

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ОСЕ- СИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

© 2003 Ю.Н. Радаев, Ю.Н. Бахарева, Ю.Н. Рябова¹

Рассматриваются уравнения осесимметричной задачи математической теории пластичности с условием пластичности Треска и ассоциированным с ним законом течения для напряженных состояний, соответствующих ребру поверхности текучести. Гиперболические уравнения равновесия, которые формально могут быть исследованы независимо от соотношений кинематики, преобразованы к криволинейной координатной сетке с координатными линиями, совпадающими с траекториями главных напряжений. С помощью автомодельной замены изостатических переменных в условиях осевой симметрии вместо системы уравнений в частных производных получена система двух обыкновенных дифференциальных уравнений. Тем самым доказано существование автомодельных решений осесимметричной задачи в случае, когда автомодельная переменная является степенной функцией от специальным образом подобранных изостатических криволинейных координат. При некоторых значениях параметров, участвующих в представлении автомодельного решения, удастся понизить порядок этой системы еще на одну единицу и свести таким образом задачу к решению одного нелинейного неавтономного уравнения первого порядка. Это уравнение проанализировано численно внутри его естественной области определения.

Введение

Настоящая работа посвящена поиску автомодельных решений осесимметричной задачи теории идеальной пластичности при использовании критерия текучести Треска для напряженных состояний, соответствующих ребру поверхности текучести. Основополагающие результаты в этой области были получены в [1–4].

¹ Радаев Юрий Николаевич (radayev@ssu.samara.ru), Бахарева Юлия Николаевна, Рябова Юлия Николаевна, кафедра механики сплошных сред Самарского государственного университета, 443011, Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

В [1] исследована осесимметричная задача теории пластичности в предположении выполнения условия полной пластичности; доказана формальная статическая определимость и гиперболичность основных уравнений и найдены характеристические кривые. Позднее в работах [2, 3] было показано, что именно состояние полной пластичности и только оно позволяет сформулировать общую теорию идеальной пластичности с единым математическим аппаратом статически определенных уравнений гиперболического типа, соответствующим сдвиговой природе идеально пластического деформирования. Таким образом стала очевидной возможность обобщения (по крайней мере частичного) теории пластического плоского деформированного состояния на пространственный случай.

В дальнейшем была исследована пространственная задача при произвольном кусочно-линейном условии текучести и найдено, что как в пространственном, так и в осесимметричном случае на ребре кусочно-линейного условия текучести уравнения математической теории пластичности являются гиперболическими и имеют характеристические элементы, совпадающие с площадками максимальных касательных напряжений.

Любопытно отметить, что уравнения осесимметричной задачи теории идеальной пластичности для грани призмы Треска также являются гиперболическими, характеристические направления ориентированы так же, как и главные направления тензора напряжений, т.е. характеристики касаются главных направлений тензора напряжений.

Следующий шаг в исследовании уравнений математической теории пластичности сделан в [5]. Уравнения пространственной задачи также были рассмотрены при условии пластичности Треска и ассоциированного с ним закона течения для напряженных состояний, соответствующих ребру поверхности текучести. Было показано, что поля собственных векторов тензора напряжений, отвечающих наибольшему (или наименьшему) главному напряжению, необходимо будут расщепленными. Это важнейшее геометрическое свойство поля напряжений в пространственном состоянии пластических тел, установленное в [5], позволило исследовать трехмерную задачу математической теории пластичности с совершенно новых позиций (см. также [6]). Были найдены такие криволинейные координаты, что уравнения равновесия, преобразованные к новым координатам, свелись к трем интегрируемым уравнениям вдоль линий главных напряжений. Получены инварианты, сохраняющие свои значения вдоль траекторий главных напряжений. Установлена возможность отделения одной из пространственных переменных в нелинейных уравнениях пространственного

пластического равновесия. Выделены классы пространственных задач теории пластичности, для которых поля напряжений соответствуют ребру призмы Треска и необходимо являются расслоенными. Доказано, что интегрирование уравнений теории пластичности для задач этих классов сводится к отысканию канонических отображений пространственных областей. Был развит аппарат производящих функций в применении к плоскому и осесимметричному случаю.

В то время как теория плоского деформированного состояния достаточно хорошо развита и известны эффективные аналитические и численные методы решения задач, ничего подобного нельзя сказать об осесимметричной задаче.² Некоторые автомодельные решения, соответствующие ребру призмы Треска, рассматривались Р. Шиллом [7]. Автомодельные решения для скоростей, соответствующие граням кусочно-линейных условий текучести, приводятся в монографии [4, с. 89–94]. Известны также автомодельные решения осесимметричной задачи при условии текучести Мизеса.³ Здесь также отметим ряд работ [7–10], посвященных осесимметричной задаче математической теории пластичности.

Поиск автомодельных решений в представляемой работе реализован на основе соотношений пространственной задачи [5], сформулированных в изостатических координатах, с учетом осевой симметрии и возможности отделения еще одной неугловой изостатической координаты. Доказано, что осесимметричная задача теории пластичности допускает ряд автомодельных решений, когда в качестве автомодельных переменных выступают произведения степеней изостатических координат. При некоторых значениях параметров, участвующих в представлении автомодельного решения, удается понизить порядок этой системы еще на одну единицу и свести таким образом задачу к решению одного нелинейного неавтономного уравнения первого порядка.

²Это обстоятельство отмечалось еще Р. Хиллом в 1950 г., правда в применении к осесимметричной задаче, сформулированной на основе критерия текучести Мизеса, когда задача не является гиперболической (см.: Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехтеоретиздат, 1956. С. 301, 302). Неясно, как в принципе строить решения смешанных краевых задач таких, как вдавливание конуса или волочение проволоки. Известные осесимметричные распределения напряжений или приближенны, или получены обратными методами, а затем приведены в соответствие с физической сущностью явления.

