1^4),$$

а $u(x)$ находится из системы уравнений

$$\varphi = \frac{1}{2} \frac{u''}{u} - \frac{3}{4} \left(\frac{u'}{u}\right)^2 - \frac{1}{4} \delta u^2, \quad \delta = b_1^2 - 4b_0,$$

$$\begin{aligned} \varphi'' + (\pm b_1 u - 5 \frac{u'}{u})\varphi' + \left(\frac{35}{4} \frac{u'^2}{u^2} - \frac{5}{2} \frac{u''}{u} \mp 2b_1 u' + \frac{1}{4} b_1^2 u^2\right)\varphi + \frac{1}{2} \varphi^2 = \\ = \frac{1}{2} (b_0^2 - \frac{36}{625} b_1^4) u^4, \end{aligned}$$

$$v = u^{-1/2} \exp\left(\pm \frac{1}{2} b_1 \int u dx\right), \quad w = \frac{1}{2f} \left(\frac{1}{2} \frac{u''}{u} - \frac{3}{4} \left(\frac{u'}{u}\right)^2 - \frac{1}{4} \delta u^2\right),$$

$$f = k u^{5/2} \exp\left(\mp \frac{1}{2} b_1 \int u dx\right).$$

2°. Функции ξ, η_1, η_2 связаны с функциями u, v, w формулами:

$$u = \frac{1}{\xi}, \quad v = \exp\left(\int \frac{\eta_1}{\xi} dx\right), \quad w = \exp\left(\int \frac{\eta_1}{\xi} dx\right) \int \frac{\eta_2}{\xi} \exp\left(-\int \frac{\eta_1}{\xi} dx\right) dx;$$

$$\xi = \frac{1}{u}, \quad \eta_1 = \frac{v'}{uv}, \quad \eta_2 = \left(\frac{1}{u} D - \frac{v'}{uv}\right) w.$$

Теорема 4.6.

1°. Функционально независимые решения уравнения

$$\frac{u^{iv}}{u} - 10 \frac{u' u'''}{u^2} - \frac{25}{4} \frac{u''^2}{u^2} + \frac{195}{4} \frac{u'^2 u''}{u^3} - \frac{585}{16} \frac{u'^4}{u^4} = 0 \quad (4.19)$$

даются формулами:

$$u(t) = \lambda P(t), \quad x = - \int P^{-3/2}(t) dt,$$

$$u(t) = \lambda P(t) \left(\int P^{-3/2}(t) dt \right)^2, \quad x = \left(\int P^{-3/2}(t) dt \right)^{-1},$$

где $\lambda \neq 0$ — произвольная постоянная.

2°. Функционально независимые решения уравнения

$$\frac{f^{iv}}{f} - \frac{32}{5} \frac{f' f'''}{f^2} - \frac{43}{10} \frac{f''^2}{f^2} + \frac{594}{25} \frac{f'^2 f''}{f^3} - \frac{1782}{125} \frac{f'^4}{f^4} = 0 \quad (4.20)$$

даются формулами

$$f(t) = kP^{5/2}(t), \quad x = \int P^{-3/2}(t)dt,$$

$$f(t) = kP^{5/2}(t) \left(\int P^{-3/2}(t)dt \right)^5, \quad x(t) = - \left(\int P^{-3/2}(t)dt \right)^{-1},$$

где $k \neq 0$ — произвольная постоянная, а $P(t)$ находится по формуле

$$P(t) = -2/3kt^3 + c_1t^2 + c_2t + c_3, \quad c_1^2 = -2kc_2.$$

Замечание 4.2. При выводе и решении уравнений (4.19) и (4.20) были использованы решения уравнения (4.18) при $b_1 = 0$. Решения уравнения (4.18) при $b_1 \neq 0$, $\eta_2 \neq 0$ не рассматривались.

Теорема 4.7.

1. Уравнение (4.19) имеет элементарные решения:

$$u(x) = \lambda, \quad u(x) = \lambda x^{-2}, \quad u(x) = \lambda x^{-8/7}, \quad u(x) = \lambda x^{6/7}, \quad \lambda \neq 0.$$

2. Уравнение (4.20) имеет элементарные решения:

$$f(x) = k, \quad f(x) = kx^{-5}, \quad f(x) = kx^{-15/7}, \quad f(x) = kx^{-20/7}, \quad k \neq 0.$$

Следующие примеры соответствуют особым случаям уравнения КОУЭФ

$$y'' + kx^\sigma y^\mu = 0, \quad (4.21)$$

получающимся при $\mu = 2$.

Пример 4.2. Уравнение

$$y'' + kx^{-20/7}y^2 = 0$$

преобразованием $y = x^{4/7}z + \frac{6}{49k}x^{6/7}$, $dt = x^{-8/7}dx$ приводится к легко интегрируемому виду

$$\ddot{z} + kz^2 = 0 \quad (4.22)$$

и допускает алгебру Ли A_2 с коммутаторами:

$$X_1 = \frac{7^3}{12}x^{8/7}\frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{49}{3}x^{1/7}y + \frac{1}{k}x\right)\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = -7x\frac{\partial}{\partial x} - 6y\frac{\partial}{\partial y}, \quad [X_1, X_2] = X_1.$$

Пример 4.3. Уравнение

$$y'' + kx^{-15/7}y^2 = 0$$

преобразованием $y = x^{3/7}z + \frac{6}{49k}x^{1/7}$, $dt = x^{-6/7}dx$ приводится к виду (4.22) и допускает алгебру Ли A_2 с коммутаторами:

$$X_1 = \frac{7^3}{12}x^{6/7}\frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{49}{4}x^{-1/7}y - \frac{1}{k}\right)\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = 7x\frac{\partial}{\partial x} + 6y\frac{\partial}{\partial y}, \quad [X_1, X_2] = X_1.$$

Замечание 4.3. В книге А.Д. Брюно [11, с. 136] при рассмотрении уравнения (4.21) особые случаи интегрируемости не были указаны. Однако при ее переводе на английский [12, р. 147] отсутствовавшие в русском издании случаи интегрируемости были восстановлены.

Далее рассмотрим некоторые обобщения уравнения Ермакова.

Теорема 4.8.

1. Если линейное уравнение

$$L_n Y \equiv Y^{(n)} + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} a_k(x) Y^{(n-k)} = 0$$

приводится к уравнению с постоянными коэффициентами

$$M_n z \equiv z^{(n)}(t) + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} b_k z^{(n-k)}(t) = 0, \quad b_k = \text{const} \quad (4.22')$$

преобразованием КЛ (4.2'), то нелинейное уравнение

$$L_n Y - b_n Y \frac{1+n}{1-n} = 0 \quad (4.23)$$

имеет двухпараметрическое семейство решений

$$y = p(Ay_1^2 + By_1y_2 + Cy_2^2) \frac{n-1}{2},$$

где $B^2 - 4AC = q$ (p, q — фиксированные постоянные), y_1, y_2 образуют ФСР присоединенного линейного уравнения

$$y'' + \frac{3}{n+1}a_2y = 0.$$

2. При этом уравнение (4.23) допускает трехмерную алгебру Ли с генераторами

$$X_1 = y_1^2(x)\frac{\partial}{\partial x} + (n-1)y_1(x)y_1'(x)y\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = y_2^2(x)\frac{\partial}{\partial x} + (n-1)y_2(x)y_2'(x)y\frac{\partial}{\partial y},$$

$$X_2 = y_1(x)y_2(x)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{n-1}{2}(y_1(x)y_2'(x) + y_2(x)y_1'(x))y\frac{\partial}{\partial y},$$

коммутаторы которых удовлетворяют условиям

$$[X_1, X_2] = X_1, \quad [X_2, X_3] = X_3, \quad [X_3, X_1] = -2X_2,$$

соответствующим алгебре Ли $sl(2, \mathbf{R})$ (G_3 – VIII по классификации Ли–Бланки).

Теперь рассмотрим **системы Ермакова и их обобщения**. Под системой Ермакова понимается система уравнений

$$\begin{cases} \ddot{x} + a_0(t)x = 0, \\ \ddot{y} + a_0(t)y = b_0 y^{-3}, \end{cases}$$

которая имеет первый интеграл (инвариант) вида

$$1/2(\dot{x}y - y\dot{x})^2 + 1/2b_0(x/y)^2 = C.$$

Ниже предлагается обобщение системы Ермакова, которое охватывает сделанные ранее обобщения (см., например, [13]).

Теорема 4.9. *Дана неавтономная система*

$$\begin{cases} \ddot{x} + a_1(t)\dot{x} + a_0(t)x = a f(t)x^m y^n F\left(\frac{x}{v(t)}, \frac{y}{v(t)}\right), & a = \text{const}, \\ \ddot{y} + a_1(t)\dot{y} + a_0(t)y = b f(t)x^n y^m G\left(\frac{x}{v(t)}, \frac{y}{v(t)}\right), & b = \text{const}. \end{cases} \quad (4.24)$$

Пусть присоединенная линейная система (получающаяся из (4.24) при $a = b = 0$) приводима преобразованием KL $x = v(t)X$, $y = v(t)Y$, $dT = u(t)dt$ к автономному виду $X''(T) + b_0 X = 0$, $Y''(T) + b_0 Y = 0$, причем $F = F\left(\frac{Y}{X}\right)$, $G = G\left(\frac{X}{Y}\right)$, а $f(t)$ удовлетворяет соотношению $f(t) = v^{1-m-n}u^2$; $m = -(n+3)$, то (4.24) имеет первый интеграл (инвариант)

$$I = \frac{1}{2}\varphi^2(x\dot{y} - y\dot{x})^2 + a \int^{x/y} u^{n+1} F(u) du + b \int^{y/x} u^{n+1} G(u) du,$$

где $\varphi = \exp(\int a_1(t)dt)$.

Заметим, что уравнение Ермакова и его обобщения, а также системы Ермакова и их обобщения встречаются как в классической, так и квантовой механике, в т.н. методе параболического уравнения в задачах дифракции коротких волн (см., например, [14, с. 432–434]) и др.

Замечание 4.4. Метод автономизации применим и к автономным системам.

Пример 4.4. Рассмотрим систему Ф. Калоджеро

$$\ddot{x}_k = 2b \sum_{j \neq k} (x_k - x_j)^{-3} - a^2 x_k, \quad k = \overline{1, n}, \quad a = \text{const}, \quad b = \text{const}. \quad (4.25)$$

Согласно наблюдению А.М. Переломова [15] система (4.25) может быть приведена к случаю $a = 0$, $b = 1$. Покажем это, применив метод автономизации. Линейная часть системы (4.25) имеет вид

$$\ddot{x}_k + a^2 x_k = 0, \quad k = \overline{1, n}. \quad (4.26)$$

Система (4.26) преобразованиями

$$x_k = v(t)X_k(\tau), \quad d\tau = u(t)dt, \quad k = \overline{1, n} \quad (4.27)$$

приводится к системе $X_k''(\tau) = 0$, $k = \overline{1, n}$, если выполняются условия

$$\frac{1}{2} \frac{\ddot{u}}{u} - \frac{3}{4} \left(\frac{\dot{u}}{u} \right)^2 = a^2, \quad \ddot{v} + a^2 v = 0, \quad (u = \mu v^{-2}), \quad \mu = \text{const.}$$

Возьмем

$$v = \cos at, \quad \mu = 1, \quad \text{откуда } u = \sec^2 at. \quad (4.28)$$

Тогда система (4.25) преобразованием КЛ (4.27), (4.28) приводится к виду

$$X_k''(\tau) = 2b \sum_{j \neq k} (X_k - X_j)^{-3}.$$

Далее рассмотрим классификацию нелинейных ОДУ порядка n ($n > 2$) со степенной нелинейностью

$$y^{(n)} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a_k y^{(n-k)} + g(x) y^m = 0, \quad a_k \in C^{n-k}(i). \quad (4.29)$$

Теорема 4.10 [16]. Множество уравнений (4.29) распадается на $n-1$ класс в соответствии с каноническими формами Альфана для ЛОДУ- n (см. [7, теорема 3.2]):

$$H_{ns}z + g_{ns}(t)z^m = 0, \quad s = \overline{0, n-3}; \quad H_{nn-2}z \equiv z^{(n)} + g_{nn-2}(t)z^m = 0, \quad n > 2.$$

Теорема 4.11 [16]. Множество уравнений (4.29) распадается на $n-1$ класс в соответствии с каноническими формами Форсайта для ЛОДУ- n (см. [7, теорема 3.3, формулы (3.10)]):

$$F_{ns}z + g_{ns}(t)z^m = 0, \quad s = \overline{0, n-3}, \quad F_{nn-2}z \equiv z^{(n)} + g_{nn-2}(t)z^m = 0, \quad n > 2.$$

4.1 Уравнение Эмдена: другие методы интегрирования

4.1.1. Использование теоремы Нетер

Рассмотрим тот же пример, следуя [17, гл. 4]. Пусть дана механическая система, представленная обобщенным лагранжианом $L = L(t, q, \dot{q}) \in C^2(i)$ в том смысле, что действительное движение соответствующей изображающей точки между состояниями $M_1(q(t_1))$ и $M_2(q(t_2))$ определяется из условия стационарности интегрального функционала

$$I[q] = \int_{t_1}^{t_2} L(t, q(t), \dot{q}(t)) dt, \quad (4.30)$$

называемого **действием по Гамильтону**.

