МАТЕМАТИКА

УДК 517.946

МЕТОДЫ СИНГУЛЯРИЗАЦИИ ПОЛНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО РОДА С ЯДРОМ КОШИ. 1[1]

© 2003 Ю.С. Бабурин[2]

В статье излагаются и иллюстрируются на примерах новые методы решения в замкнутой форме полных сингулярных интегральных уравнений второго рода с ядром Коши и с замкнутым контуром интегрирования.

§ 1. Существуют лишь некоторые частные типы [2, глава VII] полных сингулярных интегральных уравнений второго рода с ядром Коши (в дальнейшем, полных СИУ-2К), которые удается решить в явном виде и в результате вычисления конечного числа интегралов от известных и заданных функций (в дальнейшем, решить в замкнутой форме). В общем же случае полные СИУ-2К вида

$$(K_1\phi)(t) = a_1(t)\phi(t) + \int\limits_L \left[\frac{b_1(t)}{\pi i}\frac{1}{\tau - t} + k_1(t,\tau)\right]\phi(\tau)d\tau = f(t),\ t \in L \tag{1}$$

при некоторых ограничениях на расположенный в расширенной комплексной плоскости $\overline{C_z}$ контур интегрирования L, на комплекснозначные коэффициенты $a_1(t)$ и $b_1(t)$, свободный член $f(t)$ и регулярную часть ядра $k_1(t,\tau)$ исследуются и решаются обычно [2, §21, 25, 47] или [3, §50, 52, 99–101] методами регуляризации, то есть приведением их к неоднородным интегральным уравнениям Фредгольма второго рода (в дальнейшем, к неоднородным ИУФ-2) вида

$$(F\phi)(t) = \phi(t) + \lambda \int\limits_L k_0(t,\tau)\phi(\tau)d\tau = f_0(t),\ t \in L, \tag{2}$$

где L — тот же самый контур интегрирования, что и в уравнении (1), λ — числовой комплекснозначный параметр, ядро $k_0(t,\tau)$ — известная функция, непрерывная по совокупности переменных в области $\{(t,\tau) : t \in L, \tau \in L\}$, а

[1] Представлена доктором физико-математических наук профессором Ю.Н. Радаевым.

[2] Бабурин Юрий Степанович, кафедра высшей математики и информатики Самарского государственного университета, 443011, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

свободный член $f_0(t)$ — функция, интегрируемая на контуре L. А именно, если w_1 — индекс уравнения (1) в некотором данном или выбранном допустимом классе для искомых функций (в дальнейшем, в выбранном ДКИФ), то при $w_1 \leqslant 0$ применяется "регуляризация слева" [2, с. 203], а при $w_1 \geqslant 0$ — "регуляризация справа" [2, с. 204]; при любых конечных значениях индекса w_1 возможна регуляризация уравнения (1) и "методом Карлемана—Векуа" [2, с. 232], то есть решением характеристического СИУ-2К вида

$$(K_1^0\phi)(t) = a_1(t)\phi(t) + \frac{b_1(t)}{\pi i}\int\limits_L \frac{\phi(\tau)}{\tau - t}d\tau = f(t) - \int\limits_L k_1(t,\tau)\phi(\tau)d\tau, \ t \in L,$$

ибо получающееся в этих случаях неоднородное ИУФ-2 вида (2) равносильно исходному полному СИУ-2К вида (1).

Однако построение точных решений любого ИУФ-2 вида (2) требует, как правило, применения бесконечных процессов (метод последовательных приближений, решение бесконечной системы линейных алгебраических уравнений, и т. д.) и вычисления бесконечного множества интегралов от известных и заданных функций (например, [4–8]). Следовательно, для построения в замкнутой форме искомых решений $\tilde{\phi}(t)$ исходного уравнения (1) никакие из известных в настоящее время методов регуляризации полных СИУ-2К не пригодны. Вот почему мы хотим в этой работе обратить внимание на методы решения полных СИУ-2К вида (1), принципиально противоположные классическим методам регуляризации полных СИУ-2К. Суть этих методов — в построении и применении к одной или к обеим частям исходного уравнения (1) такого сингулярного интегрального оператора (в дальнейшем, такого СИ-оператора) K_2, что в результате сингулярный интеграл с ядром Коши сохраняется, а регулярная часть ядра уравнения (1) исчезает. Тем самым исходное полное СИУ-2К вида (1) приводится к характеристическому СИУ-2К с ядром Коши относительно прежней или новой искомой функции, которое затем и решается методом Ф.Д. Гахова [2] всегда в замкнутой форме в каждом из ДКИФ.

Применяя к обеим частям исходного полного СИУ-2К вида (1) полный СИ-оператор K_2, определяемый формулой

$$(K_2\psi)(t) = a_2(t)\psi(t) + \int\limits_L \left[\frac{b_2(t)}{\pi i}\frac{1}{\tau - t} + k_2(t,\tau)\right]\psi(\tau)d\tau, \ t \in L, \qquad (3)$$

где L — тот же самый контур интегрирования, что и в уравнении (1); $a_2(t)$ и $b_2(t)$ — произвольные пока функции некоторого класса Гельдера $H^{(\mu)}(L)$; $k_2(t,\tau)$ — тоже произвольная пока функция класса $H^{(\mu)}\{(t,\tau) : t \in L, \tau \in L\,,\ t \neq \tau\}\,, 0 < \mu \leqslant 1$; сингулярный интеграл с ядром Коши, как и в уравнении (1), понимается в смысле его главного значения по Коши, мы с помощью перестановки порядка интегрирований в повторных сингулярных интегралах [3, с. 60] приходим к полному СИУ-2К вида

$$(K_2K_1\phi)(t) = a_{2,1}(t)\phi(t) + \int\limits_L \left[\frac{1}{\pi i}\frac{b_{2,1}(t)}{\tau - t} + k_{2,1}(t,\tau)\right]\phi(\tau)d\tau = (K_2 f)(t),\ t \in L, \quad (4)$$