³Построение этих автомодельных решений основывается на представлении функции течения $F(r, x_3)$ (вводимой для того, чтобы тождественно удовлетворялось условие несжимаемости) в виде произведения $F(r, x_3) = r^\nu f(\xi)$, где $\xi = x_3/r$ — автомодельная переменная.

1. Трехмерные уравнения математической теории пластичности для ребра призмы Треска

Общие уравнения трехмерной задачи математической теории пластичности для ребра призмы Треска исследованы, например, в работе [5]. Ниже приводятся необходимые для дальнейшего изложения уравнения в обозначениях, согласующихся с обозначениями указанной работы.

Рассмотрим уравнения равновесия для напряженных состояний, соответствующих ребру призмы Треска. Обозначим через $\boldsymbol{\sigma}$ тензор напряжений; $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$ — ортонормированный базис из собственных векторов тензора напряжений; $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — соответствующие собственные значения (главные напряжения); k — предел текучести при чистом сдвиге. Спектральное разложение тензора напряжений имеет вид:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_1 \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} + \sigma_2 \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \sigma_3 \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}. \quad (1.1)$$

В пространстве главных напряжений условие текучести Треска изображается поверхностью шестигранной призмы с ребрами

$$\sigma_1 \pm 2k = \sigma_2 = \sigma_3, \quad \sigma_1 = \sigma_2 \pm 2k = \sigma_3, \quad \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \pm 2k.$$

Для данного напряженного состояния, соответствующего ребру призмы Треска, всегда можно перенумеровать главные оси тензора напряжений так, чтобы выполнялось равенство

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \pm 2k.$$

Последнее условие означает, что главное напряжение σ_3 является либо наименьшим, либо наибольшим главным нормальным напряжением.

Так как $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$ — ортонормированный базис, то

$$\mathbf{l} \otimes \mathbf{l} + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} = \mathbf{I}, \quad (1.2)$$

где $\mathbf{I}$ — единичный тензор.

Учитывая соотношения (1.1), (1.2) и уравнение ребра призмы $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \pm 2k$, получим следующее выражение для тензора напряжений:

$$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_3 \pm 2k) \mathbf{I} \mp 2k \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}. \quad (1.3)$$

Таким образом, тензор напряжений полностью определяется скалярным полем σ_3 и единичным векторным полем $\mathbf{n}$.

Уравнение равновесия $\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$ после подстановки в него разложения (1.3) можно представить в следующем виде:

$$\operatorname{grad} \sigma_3 \mp 2k \operatorname{div}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) = \mathbf{0} \quad (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1). \quad (1.4)$$

Следовательно, задача о равновесии тела, напряженное состояние которого соответствует ребру призмы Треска, статически определима (поскольку имеется ровно три уравнения для определения трех неизвестных: собственного значения σ_3 и, например, двух углов, задающих ориентацию единичного вектора $\mathbf{n}$), если граничные условия заданы в напряжениях. Уравнения равновесия могут быть формально рассмотрены независимо от кинематических уравнений.

Обозначим через Σ безразмерное отношение σ_3 к $\mp 2k$ и приведем уравнение (1.4) к виду:

$$\text{grad}\Sigma + \text{div}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) = \mathbf{0} \quad (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1). \quad (1.5)$$

Можно показать, что уравнение (1.5) принадлежит к гиперболическому типу. Нормали к характеристическим поверхностям образуют конус с углом полураствора $\pi/4$ и осью, ориентированной вдоль вектора $\mathbf{n}$ (см. рис. 1). Характеристические поверхности являются также и поверхностями максимального касательного напряжения (поверхностями скольжения). Характеристическими являются не только поверхности скольжения, но и интегральные поверхности поля $\mathbf{n}$ (т.е. поверхности, составленные из интегральных кривых поля $\mathbf{n}$).

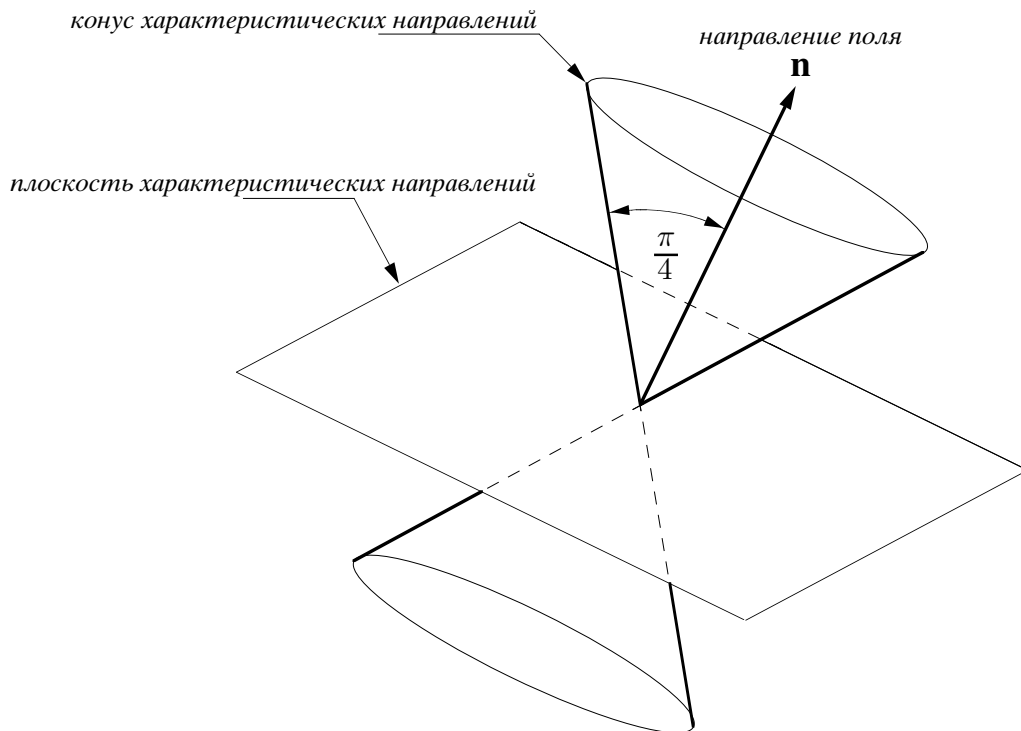


Рис. 1. Конус характеристических направлений в пространственной задаче теории пластичности (течение на ребре призмы Треска)