Движение этой системы описывается уравнением Эйлера-Лагранжа

$$E(L) \equiv \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0. \quad (4.31)$$

Предположим, что переменные t и q подвергаются действию следующей однопараметрической непрерывной группы бесконечно малых преобразований

$$G_1 : \begin{cases} t^* = t + \varepsilon \xi(t, q) + o(\varepsilon), \\ q^* = q + \varepsilon \eta(t, q) + o(\varepsilon). \end{cases} \quad (4.32)$$

Интегральный функционал (4.30) является абсолютным инвариантом группы преобразований (4.32), если имеет место следующее соотношение между лагранжианами:

$$L(t^*, q^*(t^*), \frac{d}{dt^*} q^*(t^*)) \frac{dt^*}{dt} = L(t, q(t), \dot{q}(t)) + o(\varepsilon). \quad (4.33)$$

Группа преобразований, оставляющая интегральный функционал абсолютно инвариантным, называется **абсолютной симметрией** действия по Гамильтону.

Теорема 4.12. *Если преобразование (4.32) является абсолютной симметрией действия по Гамильтону, то имеет место тождество (Нетер):*

$$\frac{\partial L}{\partial t} \xi + \frac{\partial L}{\partial q} \eta + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} (\dot{\eta} - \dot{q} \dot{\xi}) + L \dot{\xi} \equiv 0. \quad (4.34)$$

Теорема 4.13. *Если преобразование (4.32) является абсолютной симметрией действия по Гамильтону, то уравнение движения (4.31) допускает первый интеграл вида*

$$(L - \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}) \xi + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \eta = \text{const}. \quad (4.35)$$

Первый интеграл (4.35) может быть также представлен в виде $H\xi - p\eta = \text{const}$, где H — гамильтониан, а p — обобщенный импульс механической системы.

Теоремы о симметрии могут быть непосредственно использованы для нахождения первого интеграла уравнения движения механической системы, представленной лагранжианом $L = L(t, q, \dot{q})$. Для этого составляются так называемые уравнения Киллинга. Они являются уравнениями в частных производных первого порядка относительно координат инфинитезимального оператора однопараметрической группы. Далее отыскивается какое-нибудь решение $(\xi(x), \eta(x))$ уравнений Киллинга. Найденное решение подставляется в соответствующее выражение для постоянного движения, и тем самым отыскивается искомый первый интеграл.

Возвращение к примеру 4.1. Вновь найдем первый интеграл уравнения Эмдена (4.11), которое запишем в виде

$$\ddot{q} + \frac{2}{t} \dot{q} + q^5 = 0. \quad (4.36)$$

Уравнение (4.36) описывает движение системы с обобщенным лагранжианом

$$L = \frac{t^2}{2} \left(\dot{q}^2 - \frac{q^6}{3} \right). \quad (4.37)$$

Для того чтобы (4.32) было абсолютной симметрией действия по Гамильтону, тождество Нетер (4.34) должно иметь вид

$$\begin{aligned} & \left(\dot{q}^2 - \frac{1}{3}q^6 \right) \xi - tq^5\eta + t\dot{q} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial q} \dot{q} - \dot{q} \frac{\partial \xi}{\partial t} - \dot{q}^2 \frac{\partial \xi}{\partial q} \right) + \\ & + \frac{t}{2} \left(\dot{q}^2 - \frac{1}{3}q^6 \right) \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial q} \dot{q} \right) \equiv 0. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Приравняв к нулю коэффициенты при разных степенях $\dot{q}$, получим следующие уравнения Киллинга:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}q\xi + t\eta + \frac{t}{6} \frac{\partial \xi}{\partial t} &= 0, & \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{1}{6}q^6 \frac{\partial \xi}{\partial q} &= 0, \\ \tau + t \frac{\partial \eta}{\partial q} - \frac{t}{2} \frac{\partial \xi}{\partial t} &= 0, & \frac{\partial \xi}{\partial q} &= 0. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Отсюда следует, что преобразование G_1 определяется частным решением этих уравнений:

$$\xi = t, \quad \eta = -q/2 \quad (t^* = te^\varepsilon, \quad q^* = qe^{-1/2\varepsilon}; \quad X = t \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2}q \frac{\partial}{\partial q}), \quad (4.40)$$

а выражение:

$$t^2(tq^6/3 + q\dot{q} + tq^2)/2 = \text{const} \quad (4.41)$$

есть первый интеграл уравнения (4.36).

4.1.2 Применение классического метода С. Ли

Составляем определяющее уравнение для нахождения точечных симметрий уравнения (4.11). Как известно (см., например, (4.5), (4.6)), оно имеет вид

$$\frac{X}{2} F|_{F=0} = 0, \quad (F = y'' + \frac{2}{x}y' + y^5), \quad (4.42)$$

которому соответствует выражение

$$\begin{aligned} & \xi F_x + \eta F_y + [\eta_x + (\eta_y - \xi_x)y' - \xi_y y'^2]F_{y'} + [\eta_{xx} + y'(\eta_{xy} - \xi_{xx}) + \\ & + y'^2(\eta_{yy} - 2\xi_{xy}) - y'^3\xi_{yy} - 3y'y''\xi_y + y''(\eta_y - 2\xi_x)]F_{y''} = 0 \quad (F = 0). \end{aligned}$$

Конкретный вид определяющего уравнения будет таков:

$$\begin{aligned} & -\frac{2}{x^2}\xi y' + 5y^4\eta + \frac{2}{x}\eta_x + \frac{2}{x}(\eta_y - \xi_x)y' - \frac{2}{x}\xi_y y'^2 + \eta_{xx} + y'(\eta_{xy} - \xi_{xx}) + \\ & + y'^2(\eta_{yy} - 2\xi_{xy}) - y'^3\xi_{yy} - 3y'(-\frac{2}{x}y' - y^5)\xi_y - (\frac{2}{x}y' + y^5)(\eta_y - 2\xi_x) = 0. \end{aligned}$$

Приравняв к нулю коэффициенты при y^0 , y' , y'^2 и y'^3 , получим переопределенную систему линейных уравнений с частными производными относительно $\xi(x, y)$ и $\eta(x, y)$:

$$\begin{cases} 5y^4\eta + 2/x\eta_x + \eta_{xx} - (\eta_y - 2\xi_x)y^5 = 0, \\ -2/x^2\xi + 2/x(\eta_y - \xi_x) + \eta_{xy} - \xi_{xx} + 3y^5\xi_y - 2/x(\eta_y - 2\xi_x) = 0, \\ -2/x\xi_y + \eta_{yy} - 2\xi_{xy} + 6/x\xi_y = 0, \\ \xi_{yy} = 0. \end{cases}$$

Рутинные выкладки приводят к следующим выражениям для $\xi(x, y)$ и $\eta(x, y)$: $\xi = b(x)$, $\eta = c(x)y$, где $b(x)$ и $c(x)$ удовлетворяют следующей переопределенной системе линейных ОДУ:

$$\begin{cases} c'' + 2/xc' = 0, \\ 2c + b' = 0, \\ c' = b'' - 2/xb' + 2/x^2b. \end{cases}$$

Первые два уравнения полученной системы дают общие решения $c(x) = c_1 + c_2/x$, $b(x) = -2c_1x - 2c_2 \ln|x| + c_3$, где c_1 , c_2 и c_3 — постоянные интегрирования. Подстановка найденных выражений в третье уравнение системы существенно сужает выбор для решений системы. Находим, что $c(x) = c$, а $b(x) = -2c_1x$. Положив $c_1 = -1/2$, получим, как и ранее, $\xi = x$, $\eta = -1/2y$.

Введем новые переменные, выбрав в качестве независимой переменной инвариант $I(x, y)$ однопараметрической группы, а в качестве зависимой переменной — первый дифференциальный инвариант $J(x, y, y')$. Они находятся из системы ОДУ

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-1/2y} = \frac{dy'}{-3/2y'},$$

соответствующей первому продолжению X_1 генератора X :

$$X_1 = x \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}y \frac{\partial}{\partial y} - \frac{3}{2}y' \frac{\partial}{\partial y'}.$$

Находим $I = \frac{y}{\sqrt{x}}$, $J = \frac{y'}{x^{3/2}}$. Тогда уравнение (4.11) переписывается в виде

$$\frac{dJ}{dI} = \frac{1/2J - I^5}{J + 1/2I}, \text{ или } JdJ - \frac{1}{2}IdJ - \frac{1}{2}JdI + I^5dI = 0.$$

Последнее уравнение легко интегрируется: $J^2 - IJ + I^6/3 = C$, что отвечает выражению для первого интеграла (4.12).

Замечание 4.5. Хотя приведенный пример наглядно демонстрирует высокую эффективность метода автономизации по сравнению с классическими методами С. Ли и Э. Нетер, следует не упускать из виду, что, вообще говоря, границы применимости нашего метода связаны с подалгеброй алгебры Ли, допускаемой исследуемым дифференциальным уравнением и содержащей инфинитезимальные операторы вида $X = a(x)\frac{\partial}{\partial x} + b(x)y\frac{\partial}{\partial y}$ и $X = a(x)\frac{\partial}{\partial x} + (b(x)y + c(x))\frac{\partial}{\partial y}$.

5. Новый метод точной линеаризации

Различные виды точной линеаризации применялись классиками. Так, линеаризация при помощи преобразования зависимой переменной применялась в работах Пенлеве [18], а с помощью преобразования независимой переменной — Зундманом [19] и Чаплыгиным [20, С. 367–384].

За последние 30–35 лет наблюдается взрыв активности в изучении нелинейных явлений. Мотивации такой активности можно найти как в самой

математике, так и в проблемах гидродинамики, физики плазмы, теории элементарных частиц, общей теории относительности, теории солитонов и др. Нелинейные задачи становятся объектами широкого фронта исследований. Наиболее эффективное развитие имеет место в области нахождения точных аналитических решений. При этом возникают различные подходы к их получению. Некоторые из этих подходов связаны с тем или иным преобразованием нелинейных уравнений в линейные. Автором еще в 1979 г. [21] был подробно представлен метод точной линеаризации (МТЛ) для нелинейных автономных уравнений 2-го порядка путем нелинейной замены зависимой и независимой переменных. Независимо от этого в 1984 г. В.П. Маслов с соавторами опубликовал работы [22, 23], в которых к некоторым конкретным нелинейным уравнениям были применены линеаризующие их замены переменных.

Заметим также, что еще ранее некоторые конкретные задачи нелинейной механики с помощью т.н. *метода переменного масштаба* рассмотрел Н.Г. Бондарь [24].

В данном параграфе представлен МТЛ нелинейных неавтономных уравнений n -го порядка, включающий в себя как точечные, так и неточечные преобразования зависимой и независимой переменных. Он характеризуется следующими особенностями: порядок уравнения не меняется, структура исследуемых классов определяется факторизациями через нелинейные дифференциальные операторы первого порядка. Детально исследуются автономные уравнения. Для них найдены явные виды линеаризующих подстановок. Они соответствуют новому принципу нелинейной суперпозиции [25–27].

Рассмотрим уравнение

$$Fy \equiv y^{(n)} - f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = 0. \quad (5.1)$$

Будем применять к нему обратимые преобразования КЛ (3.4) и точной линеаризации

$$y = v(y)z, \quad dt = u(y)dx, \quad u(y(x))v(y(x)) \neq 0, \quad \forall x \in I = \{x \mid a < x < b\}. \quad (5.2)$$

Теорема 5.1. *Для того чтобы уравнение (5.1) композицией преобразований (3.4) и (5.2), а именно преобразованием*

$$y = v_1(x)v_2(y/v_1(x))z, \quad dt = u_1(x)u_2(y/v_1(x))dx \quad (5.3)$$

приводилось к уравнению (4.22'), необходимо и достаточно, чтобы имела место некоммутативная факторизация

$$\prod_{k=n}^1 \left[D - \frac{v'_1}{v_1} - (k-1) \frac{u'_1}{u_1} - \frac{v_2^*}{v_2} Y' - (k-1) \frac{u_2^*}{u_2} Y' - r_k u_1 u_2 \right] y = 0, \quad (5.4)$$

или коммутативная факторизация

$$\prod_{k=1}^n \left[\frac{1}{u_1 u_2} D - \frac{v'_1 v_2 + v_1 v_2^* Y'}{v_1 v_2 u_1 u_2} - r_k \right] y = 0, \quad Y = \frac{y}{v_1}, \quad (') = \frac{d}{dx}, \quad (*) = \frac{d}{dY};$$

при этом диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A} & \xrightarrow{f} & \mathbf{B} \\ \downarrow \varphi & & \downarrow g \\ \mathbf{C} & \xrightarrow{\psi} & \mathbf{D} \end{array}$$

является коммутативной, так как $g \circ f = \psi \circ \varphi$.

Здесь $\mathbf{A}$ обозначает множество уравнений (5.1), (5.4), $\mathbf{B}$ — множество нелинейных автономных уравнений, имеющих факторизованный вид

$$\prod_{k=n}^1 \left[D_s - \frac{v_2^*}{v_2} \frac{dY}{ds} - (k-1) \frac{u_2^*}{u_2} \frac{dY}{ds} - r_k u_2 \right] Y = 0, \quad D_s = \frac{d}{ds};$$

$\mathbf{C}$ представляет множество линейных неавтономных, но приводимых уравнений

$$\prod_{k=n}^1 \left[D_q - \frac{dV_1/dq}{V_1} - (k-1) \frac{dU_1/dq}{U_1} - r_k U_1 \right] p = 0, \quad D_q = \frac{d}{dq},$$

где $v_1(x) = V_1(q(x))$, $u_1(x) = U_1(q(x))$, а $\mathbf{D}$ — множество линейных уравнений с постоянными коэффициентами (4.22').

