

УДК 539.1

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ КОНЕЧНОГО ЦИЛИНДРА¹

© 2003 Л.И. Фридман²

Проблема разработки методов динамических расчетов сооружений и машин — актуальнейшая задача современной науки. Этой проблеме посвятил всю свою творческую жизнь Юрий Эдуардович Сеницкий. Им и его учениками решен ряд сложных задач динамики элементов сооружений и машин на основе метода конечных интегральных преобразований. В настоящей работе построено решение нестационарной задачи теории упругости для конечного цилиндра родственным методом — разложением в ряд по системам ортогональных функций.

Введение

Один из возможных методов решения нестационарных динамических задач теории упругости — решение в рядах по собственным формам. В работах [1, 2] приводится реализация этого метода при построении решения нестационарной полярно-симметричной задачи для поллой сферы, для которой известно решение в квадратурах, полученное методом "бегущей волны". Сопоставление вычислений, полученных двумя методами, подтверждает хорошую сходимость метода разложения в ряд по собственным формам.

В отличие от поллой сферы, когда известно точное решение задачи о собственных формах, решение последней для тел любой другой формы строится в рядах по ортогональным системам функций [3, 4]. Это обстоятельство существенно усложняет построение нестационарной динамической задачи для конечного цилиндра. Однако появив-

¹ Представлена доктором физико-математических наук профессором Ю.Н. Радаевым.

² Фридман Лев Израилевич, кафедра сопротивления материалов и строительной механики Самарской архитектурно-строительной академии, 443001, Самара, ул. Молодогвардейская, 194.

шиеся в последнее время системы компьютерной алгебры, например "Mathematica 4.1", упрощают как проведение сложных аналитических преобразований при построении алгоритма, так и процесс вычислений.

В безразмерных криволинейных ортогональных координатах α_i ($i = 1, 2, 3$) уравнения динамической задачи теории упругости имеют вид

$$c_1^2 \frac{1}{H_i} \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_i} - c_2^2 \frac{1}{H_j H_k} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_j} (H_k 2\omega_k) - \frac{\partial}{\partial \alpha_k} (H_j 2\omega_j) \right] + \frac{l}{E} F_i = \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (i = 1, 2, 3; j = 2, 3, 1; k = 3, 1, 2). \quad (1)$$

Здесь u_i — безразмерные компоненты перемещения; $2\omega_i$ — компоненты вектора вращения; H_i — коэффициенты Ламе; Δ — относительное изменение объема; t — безразмерное время, отнесенное к $l c^{-1}$; l — характерный линейный размер; $c = \sqrt{E \rho^{-1}}$ — скорость звука; E — модуль упругости; ρ — массовая плотность; $c_1^2 = \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, $c_2^2 = \frac{1}{2(1+\nu)}$ — квадраты безразмерных скоростей волн расширения и волн сдвига; ν — коэффициент Пуассона.

Уравнения стационарной задачи (уравнения собственных форм) могут быть получены из (1) и записаны в виде

$$c_1^2 \frac{1}{H_i} \frac{\partial \Delta_m}{\partial \alpha_i} - c_2^2 \frac{1}{H_j H_k} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_j} (H_k 2\omega_k) - \frac{\partial}{\partial \alpha_k} (H_j 2\omega_j) \right] + \frac{l}{E} F_i + \lambda_m^2 u_{im} = 0, \quad (2)$$

где m — индекс (номер) формы; λ_m — безразмерная частота.

Компоненты перемещения u_i ($i = 1, 2, 3$) удовлетворяют условию ортогональности

$$\iiint_V (u_{1m} u_{1n} + u_{2m} u_{2n} + u_{3m} u_{3n}) dV = 0, \quad m \neq n. \quad (3)$$

Здесь $dV = H_1 H_2 H_3 d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3$ — элемент объема.

Решение нестационарной задачи записывается в виде

$$u_i = \sum_{m=1}^{\infty} u_{im} \varphi_m(t), \quad (4)$$

где $\varphi_m(t)$ — искомая функция времени.