в котором новые коэффициенты

$$a_{2,1}(t) = a_2(t)a_1(t) + b_1(t)b_2(t), b_{2,1}(t) = b_2(t)a_1(t) + b_1(t)a_2(t) \quad (5)$$

являются функциями того же класса Гельдера $H^{(\mu)}(L)$, которому принадлежат коэффициенты исходного уравнения (1), причем

$$a_{2,1}^2(t) - b_{2,1}^2(t) = [a_1^2(t) - b_1^2(t)][a_2^2(t) - b_2^2(t)], \quad (6)$$

а регулярная часть нового ядра принимает значение

$$k_{2,1}(t,\tau) = a_2(t)k_1(t,\tau) + a_1(\tau)k_2(t,\tau) + \frac{b_2(t)}{\pi i}\frac{a_1(\tau) - a_1(t)}{\tau - t} +$$
$$+ \int\limits_L \left[\frac{1}{\pi i}\frac{b_2(t)}{s - t} + k_2(t,s)\right]\left[\frac{-1}{\pi i}\frac{b_1(s)}{s - \tau} + k_1(s,\tau)\right]ds. \quad (7)$$

Если же в исходном уравнении (1) вместо $\phi(t)$ ввести новую искомую функцию $\psi(t)$, полагая

$$\phi(t) = (K_2\psi)(t),\ t \in L, \quad (8)$$

то с помощью аналогичных преобразований мы приходим к полному СИУ-2К

$$(K_1K_2\psi)(t) = a_{1,2}(t)\psi(t) + \int\limits_L \left[\frac{1}{\pi i}\frac{b_{1,2}(t)}{\tau - t} + k_{1,2}(t,\tau)\right]\psi(\tau)d\tau = f(t),\ t \in L \quad (9)$$

с теми же коэффициентами $a_{1,2}(t) = a_{2,1}(t)$ и $b_{1,2}(t) = b_{2,1}(t)$ вида (5) и регулярной частью

$$k_{1,2}(t,\tau) = a_1(t)k_2(t,\tau) + a_2(\tau)k_1(t,\tau) + \frac{b_1(t)}{\pi i}\frac{a_2(\tau) - a_2(t)}{\tau - t} +$$
$$+ \int\limits_L \left[\frac{1}{\pi i}\frac{b_1(t)}{s - t} + k_1(t,s)\right]\left[\frac{-1}{\pi i}\frac{b_2(s)}{s - \tau} + k_2(s,\tau)\right]ds \quad (10)$$

нового ядра, получающейся из значения $k_{2,1}(t,\tau)$ вида (7) взаимной перестановкой индексов "1" и "2"; в соотношениях (4), (7), (9) и (10), как и всюду дальше в этой работе, все сингулярные интегралы понимаются в смысле их главного значения.

Определение 1. *СИ-оператор K_l вида (3) при некотором выборе функций $a_2(t) = a_l(t)$, $b_2(t) = b_l(t)$ и $k_2(t,\tau) = k_l(t,\tau)$ будем называть сингуляризатором слева для исходного СИ-оператора K_1 вида (1), если его левая композиция с СИ-оператором K_1 является характеристическим СИ-оператором: $K_lK_1 = (K_lK_1)^0$.*

Определение 2. *СИ-оператор K_r вида (3) при некотором выборе функций $a_2(t) = a_r(t)$, $b_2(t) = b_r(t)$ и $k_2(t,\tau) = k_r(t,\tau)$ будем называть сингуляризатором справа для исходного СИ-оператора K_1 вида (1), если его правая* *композиция с СИ-оператором* K_1 *является характеристическим СИ-оператором:* $K_1K_r = (K_1K_r)^0$.

Очевидно следующее:

а) если СИ-оператор K_2 является сингуляризатором слева (соответственно, справа) для некоторого СИ-оператора K_1, то СИ-оператор K_1 является сингуляризатором справа (соответственно, слева) для СИ-оператора K_2, и наоборот;

б) если СИ-оператор K_l является сингуляризатором слева для исходного СИ-оператора K_1 вида (1), то уравнение (4) является характеристическим СИУ-2К относительно той же искомой функции, но с новыми коэффициентами и новым свободным членом:

$$(K_lK_1\phi)^0(t) = a_l(t)\phi(t) + \frac{b_l(t)}{\pi i}\int\limits_L \frac{\phi(\tau)}{\tau - t}d\tau = (K_l f)(t),\ t \in L; \tag{11}$$

в) если СИ-оператор K_r является сингуляризатором справа для исходного СИ-оператора K_1 вида (1), то уравнение (9) является характеристическим СИУ-2К относительно новой искомой функции и с новыми коэффициентами, но с тем же свободным членом:

$$(K_1K_r\psi)^0(t) = a_r(t)\psi(t) + \frac{b_r(t)}{\pi i}\int\limits_L \frac{\psi(\tau)}{\tau - t}d\tau = f(t),\ t \in L \tag{12}$$

Определение 3. *Методы решения полных СИУ-2К, основанные на сведении исходного полного уравнения (1) к характеристическому СИУ-2К вида (11) или (12), будем называть соответственно сингуляризацией слева или сингуляризацией справа полных СИУ-2К вида (1).*

Таким образом:

а) сингуляризация слева полных СИУ-2К состоит в построении любого сингуляризатора слева K_l для исходного СИ-оператора K_1 вида (1), применении его к обеим частям уравнения (1), решении полученного характеристического СИУ-2К вида (11) в каждом из ДКИФ и в проверке всех решений $\tilde{\phi}(t)$ уравнения (11); очевидно, что если СИ-оператор K_l является равносильным сингуляризатором слева для исходного СИ-оператора K_1 вида (1), то проверка решений $\tilde{\phi}(t)$ характеристического уравнения (11) не обязательна;

б) сингуляризация справа полных СИУ-2К состоит в построении любого сингуляризатора справа K_r для исходного СИ-оператора K_1 вида (1), замене в уравнении (1) по формуле (8) искомой функции $\phi(t)$, нахождении всех решений $\tilde{\psi}(t)$ полученного характеристического уравнения (12) в каждом из соответствующих ДКИФ и в вычислении по формуле (8) всех решений $\tilde{\phi}(t)$ исходного полного СИУ-2К вида (1) в каждом данном или выбранном ДКИФ.