Отметим также еще одну инвариантную форму уравнения (1.5):

$$\nabla \Sigma + (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{n} + \mathbf{n}(\nabla \cdot \mathbf{n}) = \mathbf{0}. \quad (1.6)$$

Для единичного векторного поля справедлива формула

$$(\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{n} = -\mathbf{n} \times \text{rot} \mathbf{n}, \quad (1.7)$$

с помощью которой векторное уравнение (1.6) может быть также представлено в виде

$$\nabla \Sigma - \mathbf{n} \times \text{rot} \mathbf{n} + \mathbf{n} \text{div} \mathbf{n} = \mathbf{0}. \quad (1.8)$$

Преобразуем уравнение (1.5) к криволинейным координатам ξ^1, ξ^2, ξ^3 . Выбор координатной системы, наиболее подходящей для изучения трехмерных уравнений математической теории пластичности, будет указан ниже. Ковариантные компоненты векторного поля $\text{div}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})$ равны:

$$(\text{div}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}))_l = g^{-1/2} g_{kl} \frac{\partial(g^{1/2} n^k n^m)}{\partial \xi^m} + n^r n^s [rs, l] \quad (l = 1, 2, 3), \quad (1.9)$$

где g_{ij} — компоненты метрического тензора, $g = \det \|g_{ij}\|$, $[rs, l]$ — символы Кристоффеля первого рода. Через n^m обозначены контравариантные компоненты векторного поля $\mathbf{n}$.

Используя формулу (1.9), представим уравнение (1.5) в ковариантной форме:

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial \xi^l} + g^{-1/2} g_{kl} \frac{\partial(g^{1/2} n^k n^m)}{\partial \xi^m} + n^r n^s [rs, l] = 0. \quad (1.10)$$

2. Разделение переменных в пространственных уравнениях математической теории пластичности

В работе [6] было исследовано уравнение (1.5) сначала в предположении, что $\mathbf{n} \times \text{rot} \mathbf{n} = \mathbf{0}$ всюду в области пластического течения. Решение при этом было классифицировано как вырожденное.⁴ Было установлено, что выполнение условия $\mathbf{n} \times \text{rot} \mathbf{n} = \mathbf{0}$ возможно только, если $\mathbf{n}$ безвихревое векторное поле,⁵ т.е.

$$\mathbf{n} = \text{grad} f,$$

где f — потенциал поля. Оказалось также, что семейство поверхностей уровня потенциала $f(x_1, x_2, x_3)$ есть семейство эквидистантных, по отношению к некоторой фиксированной (базовой) поверхности уровня

⁴Мы называем этот случай вырожденным, подразумевая под этим тот факт, что вырожденному решению уравнений теории пластичности соответствуют прямые векторные линии поля $\mathbf{n}$.

⁵Доказательство этого утверждения приводится в работе [6].

$f(x_1, x_2, x_3) = c$, поверхностей. Более того в области вырожденного поля единственно возможными базовыми поверхностями уровня являются плоскость, цилиндр или сфера (или их части). Решения пространственных уравнений математической теории пластичности классифицируются в [6] как невырожденные, когда $\mathbf{n} \times \text{rot} \mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ всюду в пластической зоне. При одновременном выполнении условий $\mathbf{n} \times \text{rot} \mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ и $\mathbf{n} \cdot \text{rot} \mathbf{n} \neq 0$ никаких нетривиальных решений уравнения (1.8) получить нельзя. Следовательно, наибольший интерес представляет тот случай, когда $\mathbf{n} \cdot \text{rot} \mathbf{n} = 0$ и $\text{rot} \mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ всюду в пластической зоне. В этом случае векторные поля $\mathbf{n}$ будут расслоенными, и в дальнейшем исследовании они будут играть особую роль.

Поле напряжений в некоторой области назовем расслоенным (или слоистым), если существует семейство поверхностей, заполняющее эту область, такое, что векторное поле единичных нормалей к поверхностям данного семейства совпадает с полем $\mathbf{n}$ собственных векторов тензора напряжений. Для того чтобы векторное поле $\mathbf{n}$ было расслоенным в некоторой области, необходимо и достаточно, чтобы всюду в этой области выполнялось следующее соотношение:

$$\mathbf{n} \cdot \text{rot} \mathbf{n} = 0.$$

Сформулированное утверждение известно как теорема Якоби (см., например, [11, с. 10, 11]).