Подстановка выражения (4) в систему (1), умножение уравнений системы соответственно на $u_{in} dV$, сложение их и интегрирование по объему с учетом (2) и (3) дают

$$\frac{d^2 \varphi_m}{dt^2} + \lambda_m^2 \varphi_m = f_m(t). \quad (5)$$

Здесь

$$f_m(t) = \frac{1}{E C_m} \iiint_V (F_1 u_{1m} + F_2 u_{2m} + F_3 u_{3m}) dV, \quad (6)$$

$$C_m = \iiint_V (u_{1m}^2 + u_{2m}^2 + u_{3m}^2) dV, \quad (7)$$

где F_1, F_2, F_3 — компоненты объемной силы, заданной как функция координат и времени. Решение уравнения (5) при нулевых начальных условиях (при $t = 0$, $u_i = 0$, $\frac{\partial u_i}{\partial t} = 0$) имеет вид

$$\varphi_m(t) = \frac{1}{\lambda_m} \int_0^t f_m(\tau) \sin[\lambda_m(t - \tau)] d\tau. \quad (8)$$

Если на граничной поверхности тела заданы компоненты поверхностной нагрузки S_i , то ее можно заменить объемной, действующей в тонком слое, прилегающем к граничной поверхности $F_i = S_i h^{-1}$, где h — толщина слоя по нормали к поверхности. В этом случае зависимость (6) принимает вид

$$f_m(t) = \frac{1}{h} \iiint_{V_h} (S_1 u_{1m} + S_2 u_{2m} + S_3 u_{3m}) dV. \quad (9)$$

Переходя к пределу ($h \rightarrow 0$, $V_h \rightarrow 0$) и раскрывая неопределенность, получим решение для поверхностной нагрузки.

1. Собственные формы и частоты

Стационарная динамическая задача теории упругости сводится к трём уравнениям Гельмгольца относительно трех потенциалов перемещений [5]. В некоторых системах координат, включая прямоугольные, цилиндрические и сферические, решения уравнений Гельмгольца методом разделения переменных и специальным подбором параметров разделения представляются в виде суммы трёх двойных разложений по ортогональным функциям на координатных поверхностях в области, занятой рассматриваемым каноническим телом, включая его граничные поверхности [3, 4].

В цилиндрических координатах r, φ, z для кругового цилиндра $r_1 \leq r \leq r_2$, $0 \leq z \leq z_0$ условие периодичности по координате φ упрощает формы колебаний; потенциалы перемещений при этом представляются в виде одинарных разложений [7]. Перемещения записываются в виде

$$U_{rjm} = u_{rjm} \cos(m\varphi); \quad U_{\varphi jm} = u_{\varphi jm} \sin(m\varphi); \quad U_{zjm} = u_{zjm} \cos(m\varphi);$$

$$\begin{aligned}
u_{rjm} = & \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n^{(0)} \frac{d}{dr} I_m(r\gamma_n) + B_n^{(0)} \frac{d}{dr} K_m(r\gamma_n) - A_n^{(1)} \mu_n \frac{d}{dr} I_m(r\delta_n) - \right. \\
& \left. - B_n^{(1)} \mu_n \frac{d}{dr} K_m(r\delta_n) + A_n^{(2)} \frac{m}{r} I_m(r\delta_n) + B_n^{(2)} \frac{m}{r} K_m(r\delta_n) \right] \cos(\mu_n z) + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ C_k^{(0)} [\exp(-\omega_k(z_0 - z)) + c_c \frac{d}{dz} \exp(-\Omega_k(z_0 - z)) + d_c \frac{d}{dz} \exp(-\Omega_k z)] + \right. \\
& \left. + D_k^{(0)} [\exp(-\omega_k z) + c_d \frac{d}{dz} \exp(-\Omega_k(z_0 - z)) + d_d \frac{d}{dz} \exp(-\Omega_k z)] \right\} \frac{d}{dr} w_k(r);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{\varphi jm} = & - \sum_{n=1}^{\infty} \left[-A_n^{(0)} \frac{m}{r} I_m(r\gamma_n) - B_n^{(0)} \frac{m}{r} K_m(r\gamma_n) + A_n^{(1)} \mu_n \frac{m}{r} I_m(r\delta_n) + \right. \\
& \left. + B_n^{(1)} \mu_n \frac{m}{r} K_m(r\delta_n) - A_n^{(2)} \frac{d}{dr} I_m(r\delta_n) + B_n^{(2)} \frac{d}{dr} K_m(r\delta_n) \right] \cos(\mu_n z) + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ C_k^{(0)} [\exp(-\omega_k(z_0 - z)) + c_c \frac{d}{dz} \exp(-\Omega_k(z_0 - z)) + d_c \frac{d}{dz} \exp(-\Omega_k z)] + \right. \\
& \left. + D_k^{(0)} [\exp(-\omega_k z) + c_d \frac{d}{dz} \exp(-\Omega_k(z_0 - z)) + d_d \frac{d}{dz} \exp(-\Omega_k z)] \right\} \frac{m}{r} w_k(r);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{zjm} = & \sum_{n=1}^{\infty} \left[-A_n^{(0)} \mu_n I_m(r\gamma_n) - B_n^{(0)} \mu_n K_m(r\gamma_n) + A_n^{(1)} [\mu_n^2 - (\lambda_{jm}/c_2)^2] I_m(r\delta_n) + \right. \\
& \left. + B_n^{(1)} [\mu_n^2 - (\lambda_{jm}/c_2)^2] K_m(r\delta_n) + \right] \sin(\mu_n z) + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ C_k^{(0)} \left[\frac{d}{dz} \exp(-\omega_k(z_0 - z)) + c_c \exp(-\Omega_k(z_0 - z)) + d_c \exp(-\Omega_k z) h_k^2 \right] + \right. \\
& \left. + D_k^{(0)} \left[\frac{d}{dz} \exp(-\omega_k z) + c_d \exp(-\Omega_k(z_0 - z)) + d_d \exp(-\Omega_k z) h_k^2 \right] \right\} w_k(r).
\end{aligned}$$

