УДК 514.76

КАНОНИЧЕСКОЕ ТОРОИДАЛЬНОЕ РАССЛОЕНИЕ НАД НЕЧЕТНОМЕРНОЙ БАЗОЙ[1]

 А.В. Савинов[2]

Изучается геометрия главных T^1-расслоений над почти контактным многообразием. Доказано, что на пространстве такого расслоения канонически индуцируется почти эрмитова структура. Эта структура однозначно определяется так называемой обобщенной формой Риччи. Мы вычисляем эту форму в явном виде. Используя этот результат, мы получаем ряд важных свойств канонических почти эрмитовых структур, включая их свойства кривизны.

1. Почти эрмитовы структуры

Пусть M — связное гладкое многообразие размерности $\mathtt{dim}(M) = 2n$, $\mathcal{X}(M)$ — модуль гладких векторных полей на M; $g = \langle .,. \rangle$ — риманова метрика на M.

Определение 1 [4]. *Почти комплексной структурой* на M называется поле тензора J типа $(1,1)$ такого, что $J = -\mathrm{id}$.

Определение 2 [1]. *Почти эрмитовой структурой* (короче $\mathcal{AH}$-*структурой*) называется пара $\{J, g = \langle .,. \rangle\}$, где J — почти комплексная структура, g — риманова метрика, причем $\langle JX, JY \rangle = \langle X, Y \rangle$ $\forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$.

Многообразие, на котором задана почти эрмитова структура, называется *почти эрмитовым многообразием.* На каждом таком многообразии определена 2-форма $\Theta(X,Y) = \langle JX, JY \rangle$ $\forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$, которая называется *фундаментальной формой структуры.*

Задание $\mathcal{AH}$-структуры на M равносильно заданию в $\mathcal{X}(M)$ полу-

[1] Представлена доктором физико-математических наук профессором Ю.Н. Радаевым.

[2] Савинов Александр Валерьевич, кафедра геометрии Московского педагогического государственного университета, 107140, Москва, Краснопрудная, 14.

торалинейной формы $H(X,Y) = \langle X,Y\rangle + \sqrt{-1}\Omega(X,Y)$, которая называется *эрмитовой метрикой.*

Обозначим через $\mathcal{X}^{\mathbb{C}}(M)$ комплексификацию модуля $\mathcal{X}(M)$, т.е. $\mathcal{X}^{\mathbb{C}}(M) = \mathbb{C}\otimes\mathcal{X}(M)$. В модуле $\mathcal{X}^{\mathbb{C}}(M)$ определен оператор τ комплексного сопряжения, а также определены два взаимно дополнительных проектора $\sigma = \frac{1}{2}(\mathrm{id} - \sqrt{-1}J)$, $\bar{\sigma} = \frac{1}{2}(\mathrm{id} + \sqrt{-1}J)$ на собственные подмодули $D_J^{\sqrt{-1}}$ и $D_J^{-\sqrt{-1}}$ оператора J (точнее $J^{\mathbb{C}}$) с собственными значениями $\sqrt{-1}$ и $-\sqrt{-1}$, т.е.

$$\mathcal{X}^{\mathbb{C}}(M) = D_J^{\sqrt{-1}} \oplus D_J^{-\sqrt{-1}},$$

причем $\bar{\sigma} = \tau\circ\sigma$. Зафиксируем точку $m\in M$ и выберем в $\mathbb{C}$-модуле $T_p(M)$ ортонормированный репер $\{p, e_1, \dots, e_n\}$. С помощью этого репера можно построить еще два репера:

1) ортонормированный репер $\{p, e_1, \dots, e_n, Je_1, \dots, Je_n,\}$ $\mathbb{R}$-модуля $T_p(M)$, который называется *вещественно-адаптированным репером* или *RA-репером*;

2) ортонормированный репер $\mathbb{C}$-модуля $T_p(M)$ $\{p, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \varepsilon_{\hat{1}}, \dots, \varepsilon_{\hat{n}}\}$, где $\varepsilon_a = \sqrt{2}\sigma(e_a)$, $\varepsilon_{\hat{a}} = \sqrt{2}\bar{\sigma}(e_a)$, который называется *репером, адаптированным структуре* или *A-репером* [1].

В A-репере будем иметь:

$$(J^i_j) = \begin{pmatrix} \sqrt{-1}I_n & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1}I_n \end{pmatrix}; \qquad (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Задание $\mathcal{AH}$-структуры на M равносильно заданию G-структуры в главном расслоении всех комплексных реперов многообразия M со структурной группой $U(n)$, которая называется *присоединенной G-структурой.*

Будем считать, что индексы $i, j, k, \ldots = 1, \ldots, 2n$; $a, b, c, \ldots = 1, \ldots, n$, $\hat{a} = a + n$. В работе [4] была получена первая группа структурных уравнений $\mathcal{AH}$-структуры на пространстве присоединенной G-структуры:

$$\begin{aligned} &\omega^a_{\hat{b}} = -\tfrac{\sqrt{-1}}{2}J^i_{j,k}; \qquad \omega^{\hat{a}}_b = \tfrac{\sqrt{-1}}{2}J^i_{j,k};\\ &1)\ \ d\omega^a = \omega^a_b\wedge\omega^b + B^{ab}{}_c\omega^c\wedge\omega_b + B^{abc}\omega_b\wedge\omega_c;\\ &2)\ \ d\omega_a = -\omega^b_a\wedge\omega_b + B_{ab}{}^c\omega_c\wedge\omega^b + B_{abc}\omega^b\wedge\omega^c, \end{aligned} \tag{1.2}$$

где ω^i, ω^i_j — компоненты форм смещения и римановой связности соответственно;

$$\begin{aligned} &B^{abc} = \tfrac{\sqrt{-1}}{2}J^a_{[\hat{b},\hat{c}]}, \quad B_{abc} = -\tfrac{\sqrt{-1}}{2}J^{\hat{a}}_{[b,c]},\\ &B^{ab}{}_c = -\tfrac{\sqrt{-1}}{2}J^a_{\hat{b},c}, \quad B_{ab}{}^c = \tfrac{\sqrt{-1}}{2}J^{\hat{a}}_{b,\hat{c}}, \end{aligned} \tag{1.3}$$

где $J^i_{j,k}$ — компоненты ковариантного дифференциала тензора J относительно римановой связности.

Известно, что набор функций B^{abc}, B_{abc},$B^{ab}{}_{c}$, $B_{ab}{}^{c}$ определяют на многообразии M тензоры, которые называются *структурными тензорами первого* и *второго рода*, и *виртуальными тензорами первого* и *второго рода* соответственно. Причем справедливы соотношения: $\overline{B^{abc}} = B_{abc}$, $\overline{B^{ab}{}_{c}} = B_{ab}{}^{c}$

С учетом классификации $\mathcal{AH}$-структур Греем и Хервеллы имеет место следующая теорема [1]:

Теорема 1.1. $\mathcal{AH}$-структура является:

— *$\mathcal{G}_2$-структурой Видала-Хервеллы* тогда и только тогда, когда $B^{[abc]} = 0$;

— *$\mathcal{G}_1$-структурой Видала-Хервеллы* тогда и только тогда, когда $B^{abc} = B^{[abc]}$;

— *эрмитовой* (короче $\mathcal{H}$-) *структурой* тогда и только тогда, когда $B^{abc} = 0$;

— принадлежит классу $\mathcal{W}_4$ тогда и только тогда, когда $B^{abc} = 0$, $B^{ab}{}_{c} = \alpha^{a}\delta^{b}_{c}$;

— принадлежит классу $\mathcal{W}_3$ тогда и только тогда, когда $B^{abc} = B^{ab}{}_{a} = 0$;

— *келеровой* (короче $\mathcal{K}$-) *структурой* тогда и только тогда, когда $B^{ab}{}_{c} = B^{abc} = 0$.