Воспользуемся расслоенностью векторного поля $\mathbf{n}$ и выберем криволинейные координаты ξ^m специальным образом: координатные поверхности $\xi^3 = \text{const}$ есть слои поля $\mathbf{n}$, а поверхности $\xi^1 = \text{const}$ и $\xi^2 = \text{const}$ — интегральные поверхности поля $\mathbf{n}$ (т.е. поверхности, составленные из интегральных кривых векторного поля $\mathbf{n}$). Строго регламентированным, таким образом, является лишь выбор координатных поверхностей $\xi^3 = \text{const}$. Дополнительно заметим, что поверхности $\xi^1 = \text{const}$ и $\xi^2 = \text{const}$ — характеристические для уравнения (1.5). При таком выборе криволинейных координат имеем: $g_{13} = 0$, $g_{23} = 0$, $n^1 = 0$, $n^2 = 0$, что позволяет существенно упростить уравнения (1.10):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi^1} \left(\Sigma - \frac{1}{2} \ln g_{33} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \xi^2} \left(\Sigma - \frac{1}{2} \ln g_{33} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \xi^3} \left(\Sigma - \frac{1}{2} \ln g_{33} + \frac{1}{2} \ln g \right) &= 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Уравнения (2.1) интегрируются вдоль линий главных напряжений. Инвариант $I_1 = \Sigma - \ln \sqrt{g_{33}}$ сохраняет свое значение на каждом из слоев

поля $\mathbf{n}$. Инвариант $I_2 = \Sigma - \ln \sqrt{g_{33}} + \ln \sqrt{g}$ не изменяется вдоль векторной линии поля $\mathbf{n}$. Таким образом, если напряженное состояние соответствует ребру призмы Треска, то поле главных направлений, определяющих ориентацию $\mathbf{n}$, необходимо является расслоенным, и, следовательно, в новых специальном образом подобранных координатах ξ^1, ξ^2, ξ^3 уравнения равновесия приводятся к трем интегрируемым соотношениям (2.1).

Необходимое и достаточное условие интегрируемости системы (2.1) состоит, как нетрудно заметить, в возможности разложения детерминанта g в произведение двух положительных функций:

$$g = G_1(\xi^1, \xi^2)G_2(\xi^3). \quad (2.2)$$

Три интегрируемых соотношения (2.1) эквивалентны одному соотношению (2.2). Таким образом, находится величина g , для которой разделяются пространственные переменные и которая представляет собой определитель, составленный из компонент метрического тензора специальным образом подобранной координатной системы ξ^1, ξ^2, ξ^3 , координатными линиями которой являются траектории главных нормальных напряжений.

В качестве примеров расслоенного поля напряжений можно привести осесимметричную задачу и задачу о плоской деформации. Действительно, любое осесимметричное, или плоское, векторное поле является расслоенным. Если ввести цилиндрические координаты r, φ, z , то слоями осесимметричного поля $\mathbf{n}$ будут поверхности, образованные вращением вокруг оси симметрии ортогональных полю $\mathbf{n}$ траекторий, расположенных в плоскости $\varphi = 0$. Слоями плоского векторного поля являются цилиндрические поверхности над ортогональными линиями поля $\mathbf{n}$.

Ясно также, что если поле напряжений допускает ортогональную изостатическую сетку ξ^1, ξ^2, ξ^3 , то оно является расслоенным, и соотношения (2.1) следует рассматривать как интегрируемые соотношения вдоль взаимно ортогональных линий главных напряжений.

3. Автомодельные решения осесимметричной задачи математической теории пластичности

Автомодельные решения уравнений теории пластичности удобнее всего искать, используя специальные переменные ξ^1, ξ^2, ξ^3 и учитывая возможность отделения координаты ξ^3 .

В случае осевой симметрии формулы, связывающие декартовы координаты x_1, x_2, x_3 и криволинейные координаты ξ^1, ξ^2, ξ^3 , следует,

очевидно, искать в следующем виде:

$$x_1 = f(\xi^1, \xi^3) \cos \xi^2, \quad x_2 = f(\xi^1, \xi^3) \sin \xi^2, \quad x_3 = h(\xi^1, \xi^3). \quad (3.1)$$

Здесь ξ^i — специальные криволинейные координаты, определяемые по векторному полю $\mathbf{n}$, функции f и h подлежат определению, ξ^2 — угловая координата.

Так как криволинейная координатная сетка характеризуется свойствами $g_{13} = 0$, $g_{23} = 0$, а детерминант g разлагается в произведение двух функций (см. формулу (2.2)), то отображающие функции (3.1) необходимо должны удовлетворять системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial \xi^1} \frac{\partial f_1}{\partial \xi^3} + \frac{\partial f_2}{\partial \xi^1} \frac{\partial f_2}{\partial \xi^3} + \frac{\partial f_3}{\partial \xi^1} \frac{\partial f_3}{\partial \xi^3} = 0, \\ \frac{\partial f_1}{\partial \xi^2} \frac{\partial f_1}{\partial \xi^3} + \frac{\partial f_2}{\partial \xi^2} \frac{\partial f_2}{\partial \xi^3} + \frac{\partial f_3}{\partial \xi^2} \frac{\partial f_3}{\partial \xi^3} = 0, \\ \left(\frac{\partial f_k}{\partial \xi^3} \frac{\partial f_k}{\partial \xi^3} \right) \left[\left(\frac{\partial f_p}{\partial \xi^1} \frac{\partial f_p}{\partial \xi^1} \right) \left(\frac{\partial f_r}{\partial \xi^2} \frac{\partial f_r}{\partial \xi^2} \right) - \left(\frac{\partial f_s}{\partial \xi^1} \frac{\partial f_s}{\partial \xi^2} \right)^2 \right] = G_1(\xi^1, \xi^2) G_2(\xi^3), \end{cases} \quad (3.2)$$

где $f_1 = f(\xi^1, \xi^3) \cos \xi^2$, $f_2 = f(\xi^1, \xi^3) \sin \xi^2$, $f_3 = h(\xi^1, \xi^3)$. Тогда поверхности $\xi^3 = \text{const}$ можно принять в качестве слоев поля $\mathbf{n}$ и затем с помощью интегралов (2.1) восстановить поле напряжений.