Методы сингуляризации полных СИУ-2К позволяют в каждом из ДКИФ все искомые решения $\tilde{\phi}(t)$ исходного полного СИУ-2К вида (1) выписать в замкнутой форме, так как всякое характеристическое СИУ-2К вида (11) или (12) можно решить в замкнутой форме в каждом из ДКИФ [2, §22 и 47] или [3, §97].

Идея сингуляризации полных СИУ-2К высказана примерно одновременно с идеей их регуляризации; уже в 1941 году В.Д. Купрадзе [9] рассмотрел проблему эквивалентности (равносильности) исходного уравнения (1) и уравнения $(SK\phi)(t) = (Sf)(t)$, $t \in L$, где S — произвольный СИ-оператор. Целый ряд примеров полных СИУ-2К с постоянными коэффициентами и с контуром L в виде всей действительной оси или некоторой (конечной, полубесконечной) связной части ее, которые могут быть решены в замкнутой форме методом их сингуляризации слева, дал Н.М. Флайшер [10]; во всех этих примерах сингуляризатор слева K_l заранее выбирался отличающимся от исходного СИ-оператора K_1 только знаком перед регулярной частью ядра. В работах [11] автора показана эффективность метода сингуляризации слева полных СИУ-2К и в случае уравнений

$$(K_1\phi)(t) = \phi(t) + \frac{b_1(t)}{\pi i}\int\limits_L \left\{\frac{1}{\omega(\tau - t)} - \frac{1}{\omega[R(\tau) - t]}\right\}\phi(\tau)d\tau = f(t),\ t \in L,$$

где

а) $L = (a, b)$ — любая связная часть действительной оси;

б) $R(z) = (\alpha z + \beta)/(\gamma z - \alpha)$ при $\alpha^2 + \beta\gamma > 0$ — целая линейная или дробно-линейная функция с действительными коэффициентами и с неподвижными точками $z = a$ и $z = b$, порождающая двухчленную циклическую группу $T = \{z, R(z)\}$ эллиптических преобразований симметрии относительно границы любой половины одной из фундаментальных областей группы T;

в) $\omega(t)$ — определенная на всей действительной оси строго монотонная и нечетная функция с единственным простым нулем в точке $t = 0$, производная $\omega'(t)$ которой не обращается в нуль, удовлетворяет условию Гельдера и ограничена на всей замкнутой числовой оси, частными случаями которой являются почти все из приведенных в работах [10] примеров.

Естественно возникают вопросы, например, такие:

1. Каковы необходимые и достаточные условия существования сингуляризатора слева K_l или сингуляризатора справа K_r для исходного СИ-оператора K_1 вида (1)?

2. Сколько сингуляризаторов слева K_l или сингуляризаторов справа K_r может существовать для исходного СИ-оператора K_1 вида (1)?

3. Каким из методов сингуляризации полных СИУ-2К целесообразно решать каждое конкретно заданное полное СИУ-2К (1); от чего зависит сам выбор этого метода сингуляризации?

4. Как решается проблема эквивалентности исходного полного СИУ-2К вида (1) и полученного характеристического СИУ-2К вида (11) или (12)?

5. Каковы выражения сингуляризатора слева K_l и сингуляризатора справа K_r для исходного СИ-оператора K_1 вида (1), то есть по каким формулам следует вычислять коэффициенты и регулярную часть ядра каждого из

СИ-операторов K_l и K_r при решении методами сингуляризации конкретно заданного полного СИУ-2К вида (1)?

Ответить на эти вопросы хотя бы частично и привести соответствующие примеры мы и постараемся в данной работе.

§ 2. Как это и общепринято, мы здесь различаем следующие случаи исходного полного СИУ-2К вида (1):

а) *нормальный,* когда $a_1(t) \neq 0$ и $a_1^2(t) - b_1^2(t) \neq 0$ при всех $t \in (D^+{}_L \cup L)$;

б) *исключительный,* когда $a_1(t) \neq 0$ при всех $t \in L$, а функции $a_1(t) - b_1(t)$ и $a_1(t) + b_1(t)$ в конечном числе точек $t = c_m$ и $t = d_n$ контура L имеют нули кратностей μ_m и ν_n соответственно;

в) *вырождающийся,* когда коэффициент $a_1(t)$ в конечном числе точек $t = e_k$ контура L обращается в нуль, $1 \leqslant k \leqslant r$;

г) *вырожденный,* когда $a_1^2(t) - b_1^2(t) = 0$ при всех $t \in L$.

В этих случаях и сам СИ-оператор K_1 вида (1) будем называть *нормальным, исключительным, вырождающимся* и *вырожденным* соответственно. Кроме того, СИ-оператор, определенный формулой (1) при $a_1(t) = 1$, $t \in L$, будем называть *приведенным* СИ-оператором и обозначать символом K_1^*. Очевидно, что в нормальном, исключительном и вырожденном случаях полных СИУ-2К достаточно ограничиться рассмотрением только приведенных СИ-операторов, ибо в этих случаях исходное полное СИУ-2К вида (1) можно переписать в виде эквивалентного ему приведенного уравнения

$$(K_1^*\phi)(t) = \phi(t) + \int\limits_L \left[\frac{b_1^*(t)}{\pi i} \frac{1}{\tau - t} + k_1^*(t,\tau) \right] \phi(\tau) d\tau = f^*(t), \; t \in L,$$

если через $b_1^*(t) = b_1(t)/a_1(t), k_1^*(t,\tau) = k_1(t,\tau)/a_1(t)$ и $f^*(t) = f(t)/a_1(t)$ обозначить известные функции тех же классов Гельдера, которым принадлежат функции $b_1(t), k_1(t,\tau)$ и $f(t)$ соответственно.