2. Почти контактные структуры

Определение 3 [4]. *Почти контактной метрической структурой* (*$\mathcal{AC}$-структурой*) на гладком многообразии M называется совокупность $\{\Phi, g = \langle ., . \rangle, \xi, \eta\}$ тензорных полей на этом многообразии, где Φ — тензор типа (1,1), называемый *структурным эндоморфизмом*, g — риманова метрика, x_i и η — вектор и ковектор, называемые соответственно *структурным вектором* и *контактной формой.* При этом выполняются условия:

$$\begin{aligned}
&1)\quad \Phi(\xi) = 0;\\
&2)\quad \eta \circ \Phi = 0;\\
&3)\quad \eta(\xi) = 1;\\
&4)\quad \Phi^2 = -\mathtt{id} + \xi \otimes \eta;\\
&5)\quad \langle \Phi X,\ \Phi Y\rangle = \langle X,\ Y\rangle - \eta(X)\eta(Y).
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Необходимым условием существования на многообразии $\mathcal{AC}$-структуры являются его нечетномерность и ориентируемость. Многообразие, на котором фиксирована $\mathcal{AC}$-структура, называется *$\mathcal{AC}$-многообразием.* На $\mathcal{AC}$-многообразии определена форма $\Theta(X, Y) = \langle X,\ \Phi Y\rangle$, где $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, которая называется *фундаментальной формой.*

Определение 4. $\mathcal{AC}$-структура $\{\Phi,\ g,\ \xi,\ \eta\}$ на многообразии P называется:

— *нормальной*, если $2N_\Phi + d\eta \otimes \xi = 0$, где N_Φ — тензор Нейенхейса оператора Φ, который вычисляется по формуле:

$$4N_\Phi(X, Y) = \Phi^2[X, Y] + [\Phi X,\ \Phi Y] - \Phi[\Phi X,\ Y] - \Phi[X,\ \Phi Y];$$

— *контактной метрической* (C-) или *почти сасакиевой*, если $d\eta = \Theta$;
— $\mathcal{K}$-*контактной*, если она почти сасакиева и ее структурная форма η является формой Киллинга;
— *квазисасакиевой*, если она нормальна и имеет замкнутую фундаментальную форму;
— *сасакиевой*, если нормальна и контактна. Это равносильно тому, что $\nabla_X(\Phi)Y = \eta(Y)X - \langle X,\ Y\rangle\,\xi,\ X,\ Y \in \mathrm{X}(M)$, где ∇ — риманова связность метрики g;
— *почти сасакиевой*, если ее фундаментальная и структурная формы замкнуты;
— *слабо косимплектической*, если фундаментальная и структурная формы являются формами Киллинга;
— *точнейше косимплектической*, если ее фундаментальная форма является формой Киллинга и структурная форма замкнута;
— *косимплектической*, если ее фундаментальная и структурная формы параллельны в римановой связности.

Пусть $\{\Phi, g = \langle .,.\rangle\,, \xi, \eta\}$ — $\mathcal{AC}$-структура на многообразии P, $\dim P = 2n + 1$. Тогда в модуле $\mathcal{X}(P)$ внутренним образом определены два взаимно дополнительных проектора $\mathtt{m} = \eta \otimes \xi$ и $\mathtt{l} = \mathtt{id} - \mathtt{m} = -\Phi^2$. Следовательно, $\mathcal{X}(P) = \mathcal{L} \oplus \mathcal{M}$, где $\mathcal{M} = \mathtt{Im}\ \mathtt{m}$, $\mathcal{L} = \mathtt{Im}\ \mathtt{l} = \ker\ \eta$. Распределения $\mathcal{M}$ и $\mathcal{L}$ инвариантны относительно Φ и взаимно ортогональны. На распределении $\mathcal{L}$ пара $\{\Phi|_{\mathcal{L}},\ g|_{\mathcal{L}}\}$ определяет почти эрмитову структуру, поэтому $\mathcal{L}$ можно рассматривать как эрмитово векторное расслоение над P с метрикой $H(X, Y) = \langle X, Y\rangle + \sqrt{-1}\,\langle X, \Phi Y\rangle$, где $X,\ Y \in \mathcal{X}(P)$. Тогда $\mathcal{L}^{\mathbb{C}} = D \oplus \overline{D}$, где D и $\overline{D}$ — собственные подмодули оператора $\Phi^{\mathbb{C}} = (\Phi|_L) \otimes \mathtt{id}_{\mathbb{C}}$ с собственными значениями $\sqrt{-1}$ и $-\sqrt{-1}$ соответственно, а $\sigma = \frac{1}{2}\left(\mathtt{id} - \sqrt{-1}\Phi|_{\mathcal{L}}\right)$ и $\overline{\sigma} = \frac{1}{2}\left(\mathtt{id} + \sqrt{-1}\Phi|_{\mathcal{L}}\right)$ их проекторы.

Фиксируем точку $p \in P$ и $\{p,\ \varepsilon_1, ..., \varepsilon_n, \varepsilon_{\hat{1}}, ..., \varepsilon_{\hat{n}}\}$ — A-репер в $\mathcal{L}_p$. Тогда репер

$$\{p, \varepsilon_0, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_n, \varepsilon_{\hat{1}}, ..., \varepsilon_{\hat{n}}\},$$

где $\varepsilon_0 = \xi|_p$, называется *A-репером.* В A-репере получим:

$$(\Phi^i_j) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{-1}I_n & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{-1}I_n \end{pmatrix}; \quad (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & I_n & 0 \end{pmatrix};$$
$$(\Theta_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{-1} \\ 0 & \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Задание на многообразии $\mathcal{AC}$-структуры равносильно заданию G-структуры со структурной группой $\{1\}\otimes U(n)$, представленной матрицами вида:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & \overline{A} \end{pmatrix}, \qquad \text{где } A \in U(n).$$

Такая G-структура называется *присоединенной*. Далее имеем:

$$\begin{aligned} &1)\quad d\Phi^i_j + \Phi^i_k\omega^k_j - \Phi^k_j\omega^i_k = \Phi^i_{j,k}\omega^k, \\ &2)\quad dg_{ij} + g_{kj}\omega^k_i + g_{ik}\omega^k_j = g_{ij,k}\omega^k. \end{aligned} \tag{2.3}$$

С учетом (2.2) и (2.3) на пространстве присоединенной G-структуры получим:

$$\begin{aligned} &1)\ \Phi^0_{0,k} = 0; && 2)\ \Phi^a_{b,k} = 0; \\ &3)\ \Phi^{\hat a}_{\hat b,k} = 0; && 4)\ \omega^a_{\hat b} = -\tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\Phi^a_{\hat b,k}\omega^k; \\ &5)\ \omega^{\hat a}_b = \tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\Phi^{\hat a}_{b,k}\omega^k; && 6)\ \omega^a_0 = -\sqrt{-1}\Phi^a_{0,k}\omega^k; \\ &7)\ \omega^{\hat a}_0 = \sqrt{-1}\Phi^{\hat a}_{0,k}\omega^k; && 8)\ \omega^0_b = \sqrt{-1}\Phi^0_{b,k}\omega^k; \\ &9)\ \omega^0_{\hat b} = -\sqrt{-1}\Phi^0_{\hat b,k}\omega^k; && \\ &10)\ \omega^i_j + \omega^{\hat j}_{\hat i} \equiv 0 \pmod n, && \end{aligned} \tag{2.4}$$