Здесь $\mu_n = \frac{(n-1)\pi}{z_0}$; $\gamma_n = \sqrt{\mu_n^2 - \lambda_{im}^2 c_1^{-2}}$; $\delta_n = \sqrt{\mu_n^2 - \lambda_{jn}^2 c_2^{-2}}$; $\omega_k = \sqrt{h_k^2 - \lambda_{jm}^2 c_1^{-2}}$; $\Omega_k = \sqrt{h_k^2 - \lambda_{im}^2 c_2^{-2}}$; λ_{jm} — безразмерная частота, j — номер частоты при фиксированном m ; I_m и K_m — модифицированные функции Бесселя. Если какая-либо из приведенных величин принимает мнимые значения, то соответствующие модифицированные функции Бесселя заменяются функциями Бесселя, а соответствующие экспоненты — тригонометрическими функциями.

В приведенных выше выражениях h_k и $w_k(r)$ — соответственно собственное значение и собственная функция задачи Штурма—Лиувилля для функции радиуса при разделении переменных в уравнении Гельм-

гольца, т. е.

$$w_k(r) = \left[\frac{dY_m(rh_k)}{dr} \right] \Big|_{r=r_2} J_m(rh_k) - \left[\frac{dJ_m(rh_k)}{dr} \right] \Big|_{r=r_2} Y_m(rh_k),$$

где J_m и Y_m — функции Бесселя.

Собственные значения h_k являются корнями уравнения

$$\left[\frac{dw_k}{dr} \right] \Big|_{r=r_1} = 0,$$

причем r_1 и r_2 — соответственно внутренний и внешний радиусы цилиндра.

Постоянные c_c, c_d, d_c, d_d вычисляются следующим образом:

$$c_c = \left\{ \left[\frac{d}{dz} \exp(\omega_k(z - z_0)) \right] \Big|_{z=z_0} \left[\exp(-\Omega_k z) \right] \Big|_{z=0} - \right. \\ \left. - \left[\frac{d}{dz} \exp(\omega_k(z - z_0)) \right] \Big|_{z=0} \left[\exp(-\Omega_k z) \right] \Big|_{z=z_0} \right\} H_q^{-1};$$

$$c_d = \left\{ \left[\frac{d}{dz} \exp(-\omega_k z) \right] \Big|_{z=z_0} \left[\exp(-\Omega_k z) \right] \Big|_{z=0} - \right. \\ \left. - \left[\frac{d}{dz} \exp(\omega_k z) \right] \Big|_{z=0} \left[\exp(-\Omega_k z) \right] \Big|_{z=z_0} \right\} H_q^{-1};$$

$$d_c = \left\{ \left[\frac{d}{dz} \exp(\omega_k(z - z_0)) \right] \Big|_{z=0} \left[\exp(\Omega_k(z - z_0)) \right] \Big|_{z=z_0} - \right. \\ \left. - \left[\frac{d}{dz} \exp(\omega_k(z - z_0)) \right] \Big|_{z=z_0} \left[\exp(\Omega_k(z - z_0)) \right] \Big|_{z=0} \right\} H_q^{-1};$$