Из формул (4)–(6) и (9) следует, что при решении полных СИУ-2К методами их сингуляризации имеем следующее:

а) нормальному случаю исходного уравнения (1) соответствует нормальный же случай получаемого характеристического СИУ-2К вида (11) или (12) тогда и только тогда, когда и сам сингуляризатор K_l или K_r для исходного СИ-оператора K_1 вида (1) является нормальным СИ-оператором с коэффициентами $a_2(t)$ и $b_2(t)$, удовлетворяющими условию

$$b_2(t)/a_2(t) \neq -b_1(t)/a_1(t), \; t \in L; \tag{13}$$

б) мы приходим к исключительному случаю характеристического СИУ-2К вида (11) или (12), если хотя бы один из СИ-операторов K_1, K_l и K_r является исключительным СИ-оператором и выполнено условие (13);

в) вырождающимся случаям полного уравнения (1) соответствуют невырождающиеся случаи характеристического СИУ-2К вида (11) или (12), если коэффициенты $a_2(t)$ и $b_2(t)$ используемого сингуляризатора K_l или K_r удовлетворяют условию (13);

г) вырожденному случаю исходного полного уравнения (1) соответствует всегда тоже вырожденный случай получаемого характеристического СИУ-2К вида (11) или (12).

Поскольку исследование и решение в замкнутой форме вырожденного случая характеристического СИУ-2К известны [2, с. 250], а подбором коэффициентов $a_2(t)$ и $b_2(t)$ сингуляризаторов K_l и K_r вырождающийся случай исходного полного уравнения (1) можно свести к невырождающемуся случаю характеристического СИУ-2К вида (11) или (12), то достаточно исследовать до конца только нормальный и исключительный случаи исходного полного уравнения (1). Наиболее проста техника решения в замкнутой форме нормального случая характеристического СИУ-2К [2, с. 76]; поэтому в нормальном случае исходного полного уравнения (1) целесообразно использовать только нормальные сингуляризаторы K_l или K_r, удовлетворяющие условию (13). Поскольку задача решения в замкнутой форме исключительных случаев характеристического СИУ-2К является технически более сложной [2, с. 242], то представляется целесообразным еще до применения какого-то из методов сингуляризации полных СИУ-2К каждый исключительный случай исходного полного уравнения (1) привести [12] к эквивалентной ему совокупности нормального случая нового полного СИУ-2К и конечного числа функциональных условий разрешимости.

§ 3. Ответ на первый из поставленных в конце § 1 данной работы вопросов дается следующими двумя теоремами.

Теорема 1. *СИ-оператор K_2 вида (3) является сингуляризатором слева для исходного СИ-оператора K_1 вида (1) тогда и только тогда, когда выполнено "основное левое сингулярное тождество":*

$$k_{2,1}(t,\tau) \equiv 0,\ t \in L,\ \tau \in L,\ t \neq \tau. \tag{14}$$

Доказательство. *Необходимость* условия (14): если $K_2 = K_l$, то отождествлением левых частей уравнений (4) и (11) приходим к тождеству

$$\int_L k_{2,1}(t,\tau)\phi(\tau)d\tau = 0,\ t \in L. \tag{15}$$

Но функция $k_{2,1}(t,\tau)$ класса $H^{(\mu)}\{(t,\tau) : t \in L, \tau \in L, t \neq \tau\}$, ортогональная по переменной τ на произвольном контуре L любой интегрируемой на контуре L функции $\phi(\tau)$, является только тождественным нулем; поэтому тождество (14) выполнено. С другой стороны, поскольку левую часть тождества (15) можно переписать в виде

$$\int_l k_{2,1}(t,\tau)\phi(\tau)d\tau = (K_2K_1\phi)(t) - (K_2K_1\phi)^0(t),\ t \in L, \tag{16}$$

то *достаточность* условия (14) очевидна, и теорема 1 доказана.

Аналогично доказывается и

Теорема 2. *СИ-оператор K_2 вида (3) является сингуляризатором справа для исходного СИ-оператора K_1 вида (1) тогда и только тогда, когда выполнено "основное правое сингулярное тождество":*

$$k_{1,2}(t,\tau) \equiv 0,\ t \in L,\ \tau \in L,\ t \neq \tau. \tag{17}$$

§ 4. Частичный ответ на второй из поставленных здесь вопросов дается следующими тремя теоремами.

Теорема 3. *Одновременно с СИ-оператором K_l сингуляризатором слева для исходного СИ-оператора K_1 вида (1) является и СИ-оператор K_{cl}, определяемый формулой*

$$(K_{cl}\phi)(t) = c(t)(K_l\phi)(t),\ t \in L, \tag{18}$$

где c(t) — произвольная функция класса $H^{(\mu)}(L)$, отличная от тождественного нуля.

Доказательство. Применение СИ-оператора K_{cl} вида (18) к обеим частям исходного уравнения (1) приводит к СИУ-2К вида

$$(K_{cl}K_1\phi)(t) = c(t)(K_lK_1\phi)^0(t) = c(t)K_lf(t) = (K_{cl}f(t),\ t \in L, \tag{19}$$

в котором регулярная часть уравнения

$$\int_L k_{cl,1}\phi(\tau)d\tau = c(t)\int_L k_{2,1}(t,\tau)\phi(\tau)d\tau,\ t \in L \tag{20}$$

тождественно равна нулю в силу выполнения тождества (15). Следовательно, уравнение (19) является характеристическим СИУ-2К относительно прежней искомой функции $\phi(t)$, и теорема 3 доказана.