где $i, j, k = 0, \ldots, 2n$, $a, b, c = 1, \ldots, n$. Тогда первая группа структурных уравнений присоединенной G-структуры почти контактного многообразия на пространстве этой G-структуры запишется в виде:

$$\begin{aligned} &1)\quad d\omega^a = \omega^a_b \wedge \omega^b + C^{ab}{}_c\omega^c \wedge \omega_b + C^{abc}\omega_b \wedge \omega_c + C^{ab}\omega_b \wedge \omega + C^a{}_b\omega^b \wedge \omega; \\ &2)\quad d\omega_a = -\omega^b_a \wedge \omega_b + C_{ab}{}^c\omega_c \wedge \omega^b + C_{abc}\omega^b \wedge \omega^c + C_{ab}\omega^b \wedge \omega + C_a{}^b\omega_b \wedge \omega; \\ &3)\quad d\omega = D_{ab}\omega^a \wedge \omega^b + D^{ab}\omega_a \wedge \omega_b + D^b_a\omega^a \wedge \omega_b + D_a\omega^a \wedge \omega + D^a\omega_a \wedge \omega; \end{aligned} \tag{2.5}$$

где $\omega = \omega^0$, $\omega_a = \omega^{\hat a}$, $\omega^{\hat a} = \omega_a$.

$$
\begin{array}{ll}
C^{abc} = \frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^{a}_{[\hat{b},\hat{c}]}; & C_{abc} = -\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^{\hat{a}}_{[b,c]}; \\
C^{ab}{}_{c} = -\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^{a}_{\hat{b},c}; & C_{ab}{}^{c} = \frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^{\hat{a}}_{b,c}; \\
C^{ab} = \frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^{a}_{\hat{b},0} - \sqrt{-1}\Phi^{a}_{0,\hat{b}}; & C_{ab} = -\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^{\hat{a}}_{b,0} + \sqrt{-1}\Phi^{\hat{a}}_{0,b}; \\
C^{a}{}_{b} = -\sqrt{-1}\Phi^{a}_{0,b}; & C_{a}{}^{b} = \sqrt{-1}\Phi^{\hat{a}}_{0,\hat{b}}; \\
D^{ab} = \sqrt{-1}\Phi^{0}_{[\hat{a},\hat{b}]}; & D_{ab} = -\sqrt{-1}\Phi^{0}_{[\hat{a},\hat{b}]}; \\
D^{a} = \sqrt{-1}\Phi^{0}_{\hat{a},0}; & D_{a} = -\sqrt{-1}\Phi^{0}_{a,0}; \\
D^{b}_{a} = -\sqrt{-1}\Phi^{0}_{a,\hat{b}} - \sqrt{-1}\Phi^{0}_{\hat{b},a}. &
\end{array}
\tag{2.6}
$$

Теорема 2.1 [4]. $\mathcal{AC}$-структура на многообразии является:

— квазисасакиевой тогда и только тогда, когда $C_{ab}{}^{c} = C_{ab} = D_{ab} = D_{a} = 0$, $C_{a}{}^{b} = \sqrt{-1}\delta^{b}_{a}$;

— сасакиевой тогда и только тогда, когда $C_{abc} = C_{ab}{}^{c} = C_{ab} = D_{ab} = D_{a} = 0$, $C_{a}{}^{b} = \sqrt{-1}\delta^{b}_{a}$;

— косимплектической тогда и только тогда, когда $C_{abc} = C_{ab}{}^{c} = C_{ab} = C_{a}{}^{b} = D_{ab} = D^{b}_{a} = D_{a} = 0$.

3. Связь почти эрмитовой и почти контактной структуры

Пусть G — r-мерная компактная абелева группа Ли. Известно, что такая группа изоморфна r-мерному тору $T^{r} = \underbrace{S^{1} \times \ldots \times S^{1}}_{r}$ и может быть отождествлена с ним.

Определение 5. Главное расслоение $(P, M, \pi, G = T^{r})$ называется *главным тороидальным расслоением* (T^{r}-*расслоением*).

Если $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы Ли $G = T^{r}$, то $\mathfrak{g}$, естественно, изоморфна $\mathbb{R}^{r}$.

Пусть (P, M, π, G) — T^{1}-расслоение над $\mathcal{AC}$-многообразием M с почти контактной структурой $\{\Phi, \eta, \tilde{\xi}, \tilde{g}\}$.

Напомним [5], что поскольку группа Ли G действует на P, то определен канонический гомоморфизм $\lambda : \mathfrak{g} \to \mathcal{X}_{\pi}(P)$, действующий по формуле:

$$\lambda(X)_{p} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp(tX)(p), \qquad p \in P.$$

Более того, известно, что этот гомоморфизм является гомоморфизмом алгебр Ли и, так как G действует на P свободно, является мономорфизмом. Элементы его образа называются *фундаментальными векторными полями* [5].

Пусть ω — фиксированная связность на P. Известно [3], что существует гомоморфизм $i_{H} : \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(P)$ такой, что $\pi_{*} \circ i_{H} = \mathrm{id}$. Этот гомоморфизм называется *горизонтальным поднятием.* Образ $\mathcal{H}_\pi$ горизонтального поднятия определяет *горизонтальное распределение* $\mathcal{H} = \mathcal{H}_\pi \otimes C^\infty(P)$, элементы которого называются *базисными векторными полями.* Гомоморфизм $p_H = i_H \circ \pi_*$ является проектором, который называется *горизонтальным.* Дополнительный проектор $p_V = \mathrm{id} - p_H$ называется *вертикальным*, причем образ $\mathcal{V}_\pi$ этого проектора совпадает с ядром гомоморфизма π_* [3].

Определим эндоморфизм:

$$J = i_H \circ \Phi \circ \pi_* - \omega \otimes \xi + \pi^*\eta \otimes \nu, \quad \text{где } \xi = i_H \tilde{\xi}, \quad \nu = \lambda(1). \tag{3.1}$$

Обозначим: $J_1 = i_H \circ \Phi \circ \pi_*$, $J_2 = -\omega \otimes \xi + \pi^*\eta \otimes \nu$. Тогда:

$$J_1 \circ J_2 = i_H \circ \Phi \circ \pi_*(-\omega \otimes \xi) + i_H \circ \Phi \circ \pi_* \circ \pi^*\eta \otimes \nu = 0.$$

Аналогично, $J_2 \circ J_1 = 0$, $J_1 \circ J_1 = i_H \circ \Phi^2 \circ \pi_*$,

$$J_2 \circ J_2 = (-\omega \otimes \xi + \pi^*\eta \otimes \nu) \circ (-\omega \otimes \xi + \pi^*\eta \otimes \nu) = -\pi^*\eta \otimes \xi - \omega \otimes \nu.$$

Следовательно, $J^2 = (J_1 + J_2)^2 = -\mathtt{id}$. Определим метрику $g = \langle .,. \rangle$ на P формулой:

$$g(X,Y) = \tilde{g}(\pi_* X, \pi_* Y) + \omega(X)\omega(Y). \tag{3.2}$$

Заметим, что $\pi_* \circ JX = \Phi(\pi_* X) - \omega(X)\tilde{\xi}$. Тогда в силу (2.1):

$$\begin{aligned}\tilde{g}\,(\pi_* JX, \pi_* JY) = \tilde{g}\,(\Phi(\pi_* X), \Phi(\pi_* Y)) - \tilde{g}\left(\Phi(\pi_* X), \omega(Y)\tilde{\xi}\right) - \\ - \tilde{g}\left(\omega(X)\tilde{\xi}, \Phi(\pi_* Y)\right) + \tilde{g}\left(\omega(X)\tilde{\xi}, \omega(Y)\tilde{\xi}\right) = \\ = \tilde{g}\,(\pi_* X, \pi_* Y) - \eta(\pi_* X)\eta(\pi_* Y) + \eta\left(\omega(X)\tilde{\xi}\right)\eta\left(\omega(Y)\tilde{\xi}\right)\end{aligned}$$

и, так как $\omega(JX) = \omega\,(\eta(\pi_* X)\nu) = \eta(\pi_* X)$, то окончательно получим:

$$g\,(JX, JY) = \tilde{g}(\pi_* X, \pi_* Y) + \omega(X)\omega(Y) = g\,(X,Y)\,.$$

Вывод: $g(JX, JY) = g(X,Y)$, т.е. $\{J, g = \langle .,. \rangle\}$ — $\mathcal{AH}$-структура. Тем самым доказана теорема:

Теорема 3.1. Пусть (P, M, π, G) — главное T^1-расслоение над $\mathcal{AC}$-многообразием M с почти контактной структурой $\{\Phi, \eta, \tilde{\xi}, \tilde{g}\}$. Тогда фиксация связности на пространстве расслоения P внутренним образом порождает на нем $\mathcal{AH}$-структуру.