$$d_d = \left\{ \left[\frac{d}{dz} \exp(-\omega_k z) \right] \Big|_{z=0} \left[\exp(\Omega_k(z - z_0)) \right] \Big|_{z=z_0} - \right. \\ \left. - \left[\frac{d}{dz} \exp(\omega_k z) \right] \Big|_{z=z_0} \left[\exp(\Omega_k z - z_0) \right] \Big|_{z=0} \right\} H_q^{-1};$$

$$H_q = [h_k^2 - (\frac{\lambda_{jm}}{c_2})^2] \left\{ \left[\exp(\Omega_k(z - z_0)) \right] \Big|_{z=0} \left[\exp(-\Omega_k z) \right] \Big|_{z=z_0} - \right. \\ \left. - \left[\exp(\Omega_k(z - z_0)) \right] \Big|_{z=z_0} \left[\exp(-\Omega_k z) \right] \Big|_{z=0} \right\}.$$

Собственные частоты и формы вычислялись для свободного цилиндра. Граничные условия после разложений функций r на плоских границах $z = 0$ и $z = z_0$ по $w_k(r)$ и функций z на цилиндрических границах $r = r_1$ и $r = r_2$ по $\cos(\mu_n z)$, $\sin(\mu_n z)$ переходят в бесконечные последовательности линейных однородных алгебраических уравнений относительно последовательностей произвольных постоянных $A_n^{(0)}, B_n^{(0)}, A_n^{(1)}, B_n^{(1)}, A_n^{(2)}, B_n^{(2)}, C_k^{(0)}, D_k^{(0)}$. Условие разрешимости усеченной

однородной системы дает частотное уравнение (частотный определитель порядка $8N$, где N — число удерживаемых слагаемых в разложении). Среди корней частотного уравнения, кроме частот λ_{jm} , встречаются корни, равные $ih_k c_1$, $ih_k c_2$, $i\mu_n c_1$, $i\mu_n c_2$, где i — целое число. Введение в программу вычисления частот процедур, отсеивающих корни, не являющиеся частотами, и проверка частот на резонанс позволили существенно расширить область достоверного вычисления частот, чему в немалой степени способствуют вычислительные возможности системы "Mathematica 4.1".

На рис. 1 приведена зависимость λ_{1m} от z_0 , вычисленная на основе уравнений теории упругости (сплошные линии) и на основе теории колебаний пластин (модель Тимошенко) (штриховые линии). Аналогичные зависимости в [6] ограничены огибающей нижних значений корней, не являющихся частотами.

2. Нестационарная задача для цилиндра

На плоской границе $z = 0$ приложена нормальная к граничной поверхности уравновешенная нагрузка

$$p = p_*(t) \cos(m\varphi). \quad (10)$$

Зависимость (9) принимает вид

$$f_m(t) = \frac{1}{C_{jm}h} \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{2\pi} \int_0^h p u_{zjm} dr d\varphi dz, \quad (11)$$

где

$$C_{jm} = \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{2\pi} \int_0^h \left[(u_{rjm} \cos(m\varphi))^2 + (u_{\varphi jm} \sin(m\varphi))^2 + (u_{zjm} \cos(m\varphi))^2 \right] r dr d\varphi dz. \quad (12)$$

Здесь j — индекс (номер) формы колебаний при фиксированном m .

Функция $f(t)$ принимает вид

$$f_{jm} = A_{jm} p_*(t),$$

где A_{jm} — постоянная, полученная после интегрирования по координатам и вычисления пределов в (11) и (12).

Из зависимости (8) следует

$$\varphi_{jm}(t) = \frac{1}{E} A_{jm} \frac{1}{\lambda_{jm}} \int_0^t p_*(\tau) \sin[\lambda_{jm}(t - \tau)] d\tau. \quad (13)$$

Компоненты перемещений нестационарной задачи

$$u_r = \sum_{j=1}^{\infty} u_{rjm} \varphi_{jm}(t) \cos(m\varphi); \quad u_{\varphi} = \sum_{j=1}^{\infty} u_{\varphi jm} \varphi_{jm}(t) \sin(m\varphi);$$

$$u_z = \sum_{j=1}^{\infty} u_{zjm} \varphi_{jm}(t) \cos(m\varphi)$$

определяют напряженное состояние как функцию координат и времени.