Преобразования f, g, φ и ψ имеют соответственно вид

$$f: \quad y = v_1(x)Y, \quad ds = u_1(x)dx; \quad g: \quad Y = v_2(Y)z, \quad dt = u_2(Y)ds;$$

$$\varphi: \quad y = v_2(y/v_1)p, \quad dq = u_2(y/v_1)dx; \quad \psi: \quad p = v_1(x)z, \quad dt = u_1(x)dq.$$

Теорема 5.2 [26]. Для того чтобы автономное уравнение

$$y^{(n)} - F(y, y', \dots, y^{(n-1)}) = 0, \quad n > 2 \quad (5.5)$$

преобразованием (5.2) сводилось к линейному уравнению

$$M_n z \equiv z^{(n)}(t) + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} b_k z^{(n-k)}(t) + c = 0, \quad b_k, c = \text{const}, \quad (5.6)$$

необходимо и достаточно, чтобы (5.5) могло быть представлено в форме факторизации

$$\begin{aligned} \prod_{k=n}^1 \left[D - \left(\frac{1}{y} - \left(\ln \int \varphi \frac{n^2 - n + 2}{2n} \exp\left(\int f dy \right) dy \right)^* + (k-1) \frac{\varphi^*}{\varphi} \right) y' - r_k \varphi \right] y + \\ + \frac{c}{\beta} \varphi \frac{n^2 + n - 2}{2n} \exp\left(- \int f dy \right) = 0, \quad (*) = d/dy. \end{aligned} \quad (5.7)$$

При этом имеем линеаризующее преобразование

$$z = \beta \int \varphi \frac{n^2 - n + 2}{2n} \exp\left(\int f(y)dy\right)dy, \quad dt = \varphi(y)dx,$$

$\beta = \text{const} \neq 0$ — нормирующий множитель, а также (при $c = 0$) однопараметрические семейства решений

$$\int \varphi \frac{n^2 - 3n + 2}{2n} \exp\left(\int f dy\right)dy \Big/ \int \varphi \frac{n^2 - n + 2}{2n} \exp\left(\int f dy\right)dy = r_k x + C,$$

где r_k — различные корни характеристического уравнения (4.10'), а C — постоянная интегрирования.

Замечание 5.1. Структура линеаризуемых автономных уравнений.

Линеаризуемые уравнения зависят от двух произвольных функций и n параметров, являющихся коэффициентами линейного уравнения. Они являются алгебраическими относительно входящих в них производных от зависимой переменной. Построение уравнений высших порядков осуществляется на основе рекуррентных соотношений. Порядок нелинейного члена определяется как сумма произведений порядков производных на показатели их степеней. При этом уравнение, принадлежащее к исследуемому классу, представимо в виде алгебраической суммы выражений (с коэффициентами, представленными через зависимую переменную), каждое из которых состоит из всех нелинейных членов одного и того же порядка. Выражение, не зависящее от коэффициентов преобразованного линейного уравнения, имеет порядок, равный порядку уравнения. Все остальные выражения имеют меньший порядок и содержат коэффициенты (параметры) линейного уравнения.

Таким образом, уравнение (5.7) может быть представлено в следующей лексикографической форме

$$\begin{aligned} & \sum_{k_1+2k_2+\dots+nk_n=n} \Psi_{k_1 k_2 \dots k_n}^{12\dots n} y^{(1)k_1} y^{(2)k_2} \dots y^{(n)k_n} + \\ & + \sum_{m=1}^{n-1} \binom{n}{m} b_m \varphi^m \left(\sum_{l_1+2l_2+\dots+(n-m)l_{n-m}=n-m} \Psi_{l_1 l_2 \dots l_{n-m}}^{12\dots n-m} y^{(1)l_1} y^{(2)l_2} \dots y^{(n-m)l_{n-m}} \right) + \\ & + \varphi \frac{n^2 + n - 2}{2n} \exp\left(-\int f dy\right) \left(b_n \int \varphi \frac{n^2 + n - 2}{2n} \exp\left(\int f dy\right)dy + \frac{c}{\beta} \right) = 0, \end{aligned}$$

где коэффициенты Ψ зависят от $f(y)$ и $\varphi(y)$, причем

$$\Psi_{00\dots 1}^{12\dots n} = 1, \quad \Psi_{00\dots 1}^{12\dots n-m} = 1, \quad \Psi_{00\dots 10}^{12\dots n-1n} = n f(y).$$

Теорема 5.3. Для уравнения (5.5), (5.7) (при $c = 0$) ПНС имеет вид

$$z = \int \varphi \frac{n^2 - n + 2}{2n} \exp\left(\int f(y)dy\right)dy = \sum_{k=1}^n c_k z_k(t) + \tilde{z}, \quad dt = \varphi(y)dx, \quad (5.8)$$

где $\tilde{z}(t)$ — частное решение линейного неоднородного уравнения (5.6), а $z_k(t)$, $k = \overline{1, n}$ образуют ФСР однородного уравнения (4.22'), соответствующего (5.6).

Принцип нелинейной суперпозиции (5.8) представлен в параметрической форме.

В последующем предложенный метод реализуется для уравнений 2-го и 3-го порядков.

5.1. Линеаризация автономных уравнений 2-го порядка

Теорема 5.4 [28]⁵. Для того чтобы уравнение

$$y'' + f(y)y'^2 + b_1\varphi(y)y' + \psi(y) = 0, \quad (') = d/dx, \quad b_1 = \text{const}, \quad (5.9)$$

могло быть линеаризовано преобразованием (5.2), т.е. приведено к виду

$$\ddot{z} + b_1\dot{z} + b_0z + c = 0, \quad (\dot{}) = d/dt, \quad b_1, b_0, c = \text{const}, \quad (5.10)$$

необходимо и достаточно, чтобы его можно было представить в форме

$$y'' + fy'^2 + b_1\varphi y' + \varphi \exp\left(-\int f(y)dy\right)\left[b_0 \int \varphi \exp\left(\int f(y)dy\right)dy + \frac{c}{\beta}\right] = 0 \quad (5.11)$$

($\beta = \text{const}$ — нормирующий множитель). При этом преобразование (5.2) примет явный вид

$$z = \beta \int \varphi \exp\left(\int f dy\right) dy, \quad dt = \varphi(y) dx.$$

Специальный случай получается при $\varphi = \exp(-\int f dy)$.

Пусть в уравнении (5.11) $c = 0$. Тогда оно допускает следующие однопараметрические семейства решений:

$$r_k x + C = \int \frac{\exp(\int f dy) dy}{\int \varphi \exp(\int f dy) dy}.$$

Теорема 5.4 служит тестом для точной линеаризации уравнения (5.9).

Пример 5.1. Рассмотрим нелинейный осциллятор:

$$y'' + f(y)y'^2 \pm a^2\psi(y) = 0. \quad (5.12)$$

Преобразованием

$$z = \sqrt{2 \int \psi \exp(2 \int f dy) dy}, \quad dt = z^{-1} \psi \exp\left(\int f dy\right) dx$$

⁵ Следует из теоремы 5.2.

уравнение (5.12) линеаризуется: $\ddot{z} \pm a^2 z = 0$; имеет первые интегралы и однопараметрические семейства решений соответственно

$$y'^2 = a^2(C \mp 2 \int \psi \exp(2 \int f dy) dy) \exp(-2 \int f dy),$$

$$\int \frac{\exp(2 \int f dy) dy}{z} = \pm \sqrt{\mp a^2} x + C.$$

Пример 5.2. Рассмотрим систему Лотка—Вольтерра

$$\begin{cases} y'_1 &= \alpha_1 y_1 + \beta_1 y_1 y_2, \\ y'_2 &= \alpha_2 y_2 + \beta_2 y_1 y_2 \end{cases} \quad (5.13)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ — параметры. Система (5.13) описывает динамику взаимодействия двух биологических популяций. При определенных соотношениях между параметрами получим систему типа "хищник—жертва". От связанной системы (5.13) легко перейти к несвязанной системе

$$\begin{cases} y''_1 - \frac{1}{y_1} y'_1 - (\alpha_2 + \beta_2 y_1) y'_1 + \alpha_1 y_1 (\alpha_2 + \beta_2 y_1) &= 0, \\ y''_2 - \frac{1}{y_2} y'_2 - (\alpha_1 + \beta_1 y_2) y'_2 + \alpha_2 y_2 (\alpha_1 + \beta_1 y_2) &= 0. \end{cases}$$

Линеаризующие преобразования таковы:

$$z_1 = \alpha_2 \ln y_1 + \beta_2 y_1, \quad dt_1 = (\alpha_2 + \beta_2 y_1) dx,$$

$$z_2 = \alpha_1 \ln y_2 + \beta_1 y_2, \quad dt_2 = (\alpha_1 + \beta_1 y_2) dx.$$

В результате получаем линейную систему

$$z''_1(t_1) - z'_1(t_1) + \alpha_1 = 0, \quad z''_2(t_2) - z'_2(t_2) + \alpha_2 = 0.$$

Далее рассмотрим **линеаризацию** одного из важнейших классов динамических систем, так называемого **лиувиллевых систем**. Известно, что для них кинетическая и потенциальная энергии имеют вид

$$T = \frac{1}{2} b(q) \sum_{i=1}^n a_i(q_i) \dot{q}_i^2, \quad U = \frac{1}{b(q)} \sum_{i=1}^n d_i(q_i), \quad \text{где } b(q) = \sum_{i=1}^n b_i(q_i). \quad (5.14)$$

В силу уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i},$$

а также интеграла энергии $T - U = h$ от (5.14) перейдем к системе

$$\ddot{q}_i + \left(\frac{1}{2} \frac{a_i^*}{a_i} \dot{q}_i + \frac{\dot{b}}{b} \right) \dot{q}_i - \frac{1}{b^2 a_i} \frac{d}{dq_i} [b_i(h - d_i)] = 0, \quad (*) = \frac{d}{dq_i}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (5.15)$$

Теорема 5.5. *Лиувиллева система (5.15) линеаризуется преобразованием*

$$Q_i = \sqrt{2(hb_i - d_i)}, \quad ds_i = -a_i^{-1/2} b^{-1} \frac{d}{dq_i} \sqrt{2(hb_i - d_i)} dt$$

в несвязанную систему вида $Q_i''(s_i) - Q_i(s_i) = 0$, $i = \overline{1, n}$.

Обобщением системы (5.15) служит следующая система:

$$y_i'' + (k \frac{f_i^*}{f_i} y_i' + \frac{m}{g} \sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial y_j} y_j') y_i' +$$

$$+ r_{i1} f_i^{-k} g^{-m} \varphi_i y_i' + f_i^{-2k} g^{-2m} \varphi_i (r_{i0} \int \varphi_i dy_i + \frac{c_i}{\beta_i}) = 0, \quad (5.16)$$

где $f_i = f_i(y_i)$; $g = g(y_1, \dots, y_n)$; $\varphi_i = \varphi_i(y_i)$; $(\cdot)' = d/dx$, $k, m, r_{i1}, r_{i0}, c_i, \beta_i = \text{const}$.

Теорема 5.6. *Система (5.16) преобразованиями*

$$z_i = \beta_i \int \varphi_i(y_i) dy_i, \quad dt_i = f_i^{-k}(y_i) g^{-m}(y) \varphi_i(y_i) dx, \quad i = \overline{1, n} \quad (5.17)$$

приводится к линейной несвязанной системе

$$\ddot{z}_i + r_{i1} \dot{z}_i + r_{i0} z_i + c_i = 0, \quad (\dot{\cdot}) = d/ds_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (5.18)$$

5.2. Линеаризация автономных уравнений третьего порядка

Общий вид их следующий:

$$y''' + f_5(y) y' y'' + f_4(y) y'' + f_3(y) y'^3 + f_2(y) y'^2 + f_1(y) y' + f_0(y) = 0. \quad (5.19)$$

Пусть преобразованием (5.3) уравнение (5.19) сводится к виду

$$\ddot{z} + b_2 \dot{z} + b_1 z + b_0 z + c = 0, \quad b_2, b_1, b_0, c = \text{const}. \quad (5.20)$$

Теорема 5.7. *Для того чтобы уравнение (5.19) могло быть линеаризовано преобразованием (5.2), необходимо и достаточно, чтобы (5.19) было представимо в следующем виде:*

$$y''' + f(y) y' y'' + \frac{1}{9} \left(3 \frac{\varphi^{**}}{\varphi} - 5 \frac{\varphi^{*2}}{\varphi^2} - f \frac{\varphi^*}{\varphi} + f^2 + 3 f^* \right) y'^3 + b_2 \varphi y'' + \frac{1}{3} b_2 \varphi (f + \frac{\varphi^*}{\varphi}) y'^2 +$$

$$+ b_1 \varphi^2 y' + \varphi^{5/3} (b_0 \int \varphi^{4/3} \exp(\frac{1}{3} \int f dy) dy + \frac{c}{\beta}) \exp(-\frac{1}{3} \int f dy) = 0. \quad (5.21)$$

Уравнение (5.21) приводится к (5.20) преобразованием

$$z = \beta \int \varphi^{4/3} \exp(\frac{1}{3} \int f dy) dy, \quad dt = \varphi(y) dx.$$

Если $c = 0$, уравнение (5.21) допускает однопараметрические решения

$$r_k x + C = \int \frac{\varphi^{1/3} \exp(1/3 \int f dy) dy}{\int \varphi^{4/3} \exp 1/3 \int f dy dy},$$

где r_k — простые корни характеристического уравнения

$$r^3 + b_2 r^2 + b_1 r + b_0 = 0.$$

Теорема 5.8 служит тестом для точной линеаризации уравнений вида (5.19).