Найдем связь $\mathcal{AC}$-структуры на базе и $\mathcal{AH}$-структуры на пространстве главного T^1-расслоения.

Известно [2]:

Теорема 3.2. Множество $\mathcal{P}(M)$ классов эквивалентности всех главных тороидальных расслоений над гладким многообразием M естественным образом несет структуру абелевой группы. Нейтральный элемент этой группы задается тривиальным главным расслоением $(M \times T^1, M, \pi, T^1)$.

Пусть ω — форма связности на P, Ω — форма кривизны данной связности. Тогда структурные уравнения Картана-Лаптева:

$$d\omega = \omega \wedge \omega + \Omega$$

в силу абелевости группы S^1 запишутся в виде $d\omega = \Omega$. 2-форма Ω инвариантна относительно правых сдвигов и является горизонтальной. Следовательно, Ω целиком определяется своим сужением Ω_H на $C^\infty(M)$-модуль базисных векторных полей $\mathcal{H}_\pi$: $\Omega = (\pi^* \circ i_H^*)\Omega_H = \pi^*\Omega^*$, где $\Omega^* = i_H\Omega$.

Известно, что форма Ω^* определяет класс двумерных когомологий $[\Omega^*] \in H^2(M, \mathfrak{g})$, причем класс $[\Omega^*]$ не зависит от выбора связности в расслоении и называется *характеристическим классом расслоения.* Более того, отображение $\chi : \mathcal{P} \to H^2(M, \mathfrak{g})$, сопоставляющее главному расслоению его характеристический класс, является гомоморфизмом групп. Ядро этого гомоморфизма представлено расслоениями, допускающими связность нулевой кривизны, а его образ совпадает с группой двумерных когомологий $H^2(M, \mathbb{Z})$. В случае односвязности M гомоморфизм χ является мономорфизмом. Классы когомологий из $H^2(M, \mathbb{Z})$ представляются целочисленными замкнутыми дифференциальными 2-формами на M, которые называются *целочисленными замкнутыми 2-формами на M со значениями в* $\mathfrak{g}$. Пусть Ω^* — такая 2-форма на M со значениями в $\mathfrak{g}= \mathbb{R}^r$, (P, M, π, T^r) — главное тороидальное расслоение, характеристическим классом которого является класс когомологий $[\Omega^*]$. Тогда, как показано в работе [2], справедлива теорема:

Теорема 3.3. Существует связность ω на P такая, что $d\omega = \pi^*\Omega^*$.

Вычислим структурные уравнения почти эрмитовой структуры, индуцированные на пространство главного тороидального расслоения. Пусть $p_0 \in P$, $m_0 = \pi(p_0)$, U_{m_0} — некоторая окрестность локальной тривиальности расслоения A-реперов. Тогда существует сечение:

$$s : m \to \{m, \tilde{\xi}, \tilde{\varepsilon}_1(m), ..., \tilde{\varepsilon}_n(m), \tilde{\varepsilon}_{\hat{1}}(m), ..., \tilde{\varepsilon}_{\hat{n}}(m)\} \qquad (m \in U_{m_0})$$

расслоения A-реперов над U_{m_0}, т.е. существуют гладкие векторные поля $\tilde{\varepsilon}_\alpha$ такие, что $\{m, \tilde{\xi}\big|_m, \tilde{\varepsilon}_1|_m, \tilde{\varepsilon}_2|_m, ..., \tilde{\varepsilon}_n|_m, \tilde{\varepsilon}_{\hat{1}}\big|_m, ..., \tilde{\varepsilon}_{\hat{n}}|_m\}$ — A-реперы $\forall m \in U_{m_0}$.

Рассмотрим окрестность точки p_0 $\pi^{-1}(U_{m_0})$. В этой окрестности определены базисные векторные поля $\{\xi, \varepsilon_\alpha\}$ — горизонтальные подъемы полей $\{\xi, \tilde{\varepsilon}_\alpha\}$. Тогда $\{p, \varepsilon_0|_p, \varepsilon_1|_p, \varepsilon_2|_p, ..., \varepsilon_n|_p, \varepsilon_{\hat{1}}\big|_p, ..., \varepsilon_{\hat{n}}|_p\}$ будет A-репером $\forall p \in \pi^{-1}(U_{m_0})$, причем

$$\varepsilon_0 = \frac{\xi - \sqrt{-1}\nu}{\sqrt{2}}, \quad \varepsilon^0 = \frac{\xi + \sqrt{-1}\nu}{\sqrt{2}}. \qquad (3.3)$$

Из определений ε_0 и ε^0 сразу следует, что $\xi = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\varepsilon_0 + \varepsilon^0\right)$, $\nu = \frac{\sqrt{-2}}{2}\left(\varepsilon_0 - \varepsilon^0\right)$. Будем считать, что $i, j, k, l, \ldots = 0, \ldots, 2(n+1)$, $\alpha, \beta, \gamma, \ldots = 1, \ldots, 2n$, $a, b, c, \ldots = 1, \ldots, n$, $\hat{a} = a + n$.

Известно [2], что если (M, g_1) — псевдориманово многообразие, $(P, M, \pi, G = T^r)$ — главное T^1-пространство, g_0 — биинвариантная метрика на G, ω— форма связности на P и $g = \langle\cdot,\cdot\rangle$ — псевдориманова метрика на P, определенная формулой:

$$\langle X, Y\rangle = g_1(\pi_* X, \pi_* Y) \circ \pi + g_0(\omega X, \omega Y), \quad X, Y \in \mathcal{X}(P),$$

то справедлива теорема:

Теорема 3.4. Пусть $A, B, C \in \mathcal{F}$, $U, V, W \in \mathcal{H}$. Тогда:

1) $\nabla_A B = 0$; 4) $\langle\nabla_A U, V\rangle = g_0(\omega(A), \Omega(U, V))$;

2) $\nabla_A U = \nabla_U A$; 5) $\langle\nabla_A U, B\rangle = \langle\nabla_U A, B\rangle = 0$;

3) $\pi_*(\nabla_U V) = \nabla_{\pi_* U}(\pi_* V)$; 6) $\langle\nabla_U V, A\rangle = -g_0(\omega(A), \Omega(U, V))$.