Подставим выражения (3.1) в систему дифференциальных уравнений (3.2). В результате находим:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \xi^1} \frac{\partial f}{\partial \xi^3} + \frac{\partial h}{\partial \xi^1} \frac{\partial h}{\partial \xi^3} = 0, \\ \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \xi^3} \right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial \xi^3} \right)^2 \right] \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \xi^1} \right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial \xi^1} \right)^2 \right] f^2 = G_1(\xi^1) G_2(\xi^3). \end{cases} \quad (3.3)$$

В этой системе уравнений у функции G_1 исключается зависимость от угловой координаты ξ^2 в силу осевой симметрии. Будем искать автомодельное решение осесимметричной задачи математической теории пластичности в форме

$$f = \xi^{1\alpha} \xi^{3\beta} F(\xi), \quad h = \xi^{1\alpha} \xi^{3\beta} H(\xi),$$

где $\xi = \xi^1 / \xi^3$ — автомодельная переменная; α, β — некоторые показатели. Тогда система уравнений в частных производных (3.3) сведется к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений (штрих

обозначает дифференцирование по автомодельной переменной ξ):

$$\left\{ \begin{aligned} & \alpha\beta(F^2 + H^2) + \xi(\beta - \alpha)(FF' + HH') - \xi^2(F'^2 + H'^2) = 0, \\ & \left[\xi^4(F'^2 + H'^2)^2 + 2\xi^3(\alpha - \beta)(F'^2 + H'^2)(FF' + HH') + \right. \\ & \quad + \xi^2(\alpha^2 + \beta^2)(F^2 + H^2)(F'^2 + H'^2) + \\ & \quad \left. + 2\alpha\beta\xi(\beta - \alpha)(F^2 + H^2)(FF' + HH') - \right. \\ & \quad \left. - 4\alpha\beta\xi^2(FF' + HH')^2 + \alpha^2\beta^2(F^2 + H^2)^2 \right] F^2 = \frac{\xi^2 G_1(\xi^1) G_2(\xi^3)}{\xi^{1-6\alpha} \xi^{3-6\beta-4}}. \end{aligned} \right. \quad (3.4)$$

Анализ этой системы показывает, что при $\alpha = \beta$ система (3.4) существенно упрощается и принимает форму:

$$\left\{ \begin{aligned} & \alpha^2(F^2 + H^2) - \xi^2(F'^2 + H'^2) = 0, \\ & \left[\xi^4(F'^2 + H'^2)^2 + 2\xi^2\alpha^2(F^2 + H^2)(F'^2 + H'^2) - \right. \\ & \quad \left. - 4\alpha^2\xi^2(FF' + HH')^2 + \alpha^4(F^2 + H^2)^2 \right] F^2 = \frac{G_1(\xi^1)G_2(\xi^3)}{(\xi^1\xi^3)^{6\alpha-2}}. \end{aligned} \right. \quad (3.5)$$

Так как G_1 и G_2 не конкретизированы, то при поиске автомодельных решений отношение $[G_1(\xi^1)G_2(\xi^3)] / (\xi^1\xi^3)^{6\alpha-2}$ можно представить в виде $C\xi^{\mu+2}$, где C есть некоторая постоянная, а μ — показатель.

Систему (3.5) можно несколько упростить. Производя необходимые преобразования, в результате приходим к

$$\left\{ \begin{aligned} & \alpha^2(F^2 + H^2) = \xi^2(F'^2 + H'^2), \\ & (F'H - FH')^2 = \frac{C\xi^\mu}{4\alpha^2 F^2}. \end{aligned} \right. \quad (3.6)$$

Исследуем последнюю систему, вводя в плоскости F, H полярные координаты:

$$F = \rho \cos \iota, \quad H = \rho \sin \iota. \quad (3.7)$$

Подставим выражения (3.7) в систему (3.6). После преобразований получим систему в полярных координатах ρ, ι , которая подлежит интегрированию:

$$\left\{ \begin{aligned} & \iota'^2 = \frac{C\xi^\mu}{\rho^6 4\alpha^2 \cos^2 \iota}, \\ & \iota'^2 = \frac{\alpha^2}{\xi^2} - \frac{\rho'^2}{\rho^2}. \end{aligned} \right. \quad (3.8)$$

Если разделить первое уравнение полученной системы на второе уравнение этой же системы, то зависимость от автомодельной переменной ξ при $\mu = -2$ будет устранена и останется одно уравнение первого порядка относительно полярных координат ρ и ι :

$$1 + \left(\frac{d\rho}{\rho d\iota} \right)^2 = \frac{4\alpha^4 \rho^6 \cos^2 \iota}{C}. \quad (3.9)$$

Произведем далее замену переменной по формуле: $\ln \rho = W$. Тогда дифференциальное уравнение (3.9) примет вид

$$1 + \left(\frac{dW}{d\iota} \right)^2 = \frac{4\alpha^4}{C} e^{6W} \cos^2 \iota. \quad (3.10)$$

Обозначив через l^2 константу $4\alpha^4/C$, получим

$$1 + \left(\frac{dW}{d\iota} \right)^2 = l^2 e^{6W} \cos^2 \iota. \quad (3.11)$$

Совершим еще раз замену переменных по формулам $e^{6W} = v^s$ и $\sin \iota = u$, где показатель s будет определен ниже. Таким образом, вместо (3.11) имеем уравнение:

$$\frac{1}{\cos^2 \iota} + \frac{s^2}{36v^2} \left(\frac{dv}{du} \right)^2 = l^2 v^s. \quad (3.12)$$

С целью упрощения последнего дифференциального уравнения положим $s = -2$ и получим

$$\left(\frac{dv}{du} \right)^2 = 3^2 \left(l^2 - \frac{v^2}{1-u^2} \right). \quad (3.13)$$

Обозначим через $\bar{v}$ безразмерное отношение v/l , тогда уравнение (3.13) примет вид

$$\left(\frac{d\bar{v}}{du} \right)^2 = 3^2 \left(1 - \frac{\bar{v}^2}{1-u^2} \right). \quad (3.14)$$

Полученное уравнение не содержит никаких параметров и в чистом виде определяет форму автомодельного решения.