Пример 5.3. В монографии [29, с. 117–119], а также [30, с. 464] вопрос о нахождении инвариантного решения уравнения sin-Gordon $u_{xt} = \sin u$ привел к необходимости исследования ОДУ

$$y''' + 1/2 y^3 = 0. \quad (5.22)$$

Уравнение (5.22) есть специальный случай уравнения (5.21), оно допускает различные факторизации, например,

$$\begin{aligned} (\operatorname{tgy} + \operatorname{ctgy})(y''' + \frac{1}{2}y^3) &= [D - (\frac{1}{y} + 2 \operatorname{tgy} - \operatorname{ctgy})y'] \times \\ &\times [D - (\frac{1}{y} + \frac{1}{2} \operatorname{tgy} - \operatorname{ctgy})y'] [D - (\frac{1}{y} - \operatorname{tgy} - \operatorname{ctgy})y'] y = 0 \end{aligned}$$

и подстановкой $z = \operatorname{tgy}$, $dt = \cos^{-3/2} y dx$ линеаризуется в уравнение

$$\ddot{z} = 0. \quad (5.23)$$

Уравнение (5.22) допускает также комплекснозначные факторизации

$$\pm 2iy(y''' + \frac{1}{2}y^3) \equiv [D - (\frac{1}{y} \pm i)y'] [D - (\frac{1}{y} \mp i)y'] [D - (\frac{1}{y} \mp 2i)y'] y = 0, \quad i = \sqrt{-1},$$

и подстановкой $z = \exp(2iy)$, $dt = \exp(\frac{3}{2}iy)dx$ оно линеаризуется в (5.23).

Пример 5.4. Обобщенное уравнение Эмдена—Фаулера. Рассмотрим одно из возможных обобщений уравнения Эмдена—Фаулера, а именно:

$$y''' + bx^s y^n = 0, \quad n \neq 0; 1. \quad (5.24)$$

Оно имеет элементарные решения

$$y = \rho x^k, \quad k = \frac{s+3}{1-n}, \quad k(k-1)(k-2)\rho + b\rho^n = 0$$

и подстановкой $y = x^{\frac{s+3}{1-n}} z$, $dt = x^{-1} dx$ сводится к автономному уравнению

$$\ddot{z} + (3k-3)\dot{z} + (3k^2 - 6k + 2)\dot{z} + (k^3 - 3k^2 + 2k)z + bz^n = 0.$$

Применяя тесты автономизации и точной линеаризации, получим следующие интегрируемые случаи уравнения (5.24), а именно:

$$y''' + bxy^{-5/2} = 0, \quad (5.25)$$

$$y''' + bx^3y^{-7/2} = 0. \quad (5.26)$$

Композиция преобразований КЛ и точной линеаризации приводит к подстановке

$$z = x^2y^{-1}, \quad dt = xy^{-3/2}dx,$$

которая линеаризует уравнения (5.25) и (5.26) соответственно:

$$\ddot{z} - b = 0, \quad \ddot{z} - bz = 0.$$

Заметим, что асимптотические решения уравнения (5.24) рассмотрены в работах [11, с. 139; 12, р. 150].

Метод точной линеаризации позволяет с новых позиций рассмотреть классический **случай Эйлера—Пуансо** в задаче о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки. Как известно, он описывается системой

$$A\dot{p} - (B - C)qr = 0, \quad B\dot{q} - (C - A)rp = 0, \quad C\dot{r} - (A - B)pq = 0, \quad A, B, C = \text{const}. \quad (5.27)$$

Система (5.27) допускает разделение переменных. Исключая переменные q, r , приходим к следующему уравнению 3-го порядка, где $t \rightarrow x$, $p \rightarrow y$, $(\cdot) \rightarrow (\cdot)'$:

$$y''' - \frac{1}{y}y'y'' + \frac{4(B-A)(C-A)}{BC}y'y^2 = 0. \quad (5.28)$$

Уравнение (5.28) принадлежит к частному случаю класса (5.21). Преобразованием

$$z = y^2, \quad dt = ydx \quad (5.29)$$

уравнение (5.28) линеаризуется: $\ddot{z} + b\dot{z} = 0$, $b = \frac{4(B-A)(C-A)}{BC} > 0$.

Аналогичным образом можно рассмотреть системы гидродинамического типа (СГТ) [31, 32] как системы ОДУ с квадратичными нелинейностями, определенные в n -мерном линейном фазовом пространстве

$$\dot{v}^i = \frac{1}{2}\Gamma_{jk}^i v^j v^k, \quad i, j, k = \overline{1, n},$$

допускающие положительно определенный интеграл энергии $E = 1/2 g_{ik} v^i v^k$ ($\dot{E} = 0$) и сохраняющие фазовый объем (условие Лиувилля $\partial \dot{v}^i / \partial v^i = 0$). СГТ называется система, у которой общие свойства уравнений с точки зрения характера нелинейностей и законов сохранения такие же, как и у изучаемого гидродинамического объекта, но которая имеет конечное число степеней свободы. СГТ естественно возникают при конечномерной аппроксимации уравнений гидродинамики невязкой жидкости по методу Галеркина. В ряде случаев они могут быть преобразованы в линеаризуемые уравнения. Это показано на примере триплета — простейшей СГТ, которая может быть описана уравнениями Эйлера для гироскопа:

$$\dot{u}_1 = pu_2u_3, \quad \dot{u}_2 = qu_3u_1, \quad \dot{u}_3 = ru_1u_2, \quad p + q + r = 0$$

(сложные СГТ являются суперпозицией простейших триплетов).

Система уравнений для триплета сводится к следующей:

$$\ddot{u}_1 - \frac{1}{u_1}\dot{u}_1\ddot{u}_1 - 4qru_1^2\dot{u}_1 = 0, \quad \ddot{u}_2 - \frac{1}{u_2}\dot{u}_2\ddot{u}_2 - 4pru_1^2\dot{u}_2 = 0, \quad \ddot{u}_3 - \frac{1}{u_3}\dot{u}_3\ddot{u}_3 - 4pqu_1^2\dot{u}_3 = 0.$$

Применив преобразования вида

$$u_i^2 = z_i, \quad d\tau_i = u_i dt,$$

придем к следующей системе линейных уравнений:

$$z_1'''(\tau_1) - 4qrz_1'(\tau_1) = 0, \quad z_2'''(\tau_2) - 4rpz_2'(\tau_2) = 0, \quad z_3'''(\tau_3) - 4pqz_3'(\tau_3) = 0.$$

5.3. Другие виды факторизации нелинейных дифференциальных операторов

Предложение 5.1. Уравнение типа Лъенара

$$y'' + a_1(y)y' + a_0(y)y = 0$$

допускает факторизацию вида

$$(D - \alpha_2)(D - \alpha_1)y = 0, \quad \alpha_i = \alpha_i(y), \quad i = 1, 2, \quad D = d/dx,$$

где имеет место следующий аналог формул Виета:

$$a_1 = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_1^*y), \quad a_0 = \alpha_1\alpha_2, \quad (*) = d/dy,$$

причем α_1 удовлетворяет уравнению Абеля 2-го рода

$$y\alpha_1 \frac{d\alpha_1}{dy} + \alpha_1^2 + a_1\alpha_1 + a_0 = 0,$$

а α_2 удовлетворяет уравнению Абеля 1-го рода

$$a_0y \frac{d\alpha_2}{dy} = \alpha_2^3 + a_1\alpha_2^2 + \alpha_2(a_0 + a_0^*y).$$

Замечание 5.2. Напомним, что при факторизации линейного дифференциального оператора 2-го порядка возникают уравнения Риккати (см. [7, лемма 1.1]).

Предложение 5.2. Пусть уравнение (5.5) допускает факторизацию

$$\prod_{k=n}^1 [\gamma_k(y)D - \beta_k(y)y' - \alpha_k(y)]y = 0. \quad (5.30)$$

Для того чтобы она была коммутативной, необходимо и достаточно, чтобы (без ограничения общности) $\gamma_k = \gamma$, $\beta_k = \beta$, $\alpha_k = \alpha + \text{const}$.

В результате факторизация (5.30) примет вид

$$\prod_{k=n}^1 [\gamma(y)D - \beta(y)y' - \alpha(y) - r_k]y = 0. \quad (5.31)$$

Заметим, что к уравнению (5.31) может быть применено преобразование Бэклунда, представленное в виде

$$y = \exp\left(\int \frac{\alpha + \beta y'}{\gamma} dx\right)z, \quad dt = \frac{1}{\gamma} dx, \quad (5.32)$$

или

$$\frac{y'}{y}\left(1 - \frac{\beta}{\gamma}y\right) = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{z'}{z}, \quad dt = \frac{1}{\gamma} dx.$$

Преобразование (5.32) сводит уравнение (5.31) к линейному уравнению с постоянными коэффициентами (3.12). Пусть $\alpha = 0$. Положив $\gamma = 1/u$, $\beta = v^*/(vu)$, получим преобразование точной линеаризации (5.3).

5.4. Некоторые нелинейные уравнения 2-го порядка

Рассмотрим теперь некоторые важные уравнения, которые могут быть различным образом факторизованы и (или) линеаризованы. Начнем с уравнения

$$y'' = Ay^3 + By^2 + Cy + D + (Ey + F)y', \quad A, B, C, D, E, F = \text{const}, \quad (5.33)$$

для которого Миттаг–Леффлер [33] нашел некоторые интегрируемые случаи. При этом им был использован так называемого тест Пенлеве. Автор результаты Миттаг–Леффлера передоказал, а также установил ряд новых случаев интегрируемости; при этом были найдены также однопараметрические семейства элементарных решений.

Теорема 5.6. Уравнение (5.33) допускает следующие интегрируемые случаи:

1. $A = E + 2, E \neq -3, B + AF \neq 0.$
2. $A = E + 2, E \neq -6, B \neq 2F.$
3. $A = 0, E = -2, C = B(B - F).$
4. $E = -4, B \neq 2F, B \neq F, 2D + (B - F)(B - 2F)^2 - C(B - 2F) = 0.$
5. $A = -2, E = -4, B = F, BC + 2D = 0.$
6. $E = -4, A = -2, B = 2F, D = 0.$
7. $A = -1, E = -3, B = F, 27D + 9BC + 2B^3 = 0.$
8. $A = -1, F = B, E = -3.$
9. $E = -6, A = -4, B = 2F, B^3 + 18BC + 216D = 0.$
10. $A = E + 2, F = B, E \neq -2, D(E + 2) = BC.$
11. $E = -2, A = 0, B \neq 2F, 16D + B(B - 2F)^2 = 4C(B - 2F).$
12. $A = C = 0, F = B, E = -2.$
13. $E = 3, F = 0, B = 3a, C = 4a^2, D = b.$
14. $2A = E^2, BE = 3AF, 2AF^2/E^2 + DE/F = C.$
15. $B = D = F = 0.$
16. $E = F = 0.$

Предложение 5.3. Уравнение

$$y'' + b_1y' + b_0y + by^n = 0, \quad (5.34)$$

описывающее ангармонический осциллятор, имеет (в дополнение к случаю $b_1 = 0$) однопараметрическое семейство элементарных решений, когда выполняется условие факторизации

$$(n + 3)^2 b_0 = 2(n + 1)b_1^2.$$

При этом уравнение (5.34) допускает следующую факторизацию:

$$(D - r_2 - k_2 y^{\frac{n-1}{2}})(D - r_2 - k_2 y^{\frac{n-1}{2}})y = 0, \quad D = d/dx,$$

где

$$r_1 = -\frac{2b_1}{n+3}, \quad r_2 = -\frac{n+1}{n+3}b_1, \quad k_1 = \pm \sqrt{-\frac{2b}{n+1}}, \quad k_2 = \mp \sqrt{-\frac{b(n+1)}{2}}.$$

Уравнение (5.34) имеет следующие однопараметрические семейства решений:

$$y = \left(\pm \frac{n+3}{b_1} \sqrt{\frac{-b}{2(n+1)}} + C \exp\left(\frac{b_1(n+1)}{n+3}t\right) \right)^{\frac{2}{1-n}}, \text{ где } C - \text{параметр.}$$

Частный случай ($n = 3$) рассмотрен в [34; 35, с. 283]) с помощью теста Пенлеве.

Пример 5.5. Пусть $n = 2$, $b_0 = 1$, $b_1 = \pm \frac{5}{\sqrt{6}}$, $b = -1$. Уравнение⁶

$$y'' \pm \frac{5}{\sqrt{6}}y' + y - y^2 = 0 \quad (5.35)$$

допускает факторизацию

$$(D \pm \frac{3}{\sqrt{6}} \pm \sqrt{\frac{3}{2}}y^{1/2})(D + \frac{2}{\sqrt{6}} \mp \sqrt{\frac{2}{3}}y^{1/2})y = 0.$$

Предложение 5.4.