Следствие. *Сингуляризатор слева K_l для исходного СИ-оператора K_1 вида (1) определяется (находится, вычисляется) с точностью до произвольного, отличного от тождественного нуля функционального сомножителя $c(t) \in H^{(\mu)}(L)$.*

Теорема 4. *При сингуляризации слева полных СИУ-2К использование любого сингуляризатора слева K_{cl} вида (18) для исходного СИ-оператора K_1 вида (1) приводит к одному и тому же результату.*

Доказательство. Так как делением обеих частей уравнения (19) на общий множитель $c(t) \neq 0, t \in L$ мы получаем характеристическое СИУ-2К вида (11), не содержащее функции $c(t)$, то решение уравнения (19) в каждом из ДКИФ не зависит от функции $c(t)$, и, следовательно, от конкретно использованного СИ-оператора K_{cl} вида (18); теорема 4 доказана.

Замечание. Теорему 3 можно доказать и иначе: исходя из представления (16), с помощью формулы (7) и тождества (17) заключаем, что обе части тождества (22) получаются умножением на одну и ту же функцию

$c(t)$ соответствующих частей тождества (15) и поэтому равны тождественно нулю при всех $t \in L$. Если же эту идею использовать при сингуляризации справа полных СИУ-2К, то, умножая на функцию $c(t)$ обе части представления

$$\int_L k_{1,2}(t,\tau)\phi(\tau)d\tau = (K_cK_r\psi)(t) - (K_cK_r\psi)^0(t),\ t \in L,$$

с помощью формул (10) и тождества (17) сразу получаем, что обращается в нуль и регулярная часть

$$c(t)\int_L k_{1,r}(t,\tau)\psi(\tau)d\tau = (K_cK_r\psi)(t) - (K_cK_r\psi)^0(t)dt,\ t \in L$$

уравнения $(K_cK_r\psi)(t) = f(t),\ t \in L$, получаемого с помощью сингуляризатора K_r для исходного СИ-оператора K_1 вида (1) из уравнения

$$(K_c\phi)(t) = c(t)(K_1\phi)(t) = f(t),\ t \in L, \tag{21}$$

где по-прежнему $c(t)$ — произвольная функция класса $H^{(\mu)}(L)$, отличная от тождественного нуля. Тем самым доказана

Теорема 5. *СИ-оператор K_r является сингуляризатором справа одновременно для исходного СИ-оператора K_1 вида (1) и для СИ-оператора K_c вида (21), где $c(t)$ — произвольная функция класса Гельдера $H^{(\mu)}(L)$, отличная от тождественного нуля.*

Ответить на вторую половину изучаемого здесь вопроса: "Сколько равносильных сингуляризаторов справа K_r может существовать для исходного СИ-оператора K_1 вида (1)?" можно только вслед за решением (см. § 6 данной работы) проблемы эквивалентности уравнений при сингуляризации полных СИУ-2К.

§ 5. Основное левое сингулярное тождество (14) можно рассматривать (а в дальнейшем и будем рассматривать) как уравнение относительно вспомогательной функции $k_2(t,\tau) = k_l(t,\tau)$ независимой переменной $\tau \in L$:

$$K'_{1,\tau}[k_l(t,\tau)] = h_l(t,\tau),\ \tau \in L, \tag{22}$$

где

$$h_l(t,\tau) = -a_2(t)k_1(t,\tau) - \\ -\frac{b_2(t)}{\pi i}\left\{\frac{a_1(\tau)-a_1(t)}{\tau - t} + \int_L \left[\frac{-1}{\pi i}\frac{b_1(s)}{s-\tau} + k_1(s,\tau)\right]\frac{ds}{s-t}\right\}, \tag{23}$$

а нижний индекс τ в символе союзного СИ-оператора $K'_{1,\tau}$ означает, что в уравнении (22) переменная t играет роль числового параметра. С помощью формулы (23) убеждаемся, что необходимые и достаточные условия разрешимости уравнения (22) в каждом из ДКИФ [2, с. 209, вторая теорема Ф.Нетера]

$$\int_L h_l(t,\tau)\tilde{\phi}_{0,j}(\tau)d\tau = 0,\ 1 \leqslant j \leqslant n_1, \tag{24}$$

где $\left\{\tilde{\varphi}_{0,j}(t), 1 \leqslant j \leqslant n_1\right\}$ — полная система линейно независимых частных решений однородного уравнения $(K_1\varphi)(t) = 0$, $t \in L$, равносильны требованию, чтобы каждая собственная функция $\tilde{\varphi}_{0,j}(t), 1 \leqslant j \leqslant n_1$ исходного СИ-оператора K_1 вида (1) в этом ДКИФ была бы одновременно и собственной функцией СИ-оператора $K_l K_1$ в том же ДКИФ, что, безусловно, имеет место ввиду линейности и однородности СИ-оператора K_l. Таким образом, требуя совместности системы тождеств (24), мы нисколько не ограничиваем произвола в выборе функций $a_2(t)$ и $b_2(t)$. Известно [2, с. 213], что число n_1' линейно независимых частных решений полного уравнения (22) в данном или выбранном ДКИФ не меньше числа n_0' линейно независимых частных решений в том же ДКИФ уравнения

$$K_{1,\tau}^{0'}[k_l(t,\tau)] = a_1(\tau)k_l(t,\tau) - \int_L \frac{b_1(s)}{\pi i}\frac{k_l(t,s)}{s-\tau}ds = h_l(t,\tau),\ \tau \in L, \tag{25}$$

полученного удалением из левой части уравнения (22) слагаемого с регулярной частью $k_1(s,\tau)$ ядра. А так как число n_0' зависит прежде всего от величины индекса w_1' уравнения (25) в этом ДКИФ, то отсюда заключаем: в каждом из ДКИФ уравнение (22) тем легче решить относительно функции $k_l(t,\tau)$, чем больше индекс $w_1' = -w_1$ союзного СИ-оператора K_1' и, следовательно, чем меньше индекс w_1 исходного СИ-оператора K_1 в этом ДКИФ. Таким образом, решать полные СИУ-2К методом их сингуляризации слева тем проще, чем меньше индекс w_1 исходного полного уравнения (1) в данном или выбранном ДКИФ. Аналогичные выкладки с использованием соотношений (17) и (10) приводят к следующему выводу: решать полные СИУ-2К методом их сингуляризации справа тем проще, чем больше индекс w_1 исходного полного уравнения (1) в каждом из ДКИФ.