В принятых выше обозначениях имеем $\varepsilon_i, \xi \in \mathcal{H}_\pi$, $\nu \in \mathcal{F}$. Из последней теоремы, учитывая (3.2), можно получить следующее утверждение:

Предложение 3.2. В принятых обозначениях справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
&1)\quad \nabla_{\varepsilon_\alpha}\varepsilon_0 = \tfrac{1}{\sqrt{2}} i_H \nabla_{\tilde{\varepsilon}_\alpha}\tilde{\xi} - \tfrac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\Omega_{\alpha\gamma}\varepsilon^\gamma - \sqrt{-2}\Omega_{\alpha 0}\varepsilon_0;\\
&2)\quad \nabla_{\varepsilon_\alpha}\varepsilon_{\hat{0}} = \tfrac{1}{\sqrt{2}} i_H \nabla_{\tilde{\varepsilon}_\alpha}\tilde{\xi} + \tfrac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\Omega_{\alpha\gamma}\varepsilon^\gamma + \sqrt{-2}\Omega_{\alpha 0}\varepsilon_0;\\
&3)\quad \nabla_{\varepsilon_0}\varepsilon_0 = \tfrac{1}{2} i_H \nabla_{\tilde{\xi}}\tilde{\xi} - \sqrt{-2}\Omega_{0\gamma}\varepsilon^\gamma;\\
&4)\quad \nabla_{\varepsilon_0}\varepsilon_{\hat{0}} = \tfrac{1}{2} i_H \nabla_{\tilde{\xi}}\tilde{\xi};\\
&5)\quad \nabla_{\varepsilon_0}\varepsilon_\alpha = \tfrac{1}{\sqrt{2}} i_H \nabla_{\tilde{\xi}}\tilde{\varepsilon}_\alpha - \tfrac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\Omega_{\alpha\gamma}\varepsilon^\gamma + \sqrt{-2}\Omega_{0\alpha}\varepsilon^0;\\
&6)\quad \nabla_{\varepsilon_{\hat{0}}}\varepsilon_0 = \tfrac{1}{2} i_H \nabla_{\tilde{\xi}}\tilde{\xi};\\
&7)\quad \nabla_{\varepsilon_{\hat{0}}}\varepsilon_{\hat{0}} = \tfrac{1}{2} i_H \nabla_{\tilde{\xi}}\tilde{\xi} + \sqrt{-2}\Omega_{0\gamma}\varepsilon^\gamma;\\
&8)\quad \nabla_{\varepsilon_{\hat{0}}}\varepsilon_\alpha = \tfrac{1}{\sqrt{2}} i_H \nabla_{\tilde{\xi}}\tilde{\varepsilon}_\alpha + \tfrac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\Omega_{\alpha\gamma}\varepsilon^\gamma - \sqrt{-2}\Omega_{0\alpha}\varepsilon_0;\\
&9)\quad \nabla_{\varepsilon_\alpha}\varepsilon_\beta = i_H \nabla_{\tilde{\varepsilon}_\alpha}\tilde{\varepsilon}_\beta - \tfrac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\Omega_{\alpha\beta}\varepsilon_0 + \tfrac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\Omega_{\alpha\beta}\varepsilon^0.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Опираясь на эти соотношения, можно вычислить компоненты $J^i_{j,k}$ ковариантного дифференциала эндоморфизма J по формуле:

$$J^i_{j,k} = \left(\nabla_{\varepsilon_k}(J)\varepsilon_j\right)^i = \left(\nabla_{\varepsilon_k}(J\varepsilon_j) - J\nabla_{\varepsilon_k}\varepsilon_j\right)^i.$$

Вычислим, например, $J^i_{b,\alpha}$. Имеем $J^i_{b,\alpha} = (\nabla_{\varepsilon_\alpha}(J\varepsilon_b) - J\nabla_{\varepsilon_\alpha}\varepsilon_b)^i$. Согласно (3.4) и (3.1), получим:

$$\begin{aligned}
\nabla_{\varepsilon_\alpha}(J\varepsilon_b) &= \sqrt{-1}\nabla_{\varepsilon_\alpha}\varepsilon_b = \sqrt{-1}\left(i_H\nabla_{\tilde{\varepsilon}_\alpha}\tilde{\varepsilon}_b + \langle\nabla_{\varepsilon_\alpha}\varepsilon_b, \nu\rangle\,\nu\right) =\\
&= i_H\nabla_{\tilde{\varepsilon}_\alpha}(\Phi\tilde{\varepsilon}_b) - \sqrt{-1}\Omega_{\alpha b}\nu = i_H\nabla_{\tilde{\varepsilon}_\alpha}(\Phi\tilde{\varepsilon}_b) + \frac{1}{\sqrt{2}}\Omega_{\alpha b}\varepsilon_0 - \frac{1}{\sqrt{2}}\Omega_{\alpha b}\varepsilon^0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J\nabla_{\varepsilon_\alpha}\varepsilon_b &= J\left(i_H\nabla_{\tilde{\varepsilon}_\alpha}\tilde{\varepsilon}_b + \langle\nabla_{\varepsilon_\alpha}\varepsilon_b, \nu\rangle\,\nu\right) =\\
&= i_H\Phi\nabla_{\tilde{\varepsilon}_\alpha}\tilde{\varepsilon}_b + \eta\left(\nabla_{\tilde{\varepsilon}_\alpha}\tilde{\varepsilon}_b\right)\nu + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\Omega_{\alpha b}\varepsilon_0 + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\Omega_{\alpha b}\varepsilon^0.
\end{aligned}$$

Из последних двух равенств следует:

$$\begin{aligned}\nabla_{\varepsilon_\alpha}(J)\varepsilon_b &= i_H\nabla_{\tilde\varepsilon_\alpha}(\Phi)\tilde\varepsilon_b - \eta\left(\nabla_{\tilde\varepsilon_\alpha}\tilde\varepsilon_b\right)\nu - \sqrt{2}\Omega_{\alpha b}\varepsilon^0 = \\ &= i_H\nabla_{\tilde\varepsilon_\alpha}(\Phi)\tilde\varepsilon_b - \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\eta\left(\nabla_{\tilde\varepsilon_\alpha}\tilde\varepsilon_b\right)\varepsilon_0 + \left(\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\eta\left(\nabla_{\tilde\varepsilon_\alpha}\tilde\varepsilon_b\right)\varepsilon_0 - \sqrt{2}\Omega_{\alpha b}\right)\varepsilon^0.\end{aligned}$$

Тогда:

$$\begin{aligned}
&J^\alpha_{b,\gamma} = \Phi^\alpha_{b,\gamma}\circ\pi;\\
&J^0_{b,\alpha} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\Phi^0_{b,\alpha} - \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\eta\left(\nabla_{\tilde\varepsilon_\alpha}\tilde\varepsilon_b\right)\right)\circ\pi = \\
&\qquad = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\Phi^0_{b,\alpha} + \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\eta_{b,\alpha}\right)\circ\pi = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\Phi^0_{b,\alpha} - \frac{1}{\sqrt{2}}\Phi^0_{b,\alpha}\right)\circ\pi = 0;\\
&J^{\hat 0}_{b,\alpha} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\Phi^0_{b,\alpha} - \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\eta_{b,\alpha}\right)\circ\pi - \sqrt{2}\Omega_{\alpha b} = \\
&\qquad = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\Phi^0_{b,\alpha} + \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\Phi^0_{b,\alpha}\right)\circ\pi - \sqrt{2}\Omega_{\alpha b} = \sqrt{2}\Phi^0_{b,\alpha}\circ\pi - \sqrt{2}\Omega_{\alpha b}.
\end{aligned}$$

Аналогично находятся остальные компоненты. Таким образом, справедливо:

Предложение 3.3. На пространстве присоединенной G-структуры компоненты ковариантного дифференцирования тензора J имеют вид:

$$\begin{array}{llll}
1) & J^\alpha_{b,\gamma} = \Phi^\alpha_{b,\gamma}; & 11) & J^a_{\hat b,0} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Phi^a_{\hat b,0} - \sqrt{2}\Omega^{ba};\\
2) & J^{\hat 0}_{b,\alpha} = \sqrt{2}\Phi^0_{b,\alpha} - \sqrt{2}\Omega_{\alpha b}; & 12) & J^{\hat a}_{\hat b,0} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Phi^{\hat a}_{\hat b,0};\\
3) & J^0_{\hat b,\alpha} = \sqrt{2}\left(\Phi^0_{\hat b,\alpha} - \Omega_{\alpha\hat b}\right); & 13) & J^0_{\hat b,0} = \Phi^0_{\hat b,0};\\
4) & J^{\hat a}_{b,\alpha} = \sqrt{2}\Phi^{\hat a}_{0,\alpha} + \sqrt{2}\Omega_{\alpha b}; & 14) & J^{\hat a}_{0,\hat 0} = \Phi^{\hat a}_{0,0};\\
5) & J^a_{\hat 0,\gamma} = \sqrt{2}\Phi^a_{0,\gamma} + \sqrt{2}\Omega_\gamma{}^a; & 15) & J^a_{\hat 0,\hat 0} = \Phi^a_{\hat 0,\hat 0} + 2\sqrt{2}\Omega_0{}^a;\\
6) & J^a_{b,\hat 0} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Phi^a_{b,0}; & 16) & J^{\hat 0}_{b,0} = \Phi^0_{b,0} - 2\sqrt{2}\Omega_{0b};\\
7) & J^{\hat a}_{0,0} = \frac{1}{2}\Phi^{\hat a}_{0,0} + 2\sqrt{2}\Omega_{0b}; & 17) & J^{\hat a}_{b,\hat 0} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Phi^{\hat a}_{b,0} - \sqrt{2}\Omega_{ba};\\
8) & J^a_{\hat 0,0} = \Phi^a_{0,0}; & 18) & J^{\hat 0}_{b,\hat 0} = \Phi^0_{b,0};\\
9) & J^a_{b,0} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Phi^a_{b,0}; & 19) & J^a_{\hat b,\hat 0} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Phi^a_{\hat b,0} + \sqrt{2}\Omega^{ba};\\
10) & J^{\hat a}_{b,0} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Phi^{\hat a}_{b,0} + \sqrt{2}\Omega_{ba}; & 20) & J^0_{\hat b,\hat 0} = \Phi^0_{\hat b,0} - 2\sqrt{2}\Omega_0{}^b;
\end{array} \tag{3.5}$$

причем $J^i_{j,k} = -J^{\hat j}_{\hat i,k}$, а остальные компоненты равны нулю.

Здесь и далее под $\Phi^i_{j,k}$ мы будем понимать их антиувлечения. Структурные уравнения $\mathcal{AH}$-структуры, индуцированной на пространстве главного тороидального расслоения над $\mathcal{AC}$-многообразием с фиксированной связностью, записанные на пространстве присоединенной G-структуры, будут иметь вид:

$$
\begin{array}{llll}
1) & d\omega^a & = & \omega^a_b\wedge\omega^b+\omega^a_0\wedge\omega^0+B^{ab}{}_c\omega^c\wedge\omega_b+B^{ab}{}_0\omega^0\wedge\omega_b+\\
 & & & +B^{a0}{}_b\omega^b\wedge\omega_0+B^{ao}{}_0\omega^0\wedge\omega_0+B^{abc}\omega_b\wedge\omega_c+2B^{ab0}\omega_b\wedge\omega_0;\\
2) & d\omega^0 & = & \omega^0_a\wedge\omega^a+\omega^0_0\wedge\omega_0+B^{oa}{}_b\omega^b\wedge\omega_a+B^{0a}{}_0\omega^0\wedge\omega_a+\\
 & & & +B^{0ab}\omega_a\wedge\omega_b+2B^{oao}\omega_a\wedge\omega_0;\\
3) & d\omega_a & = & -\omega^b_a\wedge\omega_b-\omega^0_a\wedge\omega_0+B_{ab}{}^c\omega_c\wedge\omega^b+B_{ab}{}^0\omega_0\wedge\omega^b+\\
 & & & +B_{a0}{}^b\omega_b\wedge\omega^0+B_{a0}{}^0\omega^0\wedge\omega_0+B_{abc}\omega^b\wedge\omega^c+2B_{a0b}\omega^0\wedge\omega^c;\\
4) & d\omega_0 & = & -\omega^a_0\wedge\omega_a-\omega^0_0\wedge\omega_0+B_{0a}{}^c\omega_b\wedge\omega^a+B_{oa}{}^0\omega_0\wedge\omega^a+\\
 & & & +B_{0ab}\omega^a\wedge\omega^c+2B_{0ab}\omega^a\wedge\omega^b.
\end{array}
\tag{3.6}
$$

Найдем компоненты виртуальных и структурных тензоров пространства P. Согласно (1.2), (1.3), (3.5), получим:

1. $B^{ab}{}_c=C^{ab}{}_c$ (более точно $B^{ab}{}_c=C^{ab}{}_c\circ\pi$); $B^{abc}=C^{abc}$.

2. Заметим, что $\Phi^a_{\hat b,0}=2\sqrt{-1}\left(D^{ab}-C^{[ab]}\right)$. Тогда:

$$B^{ab}{}_c=-\frac{\sqrt{-1}}{2}J^a_{\hat b,0}==\frac{1}{\sqrt2}\left(D^{ab}-C^{[ab]}\right)+\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt2}\Omega_{\hat b}{}^a.$$

Далее:

3. $B^{ao}{}_b=-\frac{\sqrt{-1}}{2}J^a_{\hat 0,b}=-\frac{\sqrt{-1}}{2}\left(\sqrt2\Phi^a_{0,b}+\sqrt2\Omega_b{}^a\right)=\frac{1}{\sqrt2}C^a{}_b+\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt2}\Omega^a{}_b$.

4. $B^{a0}{}_0=-\frac{\sqrt{-1}}{2}J^a_{\hat 0,0}=-\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^a_{0,0}=\frac12 D^a$.

5. $B^{ab0}=\frac{\sqrt{-1}}{2}\left(J^a_{\hat b,\hat 0}-J^a_{\hat 0,\hat b}\right)=\frac{\sqrt{-1}}{4}\left(\frac{1}{\sqrt2}\Phi^a_{\hat b,0}-\sqrt2\Phi^a_{0,\hat b}\right)=\frac{1}{2\sqrt2}C^{ab}$.

Получили:

$$
\begin{array}{ll}
B^{ab}{}_c=C^{ab}{}_c; & B_{ab}{}^c=C_{ab}{}^c;\\
B^{ab}{}_0=\frac{1}{\sqrt2}(D^{ab}-C^{[ab]})+\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt2}\Omega^{ba}; & B_{ab}{}^0=\frac{1}{\sqrt2}(D_{ab}-C_{[ab]})+\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt2}\Omega_{ab};\\
B^{a0}{}_b=\frac{1}{\sqrt2}C^a_b+\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt2}\Omega^a_b; & B_{a0}{}^b=\frac{1}{\sqrt2}C^c_a-\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt2}\Omega^b_a;\\
B^{a0}{}_0=\frac12 D^a; & B_{a0}{}^0=\frac12 D_a;\\
B^{0a}{}_b=-\frac{1}{\sqrt2}C^a_b-\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt2}\Omega^a_b; & B_{0a}{}^b=-\frac{1}{\sqrt2}C^b_a+\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt2}\Omega^b_a;\\
B^{abc}=C^{abc}; & B_{abc}=C_{abc};\\
B^{ab0}=\frac{1}{2\sqrt2}C^{ab}; & B_{a0b}=-\frac{1}{2\sqrt2}C_{ab};\\
B^{0ab}=\frac{1}{\sqrt2}D^{ab}+\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt2}\Omega^{ab}; & B_{0ab}=\frac{1}{\sqrt2}D_{ab}-\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt2}\Omega_{ab};\\
B^{0a0}=\frac14 D^a-\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt2}\Omega^a_0; & B_{00a}=-\frac14 D_a-\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt2}\Omega_{0a}.
\end{array}
\tag{3.7}
$$

Эти результаты обобщают результаты, полученные в работе [6].