1°. Уравнение

$$y'' + yy' + ky^3 = 0 \quad (5.36)$$

при всех k разрешимо в квадратурах, т.к. подстановкой (5.28) оно линеаризуется: $\ddot{z} + \dot{z} + 2kz = 0$.

1°. Для того чтобы уравнение (5.36) интегрировалось в конечном виде через элементарные функции, необходимо и достаточно, чтобы параметр k принимал значения точек числовой последовательности

$$k = \frac{l(l+1)}{2(2l+1)^2}, \quad l \in \mathbb{Z}, \quad k \in \left[0, \frac{1}{8}\right].$$

1°. Для $k \neq 1/9$ уравнение (5.36) допускает двумерную алгебру Ли с генераторами

$$G_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad G_2 = x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y}, \quad [G_1, G_2] = G_1.$$

1°. Для $k = 1/9$ уравнение (5.36) допускает алгебру Ли, изоморфную $sl(3, R)$.

Более общее уравнение

$$y'' + ay' + \frac{1}{2}by^3 = 0, \quad a, b = \text{const} \quad (5.37)$$

возникает в аналитической теории ОДУ при изучении интегралов нелинейных уравнений 2-го порядка (см., например, [36]), а также появляется в ряде вопросов теоретической и математической физики [37–39]. При интегрировании уравнения (5.37) наряду с МТЛ автором был применен критерий П.Л. Чебышева [40, с. 66]. Заметим, что уравнение (5.37) при любых a и b линеаризуется неточечным преобразованием (5.28) в $\ddot{z} + \dot{z} + bz = 0$, тогда как линеаризация точечным преобразованием возможна лишь в случае

⁶ К приводимому ниже уравнению (5.35) мы вернемся в п. 7.

$b = \frac{2}{9}a^2$, а именно подстановкой $t = \frac{1}{3}ax - \frac{1}{y}$, $z = \frac{1}{6}ax^2 - \frac{x}{y}$ оно линейризуется в $\dot{z} = 0$.

Рассмотрим еще следующее уравнение, а именно встречающееся

$$y'' - \gamma y'^2 - \beta y y' - \alpha y' + y - \delta y^2 = 0, \quad (5.38)$$

описывающее движение автоколебательной системы в предположении, что ее характеристики аппроксимируются полиномами степени не выше второй [41].

Применяя методы точной линейаризации и факторизации, были найдены в явном виде первые интегралы и однопараметрические семейства интегральных кривых.

Теорема 5.6. Уравнение (5.38) обладает первыми интегралами и однопараметрическими семействами решений в следующих случаях:

I. Пусть $\gamma \neq 0$:

а) $\gamma = -\beta/\alpha$, $\delta = \gamma$, $\delta \neq 0$, $\alpha \neq 0$; б) $\alpha = 0$, $\delta = -\gamma$; в) $\alpha = \beta = 0$.

II. Пусть $\gamma = 0$, $\beta \neq 0$:

а) $4\delta^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta\delta = 0$; б) $\delta^2 + \beta^2 + \alpha\beta\delta = 0$; в) $\alpha + \beta\delta = 0$.

III. $\gamma = 0$, $\beta = 0$, $\alpha = \pm 5/\sqrt{6}$.

Случай Iв рассмотрел Н.Н. Баутин, а именно им был найден первый интеграл уравнения (5.38) вида

$$\left(\frac{\delta}{\gamma} x^2 + \dot{x}^2 + \frac{\delta - \gamma}{\gamma^2} x + \frac{\delta = \gamma}{2g^3} \right) e^{-2\gamma x} = h,$$

где h – произвольная постоянная.

Случай III соответствует полулинейному уравнению Колмогорова–Петровского–Пискунова–Фишера, рассмотренному в п. 7.

Другой подход к системам с квадратичными нелинейностями, связанный с алгебраическими инвариантами, предложил К.С. Сибирский [42].

Последние два параграфа статьи посвящены применениям изложенных выше методов к нестационарным задачам небесной механики и к некоторым нелинейным эволюционным уравнениям.

6. Исследование нестационарных задач небесной механики: законы изменения массы

Небесная механика всегда служила полигоном для испытания новых математических методов. Однако от теоретического решения небесномеханической задачи до его практического использования порой проходит немало времени. Так, например, решенная еще в XVIII в. Л. Эйлером задача двух неподвижных центров нашла свое применение лишь в начале 60-х гг. XX столетия для приближенного описания движения искусственных спутников сплюснутых планет, если неподвижные центры поместить в мнимые точки [43, 44].

Процесс эволюции звездных систем, в том числе Солнечной системы, на длительных интервалах времени должен изучаться с учетом переменности масс небесных тел. При исследовании нестационарных задач приходится рассматривать два важных вопроса. **Во-первых**, нужно определить функциональную зависимость от времени коэффициентов уравнений движения изучаемой динамической системы. (Переменными являются те коэффициенты уравнений, которые несут ответственность за изменение массы, сопротивление среды и т.д.). **Во-вторых**, нужно проинтегрировать уравнения движения при известных или установленных законах изменения коэффициентов.

При рассмотрении первого вопроса целесообразно исходить из возможности математического преобразования уравнений движения к некоторому другому, заранее заданному, *приведенному* виду в изображающем пространстве-времени. При этом за приведенный вид удобно принимать либо автономный вид, сохраняя при этом порядок уравнений и характер взаимодействия компонентов системы, либо некоторый канонический неавтономный вид. На указанном пути возможно установление **математических** законов изменения коэффициентов. К задаче двух тел переменной массы такой подход впервые применил И.В. Мещерский еще в 1893 г. [45, с. 31–182]. После того, как найдены математические законы, можно поставить вопрос о **физическом** характере найденных законов. Здесь плодотворной представляется следующая фундаментальная концепция: функциональные зависимости, претендующие на роль физических законов, должны оставаться инвариантными относительно группы симметрии данной физической системы.

Затем встает в полном объеме проблема интегрирования уравнений движения. Однако размеры статьи не позволяют уделить этой важной проблеме достаточного внимания. Ей будет посвящена специальная работа. Данный параграф почти целиком посвящен применению метода автономизации к нестационарным задачам. Найдены законы изменения массы в обобщенной нестационарной задаче двух тел, которые представляют собой обобщение известных классических законов Мещерского и Эддингтона–Джинса.

Одной из простейших нестационарных задач является задача двух тел переменной массы — задача Гильдена–Мещерского (ГМ).

Определение 6.1. Под задачей ГМ будем понимать нестационарную задачу 2 тел, уравнение относительного движения которых в плоскости орбиты имеет вид

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\mu(t)\frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad \mathbf{r} = (x, y)^T, \quad |\mathbf{r}| = r, \quad (6.1)$$

и которое преобразованием Нехвила (так называют в небесной механике преобразование КЛ)

$$\mathbf{r} = v(t)\mathbf{R}, \quad d\tau = u(t)dt, \quad \mathbf{R} = (\xi, \eta)^T \quad (6.2)$$

приводится к автономному виду

$$\mathbf{R}'' \pm b_1\mathbf{R}' + b_0\mathbf{R} = -\mu_0\mathbf{R}/R^3, \quad |\mathbf{R}| = R, \quad (') = d/d\tau. \quad (6.3)$$

Уравнение (6.1) соответствует также нестационарной кеплеровой задаче, если принять во внимание гипотезу Дирака о переменности гравитационной постоянной.

Теорема 6.1 [46–48]. *В задаче ГМ законы изменения массы $\mu(t)$ представляют собой решения следующих нелинейных дифференциального и интегродифференциального уравнений:*

$$\ddot{\mu} - 2\frac{\dot{\mu}^2}{\mu} + b_0\mu^5 = 0, \quad (6.4)$$

$$\ddot{\mu} - 2\frac{\dot{\mu}^2}{\mu} + \frac{(b_0 \pm 2b_1^2)\mu^5}{(k \pm 3b_1 \int \mu^2 dt)^2} = 0, \quad b_1 \neq 0, \quad (6.5)$$

и описываются конечными формулами

$$\begin{aligned} \mu_1(t) &= (\alpha_1 t + \beta_1)^{\frac{1}{2} \pm \frac{3b_1}{2\sqrt{\delta_1}}} (\alpha_2 t + \beta_2)^{\frac{1}{2} \mp \frac{3b_1}{2\sqrt{\delta_1}}}, \quad \delta_1 > 0; \\ \mu_2(t) &= (At^2 + Bt + C)^{-1/2} \exp\left(\pm \frac{3b_1}{\sqrt{-\delta_2}} \arctan \frac{2At + B}{\sqrt{-\delta_2}}\right), \quad \delta_2 < 0; \\ \mu_3(t) &= (\alpha t + \beta)^{-1} \exp\left(\mp \frac{3b_1}{2\alpha} \frac{1}{\alpha t + \beta}\right), \quad \delta_3 = 0, \quad \alpha \neq 0; \\ \mu_4(t) &= (\alpha t + \beta)^{\frac{1}{2} \pm \frac{3b_1}{2\alpha}}, \quad \delta_4 = \alpha^2 > 0; \\ \mu_5(t) &= \exp\left(\pm \frac{3b_1}{2} t\right), \quad \delta_5 = 0, \quad \alpha = 0. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Задача ГМ допускает также прямолинейные движения

$$\mathbf{r} = \mu^{-1}(t)\mathbf{R}_0, \quad b_0 = R_0^{-3}, \quad |\mathbf{R}_0| = R_0,$$

инвариантные относительно действия однопараметрической группы с генератором

$$X = u^{-1}\partial_t + (uv)^{-1}\dot{v}(x\partial_x + y\partial_y).$$

Замечание 6.1. Законы изменения массы (6.6) обобщают законы Мещерского

$$\mu = (\alpha t + \beta)^{-1}, \quad \mu = 1/\sqrt{\alpha t + \beta}, \quad \mu = 1/\sqrt{At^2 + Bt + C}$$

и дифференциальный закон Эддингтона—Джинса:

$$\dot{\mu} = -k\mu^\nu, \quad -\infty < \nu < +\infty.$$

В работе [49] дан качественный анализ траекторий движения задачи ГМ при различных предположениях о переменной массе, включающих также и возможность ее периодичности. Как показывают полученные в теореме 6.1 формулы, законы изменения массы естественных небесных тел таковы, что они не могут быть (при вещественных параметрах) ни периодическими, ни колеблющимися функциями времени.

Теорема 6.2 [50]. *Интегрирование задачи (6.1)–(6.4), (6.5) сводится к интегрированию задачи (6.1), где μ изменяется согласно закону Эддингтона–Джинса при ограничениях на показатель ν : $\dot{\mu} = -k\mu^\nu$, $1 < \nu < 3$.*

Редукция к задаче ГМ. Не преуменьшая собственной роли задачи ГМ, основное ее предназначение, как нам представляется, состоит в том, чтобы быть канонической формой для более реалистичных постановок нестационарной задачи двух тел. Так, если уравнение относительного движения имеет вид

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\mu_0 \frac{\mathbf{r}}{r^3} - a\dot{\mathbf{r}}, \quad \mu_0, a = \text{const},$$

то им можно описывать⁷ стационарную задачу движения спутника в поле притяжения Земли-шара под действием сопротивления однородной атмосферы, пропорциональное скорости спутника. А уравнением

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\mu_0 \frac{\mathbf{r}}{r^3} - 2a\dot{\mathbf{r}} - b\mathbf{r}, \quad \mu_0, a, b = \text{const},$$

можно описывать движение спутника бесконечно малой постоянной массы вокруг неподвижного центра переменной массы, окруженного достаточно протяженной гравитирующей средой переменной плотности, которая оказывает сопротивление движению, пропорциональное скорости спутника⁸.

Теорема 6.3. *Для того чтобы ОНЗ двух тел*

$$\ddot{\mathbf{r}} + a_1(t)\dot{\mathbf{r}} + a_0(t)\mathbf{r} = -\mu(t)\mathbf{r}/r^3, \quad \mathbf{r} = (x, y)^T \quad (6.7)$$

преобразованием Нехвила (6.2) приводилась к задаче ГМ вида (6.1), (6.4), (6.5), а именно к $\mathbf{R}'' = -\mu_0(\tau)\mathbf{R}/R^3$, где $\mu_0(\tau)$ удовлетворяет либо уравнению вида (6.4), либо уравнению (6.5) (при $\mu \rightarrow \mu_0$, $(\cdot) \rightarrow (\cdot)$, $t \rightarrow \tau$), необходимо и достаточно, чтобы $\mu(t)$, $a_1(t)$ и $a_0(t)$ удовлетворяли уравнениям:

$$\ddot{\mu} - 2\frac{\dot{\mu}^2}{\mu} - 3a_1\dot{\mu} - (a_0 + 2a_1^2 - 2\dot{a}_1)\mu + b_0\mu^5 \exp(6 \int a_1 dt) = 0, \quad (6.8)$$

$$\ddot{\mu} - 2\frac{\dot{\mu}^2}{\mu} - 3a_1\dot{\mu} - (a_0 + 2a_1^2 - 2\dot{a}_1)\mu + \frac{(b_0 + 2b_1^2)\mu^5 \exp(6 \int a_1 dt)}{(k \pm 3b_1 \int \exp(3 \int a_1 dt)\mu^2 dt)^2} = 0. \quad (6.9)$$

Теорема 6.4. *Интегрирование задачи (6.7)–(6.9) сводится к интегрированию задачи (6.7), где $\mu(t)$ подчиняется закону*

$$\dot{\mu} = -(2a_1 + \frac{\dot{x}_1}{x_1})\mu + k \exp((2\nu - 3) \int a_1 dt) x_1^{\nu-3} \mu^\nu, \quad (6.10)$$

⁷ См. Nita M.M. Teoria zborului spatial, Bucuresti, Ed. Acad. rep. soc. Romania, 1973.