Согласно третьей теореме Ф.Нетера [2, с. 211], разность между числами n_1 и n_1' линейно независимых частных решений $\tilde{\varphi}_{0,j}(t)$ и $\tilde{\omega}_{0,j}(t)$ соответствующего однородного уравнения $(K_1\varphi)(t) = 0$, $t \in L$ и союзного уравнения $(K_1'\omega)(t) = 0$, $t \in L$ в каждом из ДКИФ равна индексу w_1 исходного полного уравнения (1) в этом данном или выбранном ДКИФ. Поскольку при $w_1 = 0$ имеем $n_1 = n_1'$, то отсюда заключаем: в каждом из ДКИФ, в котором индекс w_1 равен нулю, трудности решения полного СИУ-2К вида (1) как методом его сингуляризации слева, так и методом его сингуляризации справа примерно одинаковы. Поэтому справедлива

Теорема 6. *Если w_1 — индекс исходного полного СИУ-2К вида (1) в данном или выбранном ДКИФ, то при $w_1 \leqslant 0$ целесообразна сингуляризация слева уравнения (1), а при $w_1 \geqslant 0$ — его сингуляризация справа.*

§ 6. Проблема эквивалентности уравнений при сингуляризации полных СИУ-2К решается аналогично [2, с. 204–206] следующими двумя почти очевидными теоремами.

Теорема 7. *При сингуляризации слева полных СИУ-2К в каждом из ДКИФ не происходит потери решений $\tilde{\varphi}(t)$ исходного полного уравнения*

(1), но возможно появление "лишних решений" $\phi_*(t)$ получаемого характеристического СИУ-2К вида (11). Если же в данном или выбранном ДКИФ используемый сингуляризатор слева K_l для исходного СИ-оператора K_1 вида (1) не имеет отличных от тождественного нуля собственных функций, то в этом ДКИФ исходное полное уравнение (1) и получаемое характеристическое уравнение (11) эквивалентны.

Теорема 8. *При сингуляризации справа полных СИУ-2К в соответствующем ДКИФ не возникает лишних решений $\psi_*(t)$ получаемого характеристического уравнения (12), которым бы по формуле (8) соответствовали бы функции $\phi_*(t)$, не являющиеся решениями исходного полного уравнения (1) в данном или выбранном ДКИФ, но возможна потеря решений $\tilde{\psi}(t)$ характеристического СИУ-2К вида (12), отвечающих решениям $\tilde{\phi}(t)$ исходного полного уравнения (1) в данном или выбранном ДКИФ. Если же СИ-оператор K_r', союзный к используемому сингуляризатору справа K_r для исходного СИ-оператора K_1 вида (1), в соответствующем ДКИФ не имеет отличных от тождественного нуля собственных функций, то и каждому решению $\tilde{\phi}(t)$ исходного полного уравнения (1) в данном или выбранном ДКИФ по формуле (8) отвечает по крайней мере одно решение $\tilde{\psi}(t)$ получаемого характеристического СИУ-2К вида (12) в соответствующем ДКИФ.*

Рассмотрим подробнее проблему равносильной сингуляризации полных СИУ-2К вида (1).

Чтобы в данном или выбранном ДКИФ сингуляризатор слева K_l для исходного СИ-оператора K_1 вида (1) не имел отличных от тождественного нуля собственных функций, необходимо и достаточно, чтобы в этом ДКИФ уравнение $(K_l\psi)(t) = 0,\ t \in L$ было неразрешимо, то есть имело бы только тривиальное решение $\psi(t) \equiv 0,\ t \in L$. Поскольку это однородное полное СИУ-2К можно переписать в виде неоднородного "характеристического" уравнения

$$(K_l^0\psi)(t) \equiv a_l(t]\psi(t) + \frac{b_l(t)}{\pi i}\int\limits_L \frac{\psi(\tau)}{\tau - t}d\tau = -\int\limits_L k_l(t,\tau)\psi(\tau)d\tau \equiv A_l(t),\ t \in L,$$

то для неразрешимости последнего в том же ДКИФ необходимо и достаточно, чтобы была несовместной система условий

$$\int\limits_L A_l(t)\tilde{\omega}_{0,j}^0(t)dt = 0,\ 1 \leqslant j \leqslant n_l^{0,'}, \tag{26}$$

где $A_l(t)$ — произвольная функция класса $H^{(\mu)}(L)$, а $\left\{\tilde{\omega}_{0,j}^0(t), 1 \leqslant j \leqslant n_l^{0,'}\right\}$ — полная система линейно независимых частных решений в том же ДКИФ однородного уравнения

$$(K_l^{0'}\omega)(t) \equiv a_1(t)\omega(t) - \int\limits_L \frac{b_l(s)}{\pi i}\frac{u(s)}{s-t}ds = 0,\ t \in L. \tag{27}$$

Поскольку при $w_l' = -w_l < 0$ уравнение (27), союзное к характеристическому СИУ-2К, имеет только тривиальное решение, так что $n_l^{0'} = 0$ и система (26) совместна при любой интегрируемой на контуре L функции $A_l(t)$, то для несовместности системы условий (26) необходимо и достаточно, чтобы в данном или выбранном ДКИФ СИ-оператор $K_l^{0'}$ имел индекс $w_l = -w_l' \geqslant 0$, или, что то же самое, чтобы в этом ДКИФ используемый СИ-оператор K_l имел индекс $w_l = -w_l' \leqslant 0$. Таким образом, чтобы при сингуляризации слева полных СИУ-2К вида (1) не возникало лишних решений $\phi_*(t)$ получаемого характеристического уравнения (11), необходимо, чтобы в данном или выбранном ДКИФ используемый сингуляризатор слева K_l имел индекс $w_l \leqslant 0$.