Вычисления проводились для $m = 2$ и $p_*(t) = p_0 \sin(\pi t/t_0)$, что соответствует импульсному нагружению. На рис. 2–5 приведены отношения σ_z/p_0 (σ_z — напряжение) как функции z на отрезке $r = 0.3875$, $\varphi = 0$ в моменты времени, указанные на рисунках; при этом продолжительность импульса $t_0 = \pi/\lambda_{12}$. При вычислении собственных частот и форм в соответствующих рядах удерживалось 10 слагаемых т. е. частотное уравнение представляет собой определитель 80 порядка. Вычисления в нестационарной задаче, результаты которых приведены на рис. 2–4, проведены при суммировании 20 форм. Для сравнения на рис. 5 приведены результаты вычислений по 5 формам колебаний.

На рис. 6–10 приведены отношения σ_z/p_0 как функции времени t при изменении нагрузки в соответствии с зависимостью (10) при $m = 2$ и $p_*(t) = p_0 \sin(\eta \lambda_{12} t)$, здесь η принято равным 1,15; (при $\eta = 1$ наступает резонанс с частотой первой формы). Напряжения вычислялись в трёх точках $r = 0.3875$, $\varphi = 0$, $z = 0$, $z = z_0/2$, $z = z_0$ (рис. 6,7) и в двух точках $r = 0.3875$, $\varphi = 0$, $z = 0$, $z = 0.0625z_0$ (рис. 8,9), одна из которых находится на граничной поверхности $z = 0$, а другая вблизи первой $z = 0.0625z_0$. Число id собственных форм, по которым проводились вычисления (их результаты приведены на рис. 6,8,9), равно 20; на рис. 7 $id = 10$. Как из первой серии вычислений (рис. 2–5), так и из второй серии вычислений (рис. 6–9) следует, что граничные условия при $z = 0$ и $z = z_0$ $\sigma_z = 0$ удовлетворяются достаточно точно и что напряжения σ_z резко возрастают вблизи граничной поверхности (рис. 8,9).

Нестационарные движения могут вычисляться по 10–15 формам колебаний. Все вычисления проведены для относительных размеров цилиндра: внутренний радиус $r_1 = 0.3$, внешний радиус $r_2 = 1$, длина $z_0 = 2$.

Литература

- [1] Фридман Л. И. Решение динамической задачи теории упругости в криволинейных координатах // Проблемы прочности. 1976. №5. С. 56–61.