4. Каноническое расслоение

Известен результат [7]:

Теорема 4.1. Пусть $\{P,M,\tilde\pi,G\}$ — главное расслоение над M со структурной группой G, и пусть $H\subset G$ — замкнутый нормальный делитель. Тогда $\{P/H,\ M,\ \pi,\ G/H\}$ — главное расслоение над M, причем

$\pi\circ\varpi=\varpi\circ\tilde{\pi}$, где $\varpi : P \to P/H$ — естественная проекция, $\pi : P/H \to M$ — отображение, индуцированное отображением $\hat{\pi}$. Пусть $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ — алгебры Ли групп Ли G и H соответственно. Если ω — $\mathfrak{g}$-значная дифференциальная форма на P, определяющая связность на P, то существует единственная $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ -значная дифференциальная форма ζ на P/H такая, что $\varpi^*\zeta=\omega$, причем эта форма определяет связность на P/H.

Пусть, в частности, $\{M^{2n+1},\Phi,g=\langle .,. \rangle\}$ — $\mathcal{AC}$-многообразие. Задание $\mathcal{AC}$-структуры равносильно заданию $U(n)\times 1$-структуры. Так как $SU(n)\times 1\subset U(n)\times 1$ — замкнутый нормальный делитель, то существует главное расслоение $(P/SU(n)\times 1,\ M,\ \pi,\ (U(n)\times 1)/SU(n)\times 1 = T^1)$, которое называется *каноническим.* Если ω — форма римановой связности на пространстве расслоения реперов M, то вторая группа структурных уравнений этой связности имеет вид: $d\omega=\frac{1}{2}[\omega,\omega]+\Phi$ или в явном виде:

$$d\omega^i_j=\omega^i_k\wedge\omega^k_j+\Omega^i_j, \tag{4.1}$$

где ω^i_j — компоненты формы связности, $\Omega^i_j=\frac{1}{2}R^i{}_{jkl}\omega^l\wedge\omega^k$ — компоненты формы кривизны. Пусть ζ — форма соответствующей связности главного T^1-расслоения над M. Тогда $d\zeta=\pi^*\rho$, где $\rho=i^*_H d\zeta_H$ — форма, представляющая характеристический класс $[\rho]\in H^2(M;\mathbb{Z})$ главного T^1-расслоения. Форма ρ называется *обобщенной формой Риччи.*

В силу (2.4) и (2.6) для $\mathcal{AC}$-структуры справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned}
&\omega^a_{\hat{b}}=(D^{ab}-C^{[ab]})\omega+C^{ab}{}_c\omega^c-\tilde{C}^{abc}\omega_c,\\
&\omega^{\hat{b}}_a=(D_{ba}-C_{[ba]})\omega+C_{ba}{}^c\omega_c-\tilde{C}_{bac}\omega^c,\\
&\omega^a_0=C^a{}_b\omega^b+(D^{ab}+C^{(ab)})\omega_b+D^a\omega,\\
&\omega^0_a=-C_a{}^b\omega_b-(D_{ab}+C_{(ab)})\omega^b-D_a\omega,\\
&\omega^i_j=-\omega^{\hat{j}}_{\hat{i}}.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Тогда из теоремы Картана-Лаптева следует, что матрица

$$\begin{pmatrix} \omega^0_0 & 0 & 0\\ 0 & \omega^a_b & 0\\ 0 & 0 & \omega^{\hat{a}}_{\hat{b}} \end{pmatrix}$$

представляет форму связности на пространстве присоединенной G-структуры, вторая группа структурных уравнений данной связности имеет вид:

$$d\omega^a_b=\omega^a_0\wedge\omega^0_b+\omega^a_c\wedge\omega^c_b+\omega^a_{\hat{c}}\wedge\omega^{\hat{c}}_b+\Omega^a_b.$$

Условие унимодулярности элементов $\mathrm{g}\in \mathrm{SU}(n)\times 1$ записывается в виде $\det \mathrm{g}=1$, и, значит, элементы X подалгебры Ли $\mathrm{su}(n)\times 1\subset \mathrm{u}(n)\times 1$ выделяются соотношением $\mathrm{tr}X=0$. Следовательно, $\mathrm{tr}\omega=0$ или $\omega^a_a=0$, тогда форма $\varpi^*\zeta$ коллинеарна форме ω^a_a $\varpi^*\zeta=\lambda\omega^a_a$; $\lambda\in\mathbb{C}$. Так как

$d\zeta = \pi^*\rho$, где $\rho \in \Lambda_2(M)$ — обобщенная форма Риччи, представляющая класс главного T^1 -расслоения, то $\pi^*\rho = \lambda d\omega^a_a$. В силу сюръективности $\tilde{\pi}$ отображение $\tilde{\pi}^*$ инъективно, и, значит, формы $\tilde{\pi}^*\rho$ и ρ можно отождествить.

В силу вещественности римановой связности, имеем $\overline{\omega^a_b} = \omega^{\hat{a}}_{\hat{b}} = -\omega^a_b$. Следовательно, форма ω^a_a чисто мнима. С другой стороны, как представитель вещественного класса когомологий форма ρ вещественна и определена с точностью до пропорциональности. Поэтому можно положить $\lambda = 2\sqrt{-1}$. Тогда: $\rho = 2\sqrt{-1}d\omega^a_a$. Учитывая, что $\omega^a_b \wedge \omega^b_a = -\omega^b_a \wedge \omega^a_b = -\omega^a_b \wedge \omega^b_a$, т.е. $\omega^a_b \wedge \omega^b_a = 0$, получим:

$$
\begin{aligned}
d\omega^a_a = {}&\Big[(D^{ab} - C^{[ab]})\omega + C^{ab}{}_c\omega^c - \tilde{C}^{abc}\omega_c\Big] \wedge \Big[(D_{ba} - C_{[ba]})\omega + \\
&+ C_{ba}{}^d\omega_d - \tilde{C}_{bad}\omega^d\Big] + \Big[D^a\omega + C^a{}_c\omega^c + (C^{(ac)} + D^{ac})\omega_c\Big] \wedge \\
&\wedge \Big[-D_a\omega - C_a{}^d\omega_d - (C_{(ad)} + D_{ad})\omega_c\Big] + \frac{1}{2}R^a{}_{aij}\omega^i \wedge \omega^j = \\
= {}&\Big[R^a{}_a{}^c{}_0 - C_{ba}{}^cD^{ab} + C_{ba}{}^cC^{[ab]} - \tilde{C}^{abc}D_{ba} + C_{[ba]}\tilde{C}^{abc} + \\
&+ C_a{}^cD^a - D_aD^{ac} - C^{(ac)}D_a\Big]\omega_c \wedge \omega + \Big[R^a{}_{ac0} + C^{ab}{}_cD_{ba} - C^{ab}{}_cC_{[ba]} + \\
&+ \tilde{C}_{bac}D^{ab} - C^{[ab]}\tilde{C}_{bac} - C^a{}_cD_a + D^aD_{ac} + D^aC_{(ac)}\Big]\omega^c \wedge \omega + \Big[R^a{}_{ac}{}^d + \\
&+ C^{ab}{}_cC_{ba}{}^c - \tilde{C}^{abd}\tilde{C}_{bac} - C^a{}_cC_a{}^d + (D^{ab} + C^{(ad)})(D_{ac} + C_{(ac)})\Big]\omega^c \wedge \omega_d + \\
&+ \Big[\frac{1}{2}R^a{}_{acd} - C^{ab}{}_{[c}\tilde{C}_{|ba|d]} - D_{a[d}C^a{}_{c]} - C_{(a[d)}C^a{}_{c]}\Big]\omega^c \wedge \omega^d + \\
&+ \Big[\frac{1}{2}R^a{}_a{}^{cd} - \tilde{C}^{ab[c}C_{ba}{}^{d]} - D^{a[c}C_a{}^{d]} - C^{(a[c)}C_a{}^{d]}\Big]\omega_c \wedge \omega_d.
\end{aligned}
$$