⁸ Астрономические аспекты последней задачи см. в: Радзиевский В.В. Задачи фотогравитационной небесной механики. Небесная механика излучающих тел: Дис. д-ра физ.-мат. наук Л.: Гос. астрон. обсерватория, 1954.

$$-\infty < \nu < +\infty, \quad (6.11)$$

a $k = -\alpha/(1 - \nu)$, если $\nu \neq 1$ и $k = \mp \frac{3}{2}b_1$, если $\nu = 1$.

Теорема 6.5. Интегрирование задачи (6.7), (6.10), (6.11) сводится к интегрированию задачи (6.7), где $\mu(t)$ подчиняется закону (6.10), $1 < \nu < 3$.

Замечание 6.2. Полученные автором результаты по задаче ГМ и методу автономизации нашли широкое применение⁹. Возможности метода автономизации не ограничиваются применениями к ОНЗ двух тел с законом Ньютона как законом гравитации. Открыты перспективы для исследования нестационарных задач небесной механики самого общего вида как двух, так и n тел, учитывающих не только переменность масс небесных тел, но и весьма произвольные силы взаимодействия между ними и со средой. Разумеется, подобные перспективы открываются и для рассмотрения обобщенных стационарных задач. На важность таких постановок задач указывал Г.Н. Дубошин [51]. Систематическое применение метода преобразований к нестационарным задачам впервые было дано автором и Б.Е. Гельфгатом [52], а в настоящее время продолжено автором [53].

7. Прямые методы нахождения инвариантных решений эволюционных уравнений

Для нахождения инвариантных решений (типа бегущей волны) и автономных решений нелинейных эволюционных уравнений (НЭУ) в настоящее время применяются различные методы: метод обратной задачи рассеяния, или метод L–A пар Лакса, алгебро-геометрический метод, а также так называемого прямой метод Хироты и ряд других методов [54–56]. Поскольку эволюционные уравнения при этом приводятся к ОДУ, то для нахождения точных решений были сделаны успешные попытки применения теста Ковалевской–Пенлеве. В данной работе автор применил групповой анализ ОДУ в сочетании с такими методами преобразований, как методы автономизации и точной линеаризации, а также методами факторизации линейных и нелинейных дифференциальных операторов.

Уравнением Колмогорова–Петровского–Пискунова (КПП) называется нелинейное уравнение диффузии вида

$$u_t = ku_{xx} + F(u), \quad k = \text{const}, \quad (7.1)$$

где нелинейная функция $F(u)$ удовлетворяет условиям

$$F(0) = F(1) = 0, \quad F'(0) = \alpha > 0, \quad F'(u) < \alpha, \quad 0 < u < 1, \quad (') = d/du.$$

Оно исследовалось в работе [57] в связи с задачей нахождения инвариантных решений типа **бегущей волны** $u(x, t) = u(\tau)$, $\tau = ax + bt$.

Рассмотрим **групповые свойства полулинейного уравнения КПП**. Находятся точечные симметрии полулинейного ОДУ, соответствующего

⁹ Беков А.А. Нестационарные задачи небесной механики: Автореферат дис. д-ра физ.-мат. наук, М.: Изд-во МГУ; ГАИШ, 1995.

(7.1) и представленного в виде

$$y'' + b_1 y' + \Phi(y) = 0. \quad (7.2)$$

Теорема 7.1 [58–60]. Для того чтобы уравнение (7.2) допускало точечную симметрию $X \neq \frac{\partial}{\partial x}$, необходимо и достаточно, чтобы $\Phi(y)$ и X приняли один из следующих видов соответственно:

- 1) $\Phi(y) = b_0 F(y) = r_1 r_2 \left[y^* + \frac{s}{r_1 r_2} y^{*(2r_2 - r_1)/r_1} \right]$, $X = e^{(r_1 - r_2)x} \left[\frac{\partial}{\partial x} + r_1 y^* \frac{\partial}{\partial y} \right]$;
- 2) $\Phi(y) = b_0 F(y) = r_1 r_2 \left[y^* + \frac{s}{r_1 r_2} y^{*(2r_1 - r_2)/r_2} \right]$, $X = e^{(r_2 - r_1)x} \left[\frac{\partial}{\partial x} + r_2 y^* \frac{\partial}{\partial y} \right]$, где $y^* = y + q/(r_1 r_2)$;
- 3) $\Phi(y) = q + s \exp(2b_1^2 y/q)$, $q \neq 0$, $X = e^{b_1 x} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{q}{b_1} \frac{\partial}{\partial y} \right)$, $b_0 = 0$, $b_1 \neq 0$;
- 4) $\Phi(y) = s(y + q)^{-1}$, $X = e^{-b_1 x} \left(\frac{\partial}{\partial x} - b_1(y + q) \frac{\partial}{\partial y} \right)$;
- 5) $\Phi(y) = b_0 F(y) = b_0 \left[\left(y + \frac{q}{b_0} \right) + \frac{s}{b_0} \left(y + \frac{q}{b_0} \right)^{-3} \right]$, $b_1 = 0$, $b_0 \neq 0$,

$$X_{1,3} = \exp(\mp 2 \sqrt{-b_0} x) \left[\frac{\partial}{\partial x} + \left(\mp \frac{q}{\sqrt{-b_0}} \mp \sqrt{-b_0} y \right) \frac{\partial}{\partial y} \right];$$

$$6) \Phi(y) = b_0 y + \frac{1}{4k} \left(b_0^2 - \frac{36}{625} b_1^4 \right) + ky^2,$$

$$X = \exp\left(\frac{b_1}{5} x\right) \left\{ \frac{\partial}{\partial x} - \left[\frac{2}{5} b_1 y - \frac{1}{5k} b_1 \left(b_0 - \frac{6}{25} b_1^2 \right) \right] \frac{\partial}{\partial y} \right\},$$

где r_1 и r_2 удовлетворяют уравнению $r^2 + b_1 r + b_0 = 0$.

Заметим, что в случаях 1) – 4) и 6), если обозначить генератор трансляции через $X_2 = \frac{\partial}{\partial x}$, а другой допускаемый генератор — через X_1 , то получим двумерные алгебры Ли соответственно с коммутаторами:

- 1) $[X_1, X_2] = (r_2 - r_1)X_1$;
- 2) $[X_1, X_2] = (r_1 - r_2)X_1$;
- 3) $[X_1, X_2] = -b_1 X_1$;
- 4) $[X_1, X_2] = b_1 X_1$; 6) $[X_1, X_2] = -\frac{1}{5} b_1 X_1$.
- 5) $[X_1, X_2] = 2 \sqrt{-b_0} X_1$; $[X_2, X_3] = 2 \sqrt{-b_0} X_3$; $[X_3, X_1] = -4 \sqrt{-b_0} X_2$ (тип $G_3 VIII$ по классификации Бианки—Ли) — уравнение типа Ермакова.

Получены точные решения уравнения (7.2) для найденных законов изменения $\Phi(y)$ (см. [58–60]).

Рассмотрим уравнение **Колмогорова—Петровского—Пискунова—Фишера**

$$u_t = u_{xx} + u(1 - u).$$

Будем искать *стационарные решения* типа *бегущей волны* $u(x, t) = y(x - bt)$. Соответствующее полулинейное уравнение примет вид

$$y'' + by' + y - y^2 = 0. \quad (7.3)$$

В работе [61] были найдены элементарные решения уравнения (7.3) при $b = \pm 5/\sqrt{6} \approx \pm 2,04$: $y = (1 + c \exp(\pm 1/\sqrt{6}x))^{-2}$, $c = \text{const}$. До последнего времени считалось, что других элементарных решений нет. Автор нашел, что при $b = \pm \frac{5}{\sqrt{6}}i$, $i = \sqrt{-1}$, имеются комплексные решения $y = 1 - (1 + c \exp(\pm i/\sqrt{6}x))^{-2}$. Обобщением (7.3) является уравнение

$$y'' + b_1 y' + b_0 y + \frac{1}{4k} \left(b_0^2 - \frac{36}{625} b_1^4 \right) + ky^2 = 0,$$

которое имеет следующие однопараметрические семейства решений:

$$y = -\frac{1}{2k} \left(b_0 - \frac{6}{25} b_1^2 \right) + \left(\pm \frac{5}{b_1} \sqrt{-\frac{k}{6}} + c \exp\left(\frac{b_1}{5}x\right) \right)^{-2}.$$

Теорема 7.2.

1°. Решение краевой задачи для уравнения КПП

$$u_t - u_{xx} - \left(u - u \frac{2r_2 - r_1}{r_1} \right) = 0, \quad r_1 < r_2; \quad u|_{x \rightarrow -\infty} \rightarrow 0, \quad u|_{x \rightarrow +\infty} \rightarrow 1, \quad 0 < u < 1,$$

имеет вид $u(x, t) = u(\tau) = (1 + c \exp(r_1 - r_2)\tau)^{\frac{r_1}{r_1 - r_2}}$, где $\tau = ax + bt$, $a^2 = 1/(r_1 r_2)$, $b = (r_1 + r_2)/(r_1 r_2)$;

2°. Решение краевой задачи $u_t + u_{xx} - (u - u^2) = 0$, $u|_{x \rightarrow -\infty} \rightarrow 1$, $u|_{x \rightarrow +\infty} \rightarrow 0$, $0 \leq u \leq 1$, имеет вид (при $\tau = ax + bt$)

$$u(\tau) = \frac{1 + 2c \exp(-b_1/5\tau)}{(1 + c \exp(-b_1/5\tau))^2}, \quad \text{где } b/a^2 = b_1, \quad 1/a^2 = 6/25b_1^2.$$

Получены также комплексные решения для уравнения Фишера.

Эта теорема усиливает соответствующие результаты, содержащиеся в монографии [62] и полученные более громоздким путем с помощью метода Хироты. Она также дополняет результаты работы [61].

Отметим, что в работе [63] установлена связь между важными уравнениями естествознания: уравнением КПП и уравнением Эмдена—Фаулера.

Для нахождения инвариантных решений может быть применен также метод факторизации.

Теорема 7.3. Эталонное ОДУ $a^2(\psi(u)u_\tau)_\tau + a\varphi(u)u_\tau - bu_\tau + f(u) = 0$ преобразованием $\theta = u$, $d\xi = 1/\psi(u)d\tau$ приводится к уравнению Лъенара

$$\theta_{\xi\xi} + (a^{-1}\varphi(\theta) - ba^{-2})\theta_\xi + a^{-2}f(\theta)\psi(\theta) = 0.$$

Теорема 7.4. Полулинейное уравнение КПП

$$u''(\tau) - (r_1 + r_2)u'(\tau) + r_1 r_2 u - r_1 r_2 u^{\frac{2r_2 - r_1}{r_1}} = 0, \quad 0 < r_1 < r_2, \quad (7.4)$$

допускает факторизацию $\left(D - r_2 \mp r_2 u^{\frac{r_2 - r_1}{r_1}} \right) \left(D - r_1 \pm r_1 u^{\frac{r_2 - r_1}{r_1}} \right) u = 0$.

Теорема 7.5. Полулинейное уравнение КПП (7.4), а также логистические уравнения $u'(\tau) - r_1 u \pm r_1 u^{\frac{r_2}{r_1}} = 0$ инвариантны относительно преобразования КЛ вида

$$u = (1 + c \exp(r_1 - r_2)\tau)^{\frac{r_1}{r_1 - r_2}} z, \quad d\xi = (1 + c \exp(r_1 - r_2)\tau)^{-1} d\tau.$$

Полулинейное уравнение КПП может быть интерпретировано как нелинейный вариант уравнения (типа Ермакова) для множителя преобразования КЛ.

Теорема 7.6. Множитель $f(\tau)$ ПКЛ $u(\tau) = f(\tau)z$, $d\xi = h(\tau)d\tau$ удовлетворяет полулинейному уравнению КПП (7.4).

Существует связь между полуэмпирическими уравнениями Семенова и Зельдовича, играющими важную роль в теории цепных реакций и теории горения и взрыва, с одной стороны, и уравнением КПП, с другой.

Уравнение Семенова принадлежит к типу (7.1), где

$$F(0) = F(1) = 0, \quad F(a_1) = 0, \quad F'(0) < 0, \quad F'(1) < 0, \quad F'(a_1) > 0, \quad 0 < a_1 < 1,$$

причем $F(u) = -pu^3 + (p + q)u^2 - qu$, ($p > q > 0$, $a_1 = q$ или p).

Уравнение Зельдовича принадлежит к типу (7.1), где $F(0) = F(1) = 0$, $F'(0) = 0$, $F'(1) < 0$, причем $F(u) = u^\nu(1 - u)$, $\nu > 1$.