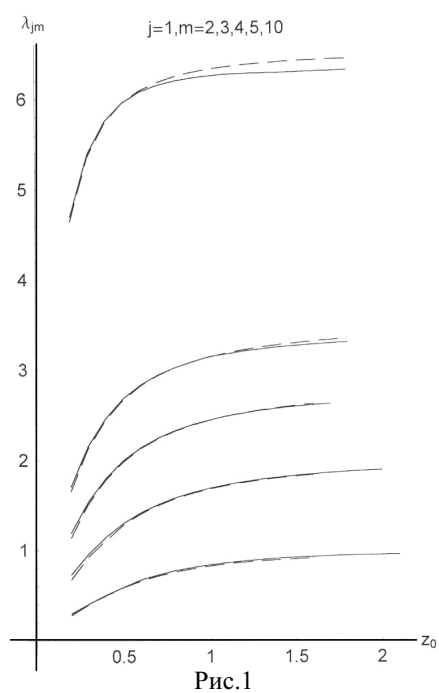


Рис.1

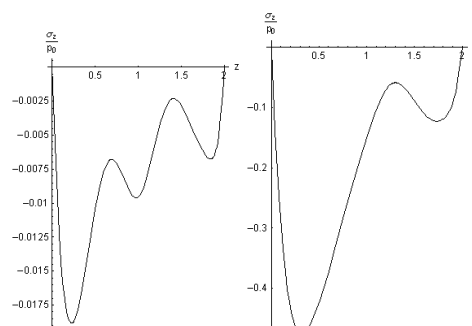


Рис.2

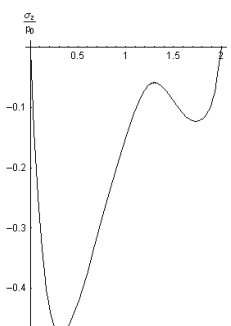


Рис.3

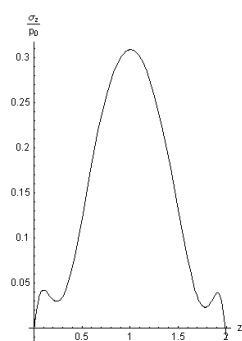


Рис.4

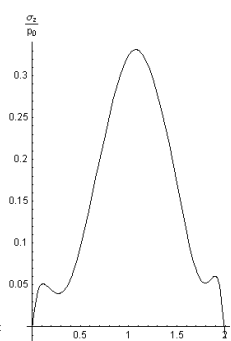


Рис.5

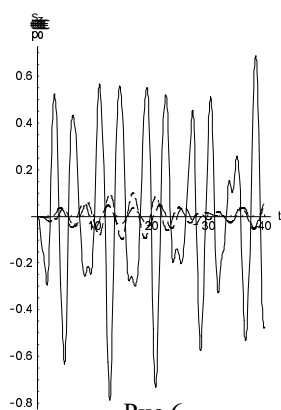


Рис.6

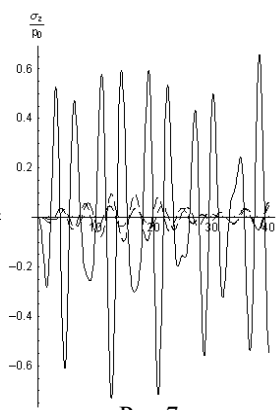


Рис.7

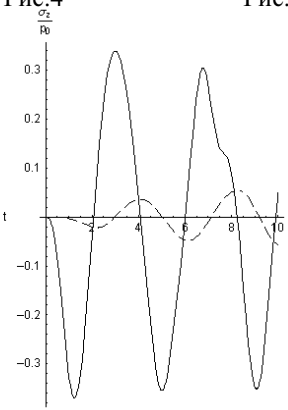


Рис.8

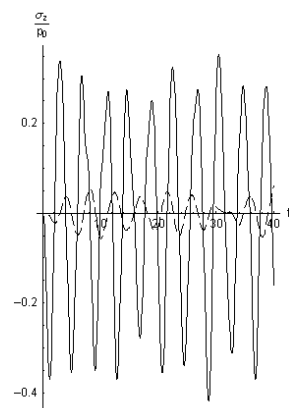


Рис.9

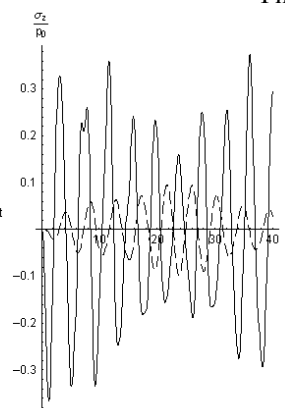


Рис.10

- [2] Фридман Л. И. Применение метода "бегущей волны" к решению динамической задачи о нагружении упругой сферы // Прикладная механика. 1976. Т. 12. №9. С. 30–35.
- [3] Фридман Л. И. Динамическая задача теории упругости для тел канонической формы // Доклады. АН СССР. 1986. Т. 289. №4. С. 825–828.
- [4] Фридман Л. И. Динамическая задача теории упругости для тел канонической формы // Прикладная механика. 1987. Т. 23. №12. С. 102–108.
- [5] Морс Ф., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Т. 2. М.: Иностран. лит., 1960. 886 с.
- [6] Кузнецов Н. Д., Фридман Л. И., Шапошников Ю. Н. Особенности низкочастотного спектра собственных колебаний цилиндрических тел // Доклады АН СССР. 1990. Т. 312. №1. С. 55–58.
- [7] Фридман Л. И. Динамическая задача теории упругости для цилиндра конечных размеров // Прикладная механика. 1981. Т. 17. №3. С. 37–43.

NON-STATIONARY DYNAMICAL ELASTIC PROBLEM FOR FINITE CYLINDER³

© 2003 L.I. Fridman⁴

In the present work the solution of non-stationary dynamical elastic problem for finite cylinder is given. The solution is represented by convergent series over orthogonal functions.

Поступила в редакцию 29/III/2003
в окончательном варианте — 15/V/2003

³ Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. Y.N. Radayev.

⁴ Fridman Lev Israilevich, Dept. of Strength of Materials and Structural Mechanics, Samara State Architectural Academy, Samara, 443001, Russia.