В уравнении (3.14) совершим замену переменных $\bar{v} = \sin \tau \sqrt{1-u^2}$. Тогда, возвращаясь к угловой переменной ι , получаем наиболее простую и симметричную форму этого уравнения:

$$\frac{d\tau}{d\iota} = \pm \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{3} + \operatorname{tg} \tau \operatorname{tg} \iota. \quad (3.15)$$

Обратимся снова к системе (3.4). После ряда преобразований ее можно представить как

$$\begin{cases} \alpha\beta(F^2 + H^2) + \xi(\beta - \alpha)(FF' + HH') - \xi^2(F'^2 + H'^2) = 0, \\ (FH' - HF')^2 = \frac{G_1(\xi^1)G_2(\xi^3)}{(\alpha + \beta)^2 \xi^{1-6\alpha} \xi^{3-6\beta-4} F^2}. \end{cases} \quad (3.16)$$

Удобно принять для G_1 и G_2 следующие выражения:

$$G_1(\xi^1) = C_1 \xi^{1-6\alpha+\mu}, \quad G_2(\xi^3) = C_2 \xi^{3-6\beta-\mu-4},$$

где C_1 и C_2 — некоторые константы, а μ — показатель. Положим $C = C_1 C_2$. Проведем рассуждения, аналогичные тем, которые были проведены выше для случая $\alpha = \beta$. Снова положим $\mu = -2$ с целью устранения переменной ξ . В результате получим дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{\alpha\beta(\alpha + \beta)^2 e^{6W} \cos^2 \iota}{C} + \frac{(\beta^2 - \alpha^2) e^{3W} \cos \iota}{\sqrt{C}} \frac{dW}{d\iota} = 1 + \left(\frac{dW}{d\iota} \right)^2. \quad (3.17)$$

Продолжим исследование этого дифференциального уравнения; введем следующие обозначения:

$$l_1 = \frac{\alpha\beta(\alpha + \beta)^2}{C}, \quad l_2 = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\sqrt{C}},$$

получим уравнение

$$l_1 e^{6W} \cos^2 \iota + l_2 e^{3W} \cos \iota \frac{dW}{d\iota} = 1 + \left(\frac{dW}{d\iota} \right)^2, \quad (3.18)$$

в котором заменим переменную по формуле $e^{3W} = z^s$ (показатель s будет определен ниже). Тогда дифференциальное уравнение (3.17) приобретает вид

$$l_1 z^{2s} \cos^2 \iota + l_2 z^s \cos \iota \frac{s}{3z} \frac{dz}{d\iota} = 1 + \frac{s^2}{3^2 z^2} \left(\frac{dz}{d\iota} \right)^2. \quad (3.19)$$

С целью упрощения (3.19), полагая $s = -1$, получим

$$l_1 \cos^2 \iota - \frac{l_2 \cos \iota}{3} \frac{dz}{d\iota} = z^2 + 3^{-2} \left(\frac{dz}{d\iota} \right)^2. \quad (3.20)$$

Совершив замену переменной по формуле $\sin \iota = u$, тогда последнее уравнение примет вид

$$\left(\frac{dz}{du} \right)^2 = 3^2 \left(l_1 - \frac{l_2}{3} \frac{dz}{du} - \frac{z^2}{1 - u^2} \right). \quad (3.21)$$

Если α и β одного знака, то $l_1 > 0$. Обозначим через $\bar{v}$ безразмерное отношение $z/\sqrt{l_1}$, тогда уравнение (3.21) примет форму

$$\left(\frac{d\bar{v}}{du} \right)^2 = 3^2 \left(1 - \text{sign}(\beta + \alpha) \frac{\beta - \alpha}{3\sqrt{\alpha\beta}} \frac{d\bar{v}}{du} - \frac{\bar{v}^2}{1 - u^2} \right). \quad (3.22)$$

Разрешим это уравнение относительно производной:

$$\frac{2}{3} \frac{d\bar{v}}{du} = -\text{sign}(\beta + \alpha) \frac{\beta - \alpha}{\sqrt{\alpha\beta}} \pm \sqrt{\frac{(\beta - \alpha)^2}{\alpha\beta} + 4 \left(1 - \frac{\bar{v}^2}{1 - u^2} \right)}. \quad (3.23)$$

Естественной областью определения полученного уравнения будет внутренность эллипса

$$u^2 + \frac{\bar{v}^2}{\gamma_1^2} < 1 \quad \left(\gamma_1 = \sqrt{1 + \frac{(\beta - \alpha)^2}{4\alpha\beta}} \right).$$

Если α и β разных знаков, то $l_1 < 0$. Определяя в этом случае $\bar{v}$ как безразмерное отношение $z/\sqrt{-l_1}$, приходим к уравнению

$$\left(\frac{d\bar{v}}{du} \right)^2 = 3^2 \left(-1 - \text{sign}(\beta + \alpha) \frac{\beta - \alpha}{3\sqrt{-\alpha\beta}} \frac{d\bar{v}}{du} - \frac{\bar{v}^2}{1 - u^2} \right), \quad (3.24)$$

разрешив которое относительно производной, получаем

$$\frac{2}{3} \frac{d\bar{v}}{du} = -\text{sign}(\beta + \alpha) \frac{\beta - \alpha}{\sqrt{-\alpha\beta}} \pm \sqrt{\frac{(\beta - \alpha)^2}{-\alpha\beta} - 4 \left(1 + \frac{\bar{v}^2}{1 - u^2} \right)}. \quad (3.25)$$