Пусть полулинейные уравнения Семенова, Зельдовича, КПП, а также логистическое уравнение имеют следующий вид

$$f_{\text{sem}}(u) \equiv u_{\tau\tau} + (1 - \frac{2q}{p})u_\tau - 2u^3 + 2(1 + \frac{q}{p})u^2 - \frac{2q}{p}u = 0, \quad (7.5)$$

$$f_{\text{zeld}} \equiv u_{\tau\tau} + u_\tau + 2u^2(1 - u) = 0, \quad (7.6)$$

$$f_{\text{kpp}}(u) \equiv u_{\tau\tau} - 3u_\tau + 2u(1 - u^2) = 0, \quad \varphi_{\log}(u) \equiv u_\tau + u^2 - u = 0, \quad u_\tau = \partial u / \partial \tau.$$

Теорема 7.7. Имеют место следующие представления:

$$f_{\text{sem}}(u) = -f_{\text{kpp}}(1 - u) - \left(4 - \frac{2q}{p}\right)\varphi_{\log}(1 - u),$$

$$f_{\text{zeld}}(u) = -f_{\text{kpp}}(1 - u) - 4\varphi_{\log}(1 - u),$$

соответствующие факторизациям

$$f_{\text{sem}}(u) \equiv (D + 2u - 2q/p)(D + 1 - u)u = 0,$$

$$f_{\text{zeld}} \equiv (D + 2u)(D + 1 - u)u = 0,$$

откуда следует, что уравнения (7.5) и (7.6) обладают одним и тем же однопараметрическим семейством решений

$$u(\tau) = c/(c + e^\tau), \quad \text{где } c - \text{постоянная интегрирования.}$$

7.1 Квазилинейное параболическое уравнение

Рассмотрим уравнение

$$u_t = (u^\sigma u_x)_x + u^{\sigma+1}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Иным путем, чем в монографии [64], можно построить класс автомодельных решений, характеризующий локализацию процесса горения. При этом одновременно провести точную линеаризацию нелинейного ОДУ, описывающего указанное автомодельное решение. В цитированной работе найдено следующее автомодельное неограниченное решение $u(t, x) = (T_0 - t)^{-1/\sigma} y(x)$, $0 < t < T_0 < \infty$, $x \in \mathbf{R}$, где $y(x)$ — определенное частное решение уравнения

$$y'' + \frac{\sigma}{y} y'^2 + y - \frac{1}{\sigma} y^{1-\sigma} = 0 \quad (\sigma \neq 0, \sigma \neq -1, \sigma \neq -2). \quad (7.7)$$

Теорема 7.8. Для уравнения (7.7) справедливы утверждения:

1) преобразованием

$$Y = y^{\sigma+1} \sqrt{-\frac{2}{\sigma(\sigma+2)} y^{-\sigma} + \frac{1}{\sigma+1}}, \quad dt = \frac{1 - \frac{1}{\sigma} y^{-\sigma}}{\sqrt{-\frac{2}{\sigma(\sigma+2)} y^{-\sigma} + \frac{1}{\sigma+1}}} dx$$

оно линеаризуется:

$$\ddot{Y} + Y = 0, \quad (\dot{}) = d/dt, \quad (7.8)$$

2) обладает первыми интегралами:

$$y'^2 = a^2 \left[C y^{-2\sigma} - y^2 \left(-\frac{2}{\sigma(\sigma+2)} y^{-\sigma} + \frac{1}{\sigma+1} \right) \right],$$

и, кроме того,

3) имеет однопараметрические семейства решений:

$$y^{-\sigma} = \frac{2\sigma(\sigma+2)}{\sigma+1} \frac{\exp\left(\frac{i\sigma}{\sqrt{\sigma+1}} x\right)}{\left(1 + c \exp\left(\frac{i\sigma}{\sqrt{\sigma+1}} x\right)\right)^2} \quad (\sigma \neq 0, \sigma < -1, \sigma \neq -2), \text{ или при } c = 1$$

$$y = \left[\frac{2(\sigma+1)}{\sigma(\sigma+2)} \right]^{1/\sigma} \begin{cases} \left(\cos^2 \left(\frac{\sigma}{2\sqrt{\sigma+1}} x + c^* \right) \right)^{1/\sigma}, & \sigma > -1, \sigma \neq 0, \\ \left(\cosh^2 \left(\frac{\sigma}{2\sqrt{-\sigma-1}} x + c^* \right) \right)^{1/\sigma}, & \sigma < -1, \sigma \neq -2, \end{cases}$$

4) особые случаи получаются при $\sigma = -1$ и $\sigma = -2$:

а) $\sigma = -1$, уравнение $y'' - 1/yy'^2 + y - y^2 = 0$ преобразованием $Y = \sqrt{2} \sqrt{\ln y + y}$, $dt = (1 + y)/\sqrt{\ln y + y} dx$ приводится к линейному виду (7.8) и имеет первые интегралы $y'^2 = [c - 2(\ln y + y)]y^2$;

б) $\sigma = -2$, уравнение $y'' - 2/yy'^2 + y + 1/2y^3 = 0$ преобразованием $Y = \sqrt{y^2 \ln y - 1/y}$, $dt = (1 + 1/2y^2)/\sqrt{y^2 \ln y - 1/y} dx$ приводится к виду (7.11) и имеет первые интегралы $y'^2 = [cy^2 - (y^2 \ln y - 1)]y^2$.

7.2. Новый класс нелинейных эволюционных уравнений

Построим новый класс нелинейных эволюционных уравнений (НЭУ) n -го порядка, зависящий от двух произвольных функций и n параметров, для решений которого справедлив соответствующий нелинейный принцип суперпозиции (НПС). Построение осуществляется на основе метода точной линеаризации ОДУ. Оказалось, что полученный класс НЭУ связан с идемпотентным анализом (см., например, [65]).

Теорема 7.9 [65, 66]. *Для того чтобы НЭУ*

$$\frac{\partial y}{\partial t} = F\left(y, \frac{\partial y}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^n y}{\partial x^n}\right) \quad (7.9)$$

приводилось к ЛЭУ

$$\frac{\partial z}{\partial \tau} = \frac{\partial^n z}{\partial s^n} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} b_k \frac{\partial^{n-k} z}{\partial s^{n-k}}, \quad b_k = \text{const}, \quad (7.10)$$

подстановкой

$$y = v(y)z, \quad (7.11)$$

необходимо и достаточно, чтобы (7.9) могло быть представлено в виде уравнения

$$\frac{\exp(\int f dy) y}{\int \exp(\int f dy) dy} \frac{\partial y}{\partial t} = \prod_{k=n}^1 \left[\frac{\partial}{\partial x} - \left(\frac{1}{y} - \frac{\exp(\int f dy)}{\int \exp(\int f dy) dy} + \right) \frac{\partial y}{\partial x} - r_k \right] u,$$

где r_k , $k = \overline{1, n}$ — корни характеристического уравнения (4.10'), или в лексикографической форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial t} = & \frac{\partial^n y}{\partial x^n} + n f(y) \frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} \frac{\partial y}{\partial x} + \dots + n b_1 \frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} + \dots + \\ & + b_n \exp\left(-\int f dy\right) \int \exp\left(\int f dy\right) dy. \end{aligned} \quad (7.12)$$

При этом линеаризующая подстановка (7.11) имеет вид $z = \beta \int \exp(\int f dy) dy$.

Для уравнения (7.9), (7.12) справедлив ПНС

$$\int \exp\left(\int f dy\right) dy = \sum_{k=1}^n c_k z_k(t, x),$$

где c_k — произвольные постоянные, а $z_k(t, x)$ — линейно независимые частные решения ЛЭУ (7.10).

Например, общий вид НЭУ порядка $n = 2$, принадлежащий к классу (7.9), (7.12), имеет вид

$$y_t = y_{xx} + f y_x^2 + 2b_1 y_x + b_2 \exp\left(-\int f dy\right) \int \exp\left(\int f dy\right) dy.$$

Пример 7.1¹⁰. Уравнение

$$y_t = \frac{h}{2}y_{xx} - \frac{1}{2}y_x^2 \quad (7.13)$$

преобразованием $z = \exp(-y/h)$ приводится к ЛЭУ $z_t = -hz_{xx}$. Пусть $z_1(t, x)$, $z_2(t, x)$ — его линейно независимые решения. Тогда полный интеграл ЛЭУ $z = c_1z_1 + c_2z_2$, где c_1, c_2 — произвольные постоянные, есть *линейный принцип суперпозиции* (ЛПС), а формула

$$y = -h \ln \left[\exp \left(-\frac{1}{h}y_1 - \frac{\lambda_1}{h} \right) + \exp \left(-\frac{1}{h}y_2 - \frac{\lambda_2}{h} \right) \right]$$

есть ПНС для (7.13), где λ_1, λ_2 — произвольные постоянные, $y_1(x, t)$, $y_2(x, t)$ — частные решения, а $y(x, t)$ есть полный интеграл (7.13).

Уравнение (7.13) есть так называемого проинтегрированный вариант уравнения Бюргерса $u_t + uu_x = h/2u_{xx}$.

Общий вид НЭУ порядка $n = 3$, принадлежащий к классу (7.9), (7.11), есть

$$y_t = y_{xxx} + 3fy_xy_{xx} + (f^2 + f_y)y_x^3 + \\ + 3b_1[y_{xx} + fy_x^2] + 3b_2y_x + b_3 \exp \left(- \int f dy \right) \int \exp \left(\int f dy \right) dy.$$

Примечание 7.1. В идемпотентном анализе принцип соответствия (в смысле Маслова) является НПС.

При нахождении решений НЭУ типа бегущей волны могут получаться ОДУ, относящиеся к классу линеаризуемых уравнений.

Теорема 7.10. Для того чтобы НЭУ (7.9) допускало решение типа бегущей волны $y(\tau) = y(x - b\tau)$ и при этом соответствующее ОДУ линеаризующим преобразованием $y = v(y)z$, $ds = u(y)d\tau$ приводилось к уравнению

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_k z^{(n-k)}(s) + bz'(s) = 0, \quad b_0 = 1, \quad (') = d/ds, \quad (7.14)$$

необходимо и достаточно, чтобы (7.9) было представимо в виде

$$\frac{3n^2 - 3n + 2}{\varphi} \frac{2n}{n^2 - n + 2} \frac{\exp(\int f dy) y \partial y}{2n \exp(\int f dy) dy} \frac{\partial y}{\partial t} = \\ = \prod_{k=n}^1 \left[\frac{\partial}{\partial x} - \left(\frac{1}{y} - \frac{\exp(\int f dy)}{\int \exp(\int f dy) dy} + \frac{\varphi^*}{\varphi} \right) \frac{\partial y}{\partial x} - r_k \varphi \right] u, \quad (7.15)$$

где r_k , $k = \overline{1, n}$ — корни характеристического уравнения (4.10'). При этом линеаризующая подстановка имеет вид

$$z = \beta \int \varphi \frac{n^2 - n + 2}{2n} \exp \left(\int f dy \right) dy, \quad ds = \varphi d\tau.$$

¹⁰ Встречается в работах В.П. Маслова и его соавторов.

Общий вид НЭУ 2-го порядка, для которого выполняются условия теоремы 7.10, следующий:

$$\varphi y_t = y_{xx} + f y_x^2 + 2b_1 \varphi y_x + b_2 \varphi \exp\left(-\int f dy\right) \int \varphi \exp\left(\int f dy\right) dy.$$

А общий вид НЭУ порядка $n = 3$, принадлежащий к классу (7.9), (7.15), имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi^2 y_t = & y_{xxx} + 3f y_x y_{xx} + \left(\frac{1}{3} \frac{\varphi_{yy}}{\varphi} - \frac{5}{9} \frac{\varphi_y^2}{\varphi^2} - \frac{1}{3} f \frac{\varphi_y}{\varphi} + f^2 + f_y \right) y_x^3 + \\ & + 3b_1 \varphi \left[y_{xx} + \left(f + \frac{1}{3} \frac{\varphi_y}{\varphi} \right) y_x^2 \right] + 3b_2 \varphi^2 y_x + \\ & + b_3 \varphi^{5/3} \exp\left(-\int f dy\right) \int \varphi^{4/3} \exp\left(\int f dy\right) dy. \end{aligned}$$

Теорема 7.11. Нелинейный принцип суперпозиции.

Пусть $z_1(s), \dots, z_n(s)$ — частные линейно независимые решения уравнения (7.14). Тогда общий интеграл (7.14) (зависящий от произвольных постоянных) есть $z = c_1 z_1(s) + \dots + c_n z_n(s)$, где $c_1, \dots, c_n$ — произвольные постоянные, и эта формула есть ЛПС. Мы получим НПС для (7.9), (7.15) согласно формулам

$$z = \beta \int \varphi^{\frac{n^2-n+2}{2n}} \exp\left(\int f dy\right) dy = \sum_{k=1}^n c_k z_k(s), \quad ds = \varphi d\tau, \tau = x - bt.$$

Заключение

Подведем некоторые итоги проделанной работы, открывающие перспективы дальнейших исследований.

На протяжении всей работы широко использовался метод факторизации дифференциальных операторов, развитый автором в конструктивном духе. Факторизации линейных дифференциальных операторов проводятся не только в основном дифференциальном поле, но и в его алгебраическом и трансцендентном расширениях. Открытие факторизации нелинейных дифференциальных операторов уже начало приносить свои плоды. В результате дифференциальная алгебра дифференциальных операторов получила стимул для последующего развития.