С другой стороны, в силу известного свойства [2, с. 101], индекс композиции K_lK_1 СИ-операторов K_l и K_1 или характеристического уравнения (11) в любом из ДКИФ равен сумме индексов w_1 и w_l в том же ДКИФ. Поэтому, если допустить, что $w_l < 0$, то $w = w_1 + w_l < w_1$, и тогда в рассматриваемом ДКИФ полученное характеристическое уравнение (11) при $w_1 > 0$ и $w > 0$ имеет число w линейно независимых частных решений, меньшее числа n_1 линейно независимых частных решений исходного полного уравнения (1) в том же ДКИФ. Но это противоречит тому, что при сингуляризации слева полных СИУ-2К всякое решение $\tilde{\phi}_j(t)$ исходного полного уравнения (1) является и решением полученного характеристического уравнения (11) в рассматриваемом ДКИФ. Следовательно, в каждом из ДКИФ должно быть и $w_l \geqslant 0$. Из одновременного выполнения двух условий $w_l \leqslant 0$ и $w_l \geqslant 0$ заключаем, что для равносильности исходного полного уравнения (1) и полученного характеристического уравнения (11) в рассматриваемом ДКИФ необходимо выполнение условия $w_l = 0$.

Используя линейность СИ-оператора K_l, уравнение (11) перепишем в виде $(K_l(K_1\phi - f))(t) = 0,\ t \in L$; последнее же равносильно уравнению

$$(K_1\phi)(t) = f(t) + \sum_{j=1}^{n_l} c_j \tilde{\psi}_{l,j}^0(t),\ t \in L, \tag{28}$$

где $\{c_j, 1 \leqslant j \leqslant n_l\}$ — набор произвольных комплексных постоянных, а $\{\psi_{l,j}^0(t), 1 \leqslant j \leqslant n_l\}$ — полная система линейно независимых частных решений однородного уравнения $K_1\phi(t) = 0,\ t \in L$ в рассматриваемом ДКИФ. Если же допустить, что в рассматриваемом ДКИФ используемый сингуляризатор слева K_l не имеет отличных от тождественного нуля собственных функций $\psi_{l,j}^0(t)$, то очевидно, что уравнения (1) и (28) идентичны, а уравнения (1) и (11) эквивалентны в рассматриваемом ДКИФ. Таким образом, доказана следующая

Теорема 9. *Чтобы при сингуляризации слева полных СИУ-2К вида (1) получаемое характеристическое СИУ-2К вида (11) было эквивалентно исходному полному уравнению (1) в данном или выбранном ДКИФ, необходимо, чтобы в этом ДКИФ используемый сингуляризатор слева* K_l *для* *исходного СИ-оператора K_1 вида (1) имел индекс $w_l = 0$, и достаточно, чтобы в этом ДКИФ используемый СИ-оператор K_l не имел собственных функций, отличных от тождественного нуля.*

Проблему равносильной сингуляризации справа полных СИУ-2К вида (1) решает следующая

Теорема 10. *Чтобы при сингуляризации справа полных СИУ-2К вида (1) каждому решению $\tilde{\varphi}_k(t), 1 \leqslant k \leqslant n_1$ исходного полного уравнения (1) в данном или выбранном ДКИФ по формуле (8) отвечало единственное решение $\tilde{\psi}_k(t)$ полученного характеристического уравнения (12) в соответствующем ДКИФ, необходимо, чтобы используемый сингуляризатор справа K_r для исходного СИ-оператора K_1 вида (1) в этом соответствующем ДКИФ имел индекс $w_r = 0$, и достаточно, чтобы в этом соответствующем ДКИФ используемый СИ-оператор K_r имел индекс $w_r = 0$, а союзный к нему СИ-оператор K_r' не имел собственных функций, отличных от тождественного нуля.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть каждому решению $\tilde{\varphi}_k(t)$, $1 \leqslant k \leqslant n_1$ исходного полного уравнения (1) в данном или выбранном ДКИФ по формуле (8) отвечает единственное решение $\tilde{\psi}_k(t)$ полученного характеристического уравнения (12) в соответствующем ДКИФ. Из разрешимости полного уравнения (1) в данном или выбранном ДКИФ имеем: либо а) $w_1 \geqslant 0$ и $n_1 \geqslant w_1$ при $w_1 \geqslant 1$, $n_1 \geqslant 1$ при $w_1 = 0$, либо б) $w_1 < 0$ и $n_1 = 1$ лишь при выполнении условий

$$\int\limits_L f(t)\tilde{\omega}_{0,j}(t)dt = 0,\ 1 \leqslant j \leqslant n_1', \tag{29}$$

где $\left\{\omega_{0,j}(t), 1 \leqslant j \leqslant n_1'\right\}$ — полная система линейно независимых частных решений союзного уравнения $(K_1'\omega)(t) = 0$, $t \in L$. Из разрешимости же характеристического уравнения (12) в соответствующем ДКИФ имеем: либо в) $w = w_1 + w_r$ и $n_{1,r} = w$ при $w \geqslant 1$, $n_{1,r} = 1$ при $w = 0$, либо г) $w < 0$ и $n_{1,r} = 1$ лишь при выполнении условий

$$\int\limits_L f(t)\tilde{\nu}_{r,j}(t)dt = 0,\ 1 \leqslant j \leqslant -w_1 - w_r, \tag{30}$$

где $\left\{\nu_{r,j}(t), 1 \leqslant j \leqslant -w_1 - w_r\right\}$ — полная система линейно независимых частных решений союзного уравнения $((K_1K_r)^{0'}\nu)(t) = 0$, $t \in L$ в том же соответствующем ДКИФ.