Естественной областью определения этого уравнения будет внутренность эллипса

$$u^2 + \frac{\bar{v}^2}{\gamma_2^2} < 1 \quad \left(\gamma_2 = \sqrt{-1 - \frac{(\beta - \alpha)^2}{4\alpha\beta}} \right).$$

Уравнения (3.14) и (3.22) представляют собой нелинейные неавтономные уравнения, интегралы которых пока получить не удастся. Ясно, что эти уравнения могут быть проанализированы численно. Так, на рис. 2, 3 изображены интегральные кривые уравнения (3.14)

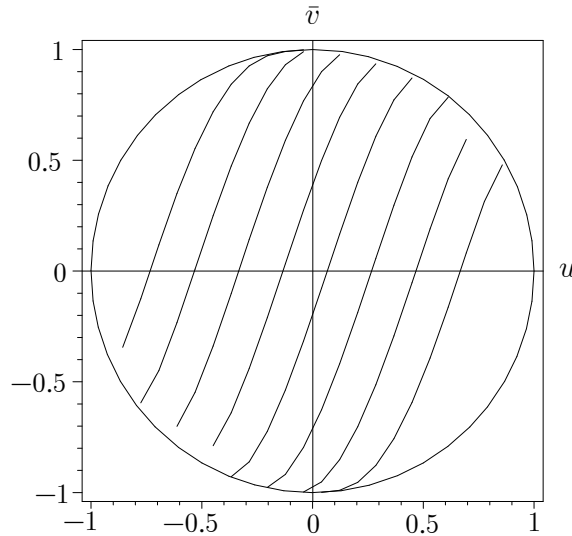


Рис. 2. Интегральные кривые уравнения (3.14), имеющие положительный наклон

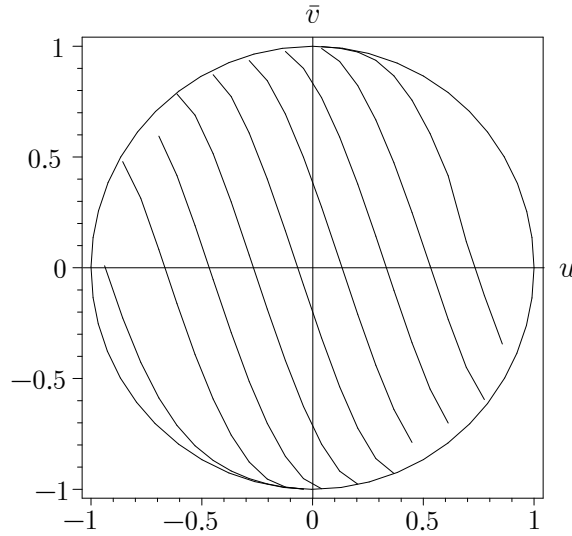


Рис. 3. Интегральные кривые уравнения (3.14), имеющие отрицательный наклон

внутри естественной области определения $u^2 + \bar{v}^2 < 1$.

Теперь попытаемся найти другие возможные формы автономных решений. Будем искать решения системы (3.3) в предположении, что автономная переменная представляет собой произведение степеней изостатических переменных с различными показателями:

$$f = \xi^1 \alpha \xi^3 \beta F(\xi), \quad h = \xi^1 \alpha_1 \xi^3 \beta_1 H(\xi), \quad (3.26)$$

где $\xi = \xi^1 \gamma \xi^3 \delta$ — автономная переменная; $\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1, \gamma, \delta$ — некоторые показатели.

Тогда при условии, что существует показатель ω такой, что

$$\xi^\omega = \xi^1 \alpha_1 - \alpha \xi^3 \beta_1 - \beta, \quad (3.27)$$

система двух уравнений в частных производных (3.3) сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \alpha \beta F^2 + \xi (\alpha \delta + \gamma \beta) F F' + \xi^2 \gamma \delta F'^2 + \\ + \xi^{2\omega} [\alpha_1 \beta_1 H^2 + \xi (\alpha_1 \delta + \beta_1 \gamma) H H' + \xi^2 \gamma \delta H'^2] = 0, \\ \left(F H' - H F' + \frac{\omega}{\xi} H F \right)^2 = \frac{G_1(\xi^1) G_2(\xi^3)}{(\alpha \delta - \beta \gamma)^2 \xi^{1-4\alpha+2\alpha_1-2} \xi^{3-4\beta+2\beta_1-2} \xi^2 F^2}, \end{cases} \quad (3.28)$$

где в силу условия (3.27) $\alpha_1 = \alpha + \gamma \omega$, $\beta_1 = \beta + \delta \omega$, а остальные показатели независимы.

С целью устранения переменных ξ^1 и ξ^3 в (3.28) представим G_1 и G_2 в следующем виде:

$$G_1(\xi^1) = C_1 \xi^{1-4\alpha+2\alpha_1+\gamma(\mu+1)-2}, \quad G_2(\xi^3) = C_2 \xi^{3-4\beta+2\beta_1+\delta(\mu+1)-2},$$

где C_1 и C_2 — некоторые положительные константы, а μ — некоторый показатель.