Удалось значительно продвинуть теорию интегрируемости линейных ОДУ, особенно высших порядков, благодаря установлению канонических форм, а также эквивалентности различных классов уравнений. Получены

признаки интегрируемости, как необходимые, так и достаточные. Само понятие интегрируемости в конечном виде было расширено благодаря включению в него не только элементарных функций и решений в квадратурах, но и решений в терминах наперед заданного эталонного уравнения.

Классический метод точечных симметрий С. Ли расширил область своего применения благодаря тому, что компоненты инфинитезимальных операторов могут быть выражены через решения присоединенного уравнения. А благодаря использованию метода автономизации во многих важных случаях удается сделать процесс нахождения симметрий гораздо более эффективным.

Новый метод точной линеаризации, позволивший сводить нелинейные уравнения к линейным, привел к обобщению классического (хотя и мало известного) принципа нелинейной суперпозиции.

Развитие указанных выше методов в направлении их алгоритмизации, доведенное до их программной реализации с помощью систем компьютерной алгебры, представляет собой актуальную задачу.

Проделанная работа позволяет рассматривать немало задач механики и физики: здесь и теория колебаний, и механика твердого тела, и системы гидродинамического типа, и нестационарные задачи небесной механики, и уравнения нелинейной диффузии, и описание "режимов с обострением" и др. Не приходится сомневаться, что дальнейшая разработка указанных методов позволит пролить новый свет как на уже решенные, так и на нерешенные пока задачи естествознания.

И последнее: дальнейшая разработка и успешное применение развиваемой теории требуют совместного применения *факторизации и преобразований*.

Литература

- [1] Беркович Л.М. Факторизация и преобразования дифференциальных уравнений. Методы и приложения. Москва: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2002. 463 с.
- [2] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 400 с.
- [3] Ибрагимов Н.Х. Групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений и принцип инвариантности в математической физике// Успехи матем. наук. 1992. Т. 47, № 4. С. 83–144.
- [4] Berkovich L.M. Transformations and factorization of ordinary nonlinear differential equations// EQUADIFF 5, Bratislava, 1981, Teubner-Texte zur Math., Leipzig, 1982. Т. 47, P. 41-44.

- [5] Berkovich L.M. The integration of ordinary differential equations: factorization and transformations// Mathematics and Computers in Simulations. 2001. V. 57. No. 3–5. P. 175–195.
- [6] Halphen G.-H. Mémoire sur la réduction des équations linéaires différentielles aux formes intégrables// Mémoires presents par divers savants à l'Acad. des Sci. de l'inst. mat. de France., 1884. T. 23. No. 1, 301 p.
- [7] Беркович Л.М. Факторизация, преобразования и интегрируемость обыкновенных дифференциальных уравнений. 1. Линейные уравнения// Вестник СамГУ — Естественнонаучная серия, 2003. С. 3–42.
- [8] Фуцич В.И., Штеленъ В.М., Серов Н.И. Симметричный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики. Киев: Наукова думка, 1989. 334 с.
- [9] Беркович Л.М. Уравнение Эмдена—Фаулера и его обобщения: групповой анализ и точные решения// Материалы междунар. конф. "Чебышевские чтения", посв. 175-летию со дня рождения П.Л. Чебышева. Т. 1. Изд-во МГУ, 1996. С. 57–62.
- [10] Berkovich L.M. The generalized Emden-Fowler equation// Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics, 1997. T. 1. P. 155–163.
- [11] Брюно А.Д. Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. М.: Наука; Физматлит, 1998. 288 с.
- [12] Bruno A.D. Power geometry in algebraic and differential equations. Amsterdam: Elsevier, 2000. 385 p.
- [13] Athorne C. Geometry of Ermakov systems// Nonlinear Evolution Equations and Dynamical Systems (NEEDS'90), Proc. of the 6th Intern. Workshop, Dubna, USSR. P. 100–103.
- [14] Бабич В.М., Булдырев В.С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. Метод эталонных задач. М.: Наука, 1972. 456 с.
- [15] Perelomov A.M. The simple relation between certain dynamical systems// Comm. Math. Phys., 1987. T. 63. P. 9–11.
- [16] Berkovich L.M. Classification of n^{th} order ordinary differential equations with power nonlinearity// Актуальные проблемы математики. Математические модели современного естествознания. Уфа, 2002. С. 174–184.
- [17] Галиуллин А.С. Аналитическая динамика. М.: Высшая школа, 1989. 264 с.

- [18] Painlevé P. Sur les équations différentielles du second ordre et d'ordre supérieure dont l'intégrale générale est uniforme// Acta Math., 1902. V. 25. P. 1–85.
- [19] Sundman K.E. Mémoire sur le problème des trois corps //Acta Math., 1912. V. 36. P. 105–179.
- [20] Чаплыгин С.А. Избранные труды. М.: Наука, 1976. 495 с.
- [21] Беркович Л.М. Метод точной линеаризации нелинейных автономных дифференциальных уравнений второго порядка// Прикл. матем. мех., 1979. Т. 43. № 4. С. 629–638.
- [22] Авдонин С.М., Белов В.В., Маслов В.П. Математические аспекты синтеза вычислительных сред. М.: МИЭМ, 1984.
- [23] Волосов К.А., Данилов В.Г., Маслов В.П. Математическое моделирование технологических процессов изготовления больших интегральных схем. М.: МИЭМ, 1984.
- [24] Бондарь Н.Г. Некоторые автономные задачи нелинейной механики. Киев: Наукова думка, 1969. 302 с.
- [25] Berkovich L.M. The method of an exact linearization of n^{th} order ordinary differential equations// J. Nonlin. Math. Phys., 1996. Т. 3. No.3-4. P. 341–350.
- [26] Беркович Л.М. Факторизация нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений и линеаризация// Докл. РАН, 1999. Т. 368. № 5. С. 604–608.
- [27] Berkovich L.M. Transformations of ordinary differential equations: local and nonlocal symmetries// Proc. of Inst. of Math. of NAS of Ukraine, 2000. Т. 30. Part 1. P. 25–34.
- [28] Беркович Л.М. Точная линеаризация нелинейных обыкновенных автономных дифференциальных уравнений// Программирование, 2000. Т. 26. № 1. С. 25–27.
- [29] Андреев В.К., Капцов О.В., Пухначев В.В. и др. Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике. Новосибирск.: Наука, 1994. 319 с.
- [30] Олвер П. Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989. 639 с.
- [31] Гледзер Е.Б., Должанский Ф.Б., Обухов А.М. Системы гидродинамического типа и их применение. М.: Наука, 1981. 366 с.

- [32] Обухов А.М. Течение Колмогорова и его лабораторное моделирование// Успехи матем. наук, 1983. Т. 38. № 4. С. 101–111.
- [33] Mittag-Leffler G. Sur l'intégration de l'équation différentielle $y'' = Ay^3 + By^2 + Cy + D + (Ey + F)y'$ // Acta Math., 1894. V. 18. P. 233–246.
- [34] Euler N., Steeb W.-H., Curus K. On exact solution for damped anharmonic oscillators// J. Phys. Math. Gen., 1989. Т. 22. P. L195–L199.
- [35] Табор М. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике. М.: Эдиториал УРСС, 2001. 312 с.
- [36] Голубев В.В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.; Л.: ГИТТЛ, 1941. 398 с.
- [37] Фущич В.И., Жданов Р.З. Нелинейные спинорные уравнения: симметрия и точные решения. Киев.: Наукова думка, 1992.
- [38] Фущич В.И., Никитин А.Г. Симметрии уравнений квантовой механики. М.: Наука, 1990. 399 с.
- [39] Lemmer R.L., Leach P.G.L. The Painlevé test, hidden symmetries and the equation $y'' + yy' + ky^3 = 0$ // J. Phys. A. Math. Gen., 1993. V. 26. P. 5017–5024.
- [40] Чебышев П.Л. Об интегрировании иррациональных дифференциалов Полн. собр. соч., М.: Изд-во АН СССР. Т. 2. 1947. С. 66.
- [41] Баутин Н.Н. Об одном дифференциальном уравнении, имеющем предельный цикл// Ж. тех. физ., 1939. Т. 9. № 7. С. 601–611.
- [42] Сибирский К.С. Введение в алгебраическую теорию инвариантов дифференциальных уравнений. Кишинев: Штиинца, 1982. 168 с.
- [43] Аксёнов Е.П., Гребеников Е.А., Дёмин В.Г. Искусственные спутники Земли. М., 1961. Вып. 8. С. 64.
- [44] Белецкий В.В. Очерки о движении космических тел. М.: Наука, 1972. Очерк второй. 359 с.
- [45] Мещерский И.В. Работы по механике тел переменной массы. М.; Л.: ГИТТЛ, 1949. 275 с.
- [46] Беркович Л.М. Задача Гильдена—Мещерского и законы изменения массы// Докл. АН СССР, 1980. Т. 250. № 5. С. 1088–1091.
- [47] Беркович Л.М. Преобразование задачи Гильдена-Мещерского к стационарному виду и законы изменения массы// Прикл. Матем. Мех., 1980. Т. 44. № 2. С. 354–357.

- [48] Berkovich L.M. Gylden—Meshcherskii problem// *Celestial Mechanics*, 1981. Т. 24. Р. 407–429.
- [49] Дубошин Г.Н. О форме траекторий в задаче о двух телах с переменными массами// *Астроном. журнал*, 1930. Т. 7. № 3–4. С. 153–172.
- [50] Беркович Л.М. Об интегрируемости задачи Гильдена-Мещерского// *Прикл. матем. мех.*, 1982. Т. 46. № 1. С. 165–167.
- [51] Дубошин Г.Н. *Небесная механика. Аналитические и качественные методы*. М.: Наука, 1978. 456 с.
- [52] Беркович Л.М., Гельфгат Б.Е. Исследование некоторых нестационарных задач небесной механики методом преобразований// *Проблемы аналит. механики, теорий устойчивости и управления*. М.: Наука, 1975. С. 54–61.
- [53] Berkovich L.M. Research of non-stationary problems of celestial mechaqnics: transformation to autonomous forme// *Non-stationary Dynamical Problems in Astronomy*, ed. by Tuken B. Omarov, Published by NOVA Science Publishers, Inc., NEW York, 2002. P. 55–106.
- [54] Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П. и др. *Теория солитонов. Метод обратной задачи* / Под ред. С.П. Новикова. М.: Наука, 1980. 319 с.
- [55] Калоджеро Ф., Дегасперис А. *Спектральные преобразования и солитоны. Методы решения и исследования нелинейных эволюционных уравнений*. М.: Мир, 1985. 472 с.
- [56] Абловиц М., Сигур Х. *Солитоны и метод обратной задачи*. М.: Мир, 1987. 479 с.
- [57] Колмогоров А.Н., Петровский И.Г., Пискунов Н.С. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической проблеме// *Бюл. Моск. гос. ун-та. Сер. Мат. мех.*, 1937 (1938). Т. 1. № 6. С. 1–26.
- [58] Беркович Л.М. Преобразования переменных как метод нахождения точных инвариантных решений уравнения Колмогорова—Петровского—Пискунова и связанных с ним нелинейных уравнений теплопроводности// *Докл. РАН*, 1992. Т. 322. № 4. С. 635–640.
- [59] Беркович Л.М. Факторизация как метод нахождения точных инвариантных решений уравнения Колмогорова—Петровского—Пискунова и связанных с ним уравнений Семенова и Зельдовича// *Докл. РАН*, 1992. Т. 322. № 5. С. 823–827.

- [60] Berkovich L.M. Direct methods of finding exact invariant solutions of KPP equation and some other nonlinear heat and diffusion equations// Lie groups and their applications, 1994. Т. 1. No. 1. P. 27–37.
- [61] Ablowitz M.J., Zeppetella A. Explicit solutions of Fisher's equation for a special wave speed// Bull. Math. Biol., 1979. Т. 41. P. 835–840.
- [62] Маслов В.П., Данилов В.Г., Волосов К.А. Математическое моделирование процессов тепло- и массопереноса. М.: Наука, 1987. 352 с.
- [63] Беркович Л.М. Об элементарных инвариантных решениях типа бегущей волны для уравнения Колмогорова—Петровского—Пискунова// Докл. РАН, 1998. Т. 359. № 6. С. 731–734.
- [64] Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П. и др. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987. 480 с.
- [65] Маслов В.П., Колокольцов В.Н. Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении. М.: ФИМЛ, 1994. 142 с.

FACTORIZATION, TRANSFORMATIONS AND INTEGRABILITY OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS. 2. NONLINEAR EQUATIONS¹¹

© 2003 L.M. Berkovich¹²

In the paper the methods of the factorization, autonomization and exact linearization developed by the author in a number of previous discussions are represented. They together with the methods of the group analysis and differential algebra permit to create a complete picture for study and integration of ordinary differential equations. It enables us to constructively investigate nonlinear and nonstationary problems known from natural science and, first of all, problems of mechanics and physics. The first part was devoted to the linear equations (Vestnik SamGU, 2003. Special Issue. P. 5–43). The second part is devoted to the nonlinear ones. The paper in part is based on recently published book by the author (Berkovich L.M. Factorization and transformations of differential equations: methods and applications. Moscow, R&S Dynamics Publisher, 2002).

Поступила в редакцию 22/IX/2003.

¹¹ Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. Y.N. Radayev.

¹² Berkovich Lev Meilikhovich, (berk@ssu.samara.ru), Academician of Academy of Non-linear Sciences, Dept. of Algebra and Geometry, Samara State University, Samara, 443011, Russia.