Комбинируя каждый из случаев *а)* и *б)* с каждым из случаев *в)* и *г)*, мы и получим необходимые ограничения на индекс w_r СИ-оператора K_r в соответствующем ДКИФ. Очевидно, что в комбинации *б)* и *г)*, когда $w_r < -w_1$ при $w_1 < 0$, мы действительно имеем равенство $n_{1,r} = n_1 = 1$; следовательно, для однозначной разрешимости уравнений (1) и (12) при выполнении условий (29) и (30) необходимо и достаточно выполнение условия $w_r \leqslant 0$. А чтобы и в комбинации *а)* и *в)* имело место равенство $n_{1,r} \equiv w_1 + w_r = n_1 \geqslant w_1$

при $w_1 \geqslant 1$, необходимо и достаточно выполнение условия $w_r \geqslant 0$. Отсюда и получаем, что если $w_r \leqslant 0$ и $w_r \geqslant 0$ одновременно, то $w_r = 0$.

Достаточность. Пусть в соответствующем ДКИФ используемый СИ-оператор K_r имеет индекс $w_r = 0$, а союзный к нему СИ-оператор K'_r не имеет собственных функций, отличных от тождественного нуля. Тогда при всех $k \in \overline{1, n_r}$ неоднородное полное уравнение

$$(K_r\psi)(t) = \tilde{\phi}_k(t), \; t \in L \tag{31}$$

безусловно, разрешимо при любой правой части $\phi_k(t) \in H^{(\mu)}(L)$ и имеет не менее одного частного решения. В силу же третьей теоремы Ф. Нетера $w_r = n_r - n'_r$, где n_r и n'_r — количества линейно независимых частных решений в соответствующем ДКИФ однородного уравнения

$$(K_r\psi)(t) = 0, \; t \in L \tag{32}$$

и союзного уравнения, $(K'_r\omega)(t) = 0$, $t \in L$. А так как последнее уравнение в том же ДКИФ имеет только тривиальное решение $w(t) \equiv 0$, $t \in L$, то $n'_r = 0$, так что в этом ДКИФ соответствующее однородное уравнение (32) неразрешимо, а неоднородное уравнение (31) имеет единственное решение $\tilde{\psi}_k(t)$ при каждом $k \in \overline{1, n_r}$; и теорема 10 доказана.

Очевидно, теорема 10 дает исчерпывающий ответ на вопрос, оставленный открытым в конце § 4 данной работы: всякий СИ-оператор K_r с нулевым индексом в соответствующем ДКИФ, для которого союзный к нему СИ-оператор K'_r в этом ДКИФ не имеет отличных от тождественного нуля собственных функций, является в рассматриваемом ДКИФ равносильным сингуляризатором справа для исходного СИ-оператора K_1 вида (1).

Литература

[1] Бабурин Ю.С. Методы сингуляризации полных сингулярных интегральных уравнений второго рода с ядром Коши. Куйбышев: Изд-во КГУ, 1987. Деп. в ВИНИТИ 25.02.87. 1333 В87. 44 с.

[2] Гахов Ф.Д. Краевые задачи, 3-е изд. М.: Наука, 1977. 640 с.

[3] Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1962. 600 с.

[4] Виарда Г. Интегральные уравнения. М.; Л.: ГТТИ, 1933. 192 с.

[5] Гурса Э. Курс математического анализа. М.; Л.: ГТТИ, 1934.

[6] Привалов И.И. Интегральные уравнения. М.; Л., 1937.

[7] Михлин С.Г. Приложения интегральных уравнений к некоторым проблемам механики, математической физики и техники. М.; Л.: ГИТТЛ, 1947. 304 с.

[8] Петровский И.Г. Лекции по теории интегральных уравнений. М.; Л.: ГТТИ, 1951.

[9] Купрадзе В.Д. О проблеме эквивалентности в теории особых интегральных уравнений. Сообщ. АН Груз. ССР. Т. II, Вып. 9. 1941. С. 793–798.

[10] Флайшер Н.М. Краевые задачи для уравнений смешанного типа в случае неограниченных областей. Revue Roumaine de mathematiques pures et appliquees. Т. 10. Вып. 5. 1965. С. 607–610;

[11] Флайшер Н.М. Новый метод решения в замкнутой форме для некоторых классов сингулярных интегральных уравнений с регулярной частью // Там же. С. 615–620.

[12] Бабурин Ю.С. О сингуляризации сингулярных интегральных уравнений. Дифференциальные уравнения. Сборник трудов математических кафедр пединститутов РСФСР, Рязань: 1977. Вып. 10. С. 14–24; 1978. Вып. 12. С. 12–23; 1979. Вып. 14. С. 3–23.

[13] Тузик А.И. Об исключительных случаях особых интегральных уравнений с ядром Коши // Вестник БГУ. Сер. 1. Вып. 2. 1969. С. 3–7;

[14] Тузик А.И. К решению особых интегральных уравнений с ядром Коши в исключительном случае // Изв. АН БССР. Сер. физ.-матем. наук. Вып. 2. 1970. С. 125–127.

SINGULARISATION METHODS FOR COMPLETE SINGULAR INTEGRAL EQUATIONS OF THE SECOND TYPE WITH CAUCHY'S KERNEL. 1[3]

 Y.S. Baburin[4]

In the paper the methods of left (right) singularisation for complete singular integral equations of the second type with Caushy's kernel (for complete SIE-2C) and closed contour of integration are described.

These methods reduce the normal case of complete SIE-2C to the normal case of characteristic SIE-2C for the same (or a new) unknown function. It enables us to resolve any complete SIE-2C in closed analytic form. Thus a solution of SIE-2C can be determined by an analytic formula and represent the result in the form of a number of integrals of known functions.

Поступила в редакцию $12/X/2003$.

[3] Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. Y.N. Radayev.

[4] Baburin Yuriy Stepanovich, Dept. of Higher Mathematics and Informatics, Samara State University, Samara, 443011, Russia.