Преобразуем полученную систему (3.28), вводя в плоскости $\xi^{-\omega/2}F$, $\xi^{\omega/2}H$ полярные координаты:

$$\xi^{-\omega/2}F = \rho \cos \iota, \quad \xi^{\omega/2}H = \rho \sin \iota.$$

Положим $C = C_1 C_2$; получим систему вида:

$$\begin{cases} \alpha\beta\rho^2 + (\alpha\delta + \gamma\beta)\omega\rho^2/2 + \gamma\delta\omega^2\rho^2/4 + \\ + \xi[(\alpha\delta + \beta\gamma + \omega\gamma\delta)\rho\rho'] + \xi^2\gamma\delta(\rho'^2 + \rho^2\iota'^2) = 0, \\ \iota'^2 = \frac{C\xi^{\mu-\omega}}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2\rho^6 \cos^2 \iota}. \end{cases} \quad (3.29)$$

Дальнейшие рассуждения в принципе не отличаются от приведенных выше. Автомодельную переменную ξ удастся устранить, положив $\mu = \omega - 2$; в результате порядок системы понижается на одну единицу и получается дифференциальное уравнение первого порядка, совпадающее с уравнением (3.18):

$$l_1 e^{6W} \cos^2 \iota + l_2 e^{3W} \cos \iota \frac{dW}{d\iota} = 1 + \left(\frac{dW}{d\iota} \right)^2, \quad (3.30)$$

но постоянные коэффициенты l_1 и l_2 определяются следующим образом:

$$l_1 = \frac{-\left(\alpha\beta + \frac{\omega}{2}(\alpha\delta + \beta\gamma) + \frac{\omega^2}{4}\gamma\delta\right)(\alpha\delta - \beta\gamma)^2}{C\gamma\delta},$$

$$l_2 = \frac{-(\alpha\delta + \beta\gamma + \omega\gamma\delta)(\alpha\delta - \beta\gamma)}{\sqrt{C}\gamma\delta}.$$

Таким образом одно уравнение (3.20) по существу описывает все рассмотренные в представляемой работе автомодельные решения осесимметричной задачи.

После того, как определена зависимость функций F и H от автомодельной переменной ξ , разыскание главных осей напряжений и величин главных напряжений не представляет труда. Действительно, главное направление, соответствующее наибольшему (наименьшему) главному напряжению, определяется как касательное к траектории $\xi^1 = \text{const}$ и вычисляется с помощью дифференцирования соотношений (3.1) по переменной ξ^3 . Вычислением метрики, соответствующей преобразованию координат (3.1), на основании (2.1) может быть найдено распределение главного напряжения σ_3 .

Литература

- [1] Ишлинский А.Ю. Осесимметрическая задача пластичности и проба Бринелля // Прикл. матем. и механика. 1944. Т. 8. Вып. 3. С. 201–224.⁶
- [2] Ивлев Д.Д. Об общих уравнениях теории идеальной пластичности и статики сыпучих сред // Прикл. матем. и механика. 1958. Т. 22. Вып. 1. С. 90–96.
- [3] Ивлев Д.Д. О соотношениях, определяющих пластическое течение при условии пластичности Треска, и его обобщениях // Докл. АН СССР. 1959. Т. 124. №3. С. 546–549.
- [4] Ивлев Д.Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 232 с.
- [5] Радаев Ю.Н. О канонических преобразованиях Пуанкаре и инвариантах уравнений пластического равновесия // Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. 1990. №1. С. 86–94.
- [6] Радаев Ю.Н. К теории трехмерных уравнений математической теории пластичности // Изв. РАН. Мех. тверд. тела. 2003. №5.
- [7] Шилд Р.Т. О пластическом течении металлов в условиях осевой симметрии // Сб. переводов "Механика". 1957. №1. С. 102–122.
- [8] Ивлев Д.Д. Об одном частном решении общих уравнений теории идеальной пластичности в цилиндрических координатах при условии пластичности Треска // Изв. АН СССР. ОТН мех. и машиностроения. 1959. №1. С. 132–133.
- [9] Ивлев Д.Д. К теории осесимметричного напряженного состояния при условии пластичности Треска // Изв. АН СССР. ОТН мех. и машиностроения. 1959. №6. С. 112–114.
- [10] Ивлев Д.Д. О вдавливании тонкого тела вращения в пластическое полупространство // Прикл. мех. и техн. физика. 1960. №4. С. 75–78.
- [11] Ивлев Д.Д., Мартынова Т.Н. Об условии полной пластичности для осесимметричного состояния // Прикл. мех. и техн. физика. 1963. №3. С. 102–104.
- [12] Аминов Ю.А. Геометрия векторного поля. М.: Наука, 1990. 208 с.

⁶Статья воспроизводится также в книге: Ишлинский А. Ю. Прикладные задачи механики. Т. I. Механика вязкопластических и не вполне упругих тел. М.: Наука, 1986. С. 17–42.

SELF-SIMILAR SOLUTIONS OF AXIALLY-SYMMETRIC PROBLEM OF THE MATHEMATICAL THEORY OF PLASTICITY

© 2003 Y.N. Radayev, Y.N. Bakhareva, Y.N. Ryabova⁷

The equations of axially-symmetric problem of the mathematical theory of plasticity are considered in the case a stress state corresponds to an edge of the Tresca prism. The Tresca yield criterion and associated flow rule are used to formulate the basic equations. The hyperbolic equilibrium equations which formally can be treated independently from kinematic equations are represented in the curvilinear co-ordinate net of the stress principal lines. The system of two ordinary differential equations is then derived by introducing a new variable called as the self-similar variable. The existence of self-similar solutions can be proved when the self-similar variable being a product of power function of isostatic co-ordinates. Supposing special values for parameters involved in self-similar solution, the problem is shown can be reduced to obtaining solution of a non-linear non-autonomous ordinary differential equation. This equation is analyzed numerically in the domain, where its right-hand side is naturally determined.

Поступила в редакцию 27/IV/2003;
в окончательном варианте — 19/V/2003.

⁷ Radayev Yuri Nickolaevich (radayev@ssu.samara.ru), Bakhareva Yuliya Nickolaevna, Ryabova Yuliya Nickolaevna, Dept. of Continuum Mechanics, Samara State University, Samara, 443011, Russia.