Получили:

$$
\begin{aligned}
\rho = {}& \mathrm{ric} + \sqrt{-1}\Big(2R^a{}_{0ca} + R^a{}_{ac0} + 2C^{ab}{}_cD_{ba} - 2C^{ab}{}_cC_{[ba]} + 2\tilde{C}_{bac}D^{ab} - \\
&-2C^{[ab]}\tilde{C}_{bac} - 2C^a{}_cD_a + 2D^aD_{ac} + 2D^aC_{(ac)}\Big)\omega^c \wedge \omega + \\
&+ \sqrt{-1}\Big(2R_{a0}{}^{ca} - 2C_{ba}{}^cD^{ab} + 2C_{ba}{}^cC^{[ab]} - 2\tilde{C}^{abc}D_{ba} + 2C_{[ba]}\tilde{C}^{abc} + \\
&+2C_a{}^cD^a - 2D_aD^{ac} - 2C^{(ac)}D_a\Big)\omega_c \wedge \omega + \\
&+ \sqrt{-1}\Big(4R^{ad}{}_{ca} + 2C^{ab}{}_cC_{ba}{}^c - 2\tilde{C}^{abd}\tilde{C}_{bac} - 2C^a{}_cC_a{}^d + \\
&+2\{D^{ab} + C^{(ad)}\}\{D_{ac} + C_{(ac)}\}\Big)\omega^c \wedge \omega_d + \\
&+ \sqrt{-1}\Big(R^a{}_{acd} - 2C^{ab}{}_{[c}\tilde{C}_{|ba|d]} - 2D_{a[d}C^a{}_{c]} - 2C_{(a[d)}C^a{}_{c]}\Big)\omega^c \wedge \omega^d + \\
&+ \sqrt{-1}\Big(R^a{}_a{}^{cd} - 2\tilde{C}^{ab[c}C_{ba}{}^{d]} - 2D^{a[c}C_a{}^{d]} - 2C^{(a[c)}C_a{}^{d]}\Big)\omega_c \wedge \omega_d,
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

где $\mathrm{ric}\,(X,Y) = \langle rX, \Phi Y\rangle$ — классическая форма Риччи, которая на пространстве присоединенной G-структуры записывается в виде: $\mathrm{ric} = -\sqrt{-1}r^b_0\omega \wedge \omega_b + \sqrt{-1}r_{0b}\omega \wedge \omega^b - 2\sqrt{-1}r^b_a\omega^a \wedge \omega_b$.

5. Косимплектическая структура

Пусть на M задана косимплектическая структура. Структурные уравнения (2.5) косимплектической структуры согласно теореме 2.1 запишутся в виде:

$$\begin{cases} d\omega^a = \omega^a_b \wedge \omega^b; \\ d\omega_a = -\omega^b_a \wedge \omega_b; \\ d\omega = 0, \end{cases} \tag{5.1}$$

$$\omega^a_0 = \omega^0_a = \omega^a_{\hat{b}} = \omega^{\hat{b}}_a = 0. \tag{5.2}$$

Применим к (5.1) стандартную процедуру дифференциального продолжения. Продифференцируем внешним образом первое уравнение:

$$0 = d\omega^a_b \wedge \omega^b - \omega^a_b \wedge d\omega^b = d\omega^a_b \wedge \omega^b - \omega^a_b \wedge \omega^b_c \wedge \omega^c = \left(d\omega^a_b - \omega^a_c \wedge \omega^c_b\right) \wedge \omega^b.$$

Дифференцируя второе равенство, получим:

$$\left(d\omega^b_a - \omega^b_c \wedge \omega^c_a\right) \wedge \omega_b = 0.$$

Получили:

$$\begin{cases} \Delta\omega^a_b \wedge \omega^b = 0; \\ \Delta\omega^b_a \wedge \omega_b = 0, \end{cases} \tag{5.3}$$

где $\Delta\omega^a_b = d\omega^a_b - \omega^a_c \wedge \omega^c_b$.

Распишем $\Delta\omega^a_b$ через базис:

$$\Delta\omega^a_b = A^{acf}_{bdg}\omega^d_c \wedge \omega^g_f + A^{acf}_{bd0}\omega^d_c \wedge \omega^0_f + \ldots + A^{ac0}_{b0d}\omega^0_c \wedge \omega^d_0 + \\ + A^{ac}_{bdf}\omega^d_c \wedge \omega^f + \ldots + A^{ac}_{b00}\omega^0_c \wedge \omega + A^{acd}_b\omega_c \wedge \omega_c + \ldots + A^{ac}_{bd}\omega_d \wedge \omega_c.$$

Подставим в (5.3):

$$d\omega^a_b = \omega^a_c \wedge \omega^c_b + A^{ac}_{bd}\omega^d \wedge \omega_c, \tag{5.4}$$

где $\left\{A^{ac}_{bd}\right\}$ — семейство таких функций на пространстве присоединенной G-структуры, что $A^{ac}_{[bd]} = A^{[ac]}_{bd} = 0$.

С другой стороны, из теоремы Картана—Лаптева следует, что

$$d\omega^a_b = \omega^a_c \wedge \omega^c_b + \frac{1}{2}R^a{}_{bij}\omega^i \wedge \omega^j. \tag{5.5}$$

Из соотношений (5.4) и (5.5) получим:

$$\begin{matrix} R^a{}_{bcd} = R^a{}_b{}^{cd} = R^a{}_{bc0} = R^a{}_{b0}{}^c = 0, \\ R^a{}_{bc}{}^d = A^{ad}_{bc}. \end{matrix} \tag{5.6}$$

Из соотношений (5.2) получим, что все $R_{ijkl} = 0$, кроме $R^a{}_{bc}{}^d = A^{ad}_{bc}$, и, следовательно:

$$\begin{matrix} \mathrm{ric} = 2\sqrt{-1}A^{ad}_{db}\omega^b \wedge \omega_a, \\ \rho = 2\sqrt{-1}A^{ad}_{ac}\omega^c \wedge \omega_d, \end{matrix} \tag{5.7}$$

где ric и ρ, как и выше, классическая и обобщенная формы Риччи. Тогда, согласно (3.7), компоненты структурных и виртуальных тензоров тотального пространства канонического тороидального расслоения будут иметь вид:

$$\begin{aligned} &B^{abc} = B^{ab0} = B^{aoo} = B^{0ab} = 0, \\ &B^{ab}{}_{c} = B^{ab}{}_{0} = B^{a0}{}_{0} = 0, \qquad B^{a0}{}_{b} = B^{0a}{}_{b} = \sqrt{2}A^{da}_{db}. \end{aligned} \tag{5.8}$$

В частности, из (5.8) согласно теореме 1.1 следует, что P — эрмитово многообразие.

Далее, пусть P — келерово многообразие. Тогда $B^{\alpha\beta}{}_{\gamma} = 0$ и, следовательно, $A^{da}_{db} = 0$ и $\mathrm{ric} = 0$, таким образом, $r_{ij} = 0$ и M — многообразие Эйнштейна с космологической константой $\varepsilon = 0$, т.е. Риччи-плоское многообразие. Очевидно, верно и обратное: если M — многообразие Эйнштейна с космологической константой $\varepsilon = 0$, то P будет келеровым многообразием.

Пусть теперь P принадлежит классу $\mathcal{W}_3$. Тогда по определению $B^{\beta\alpha}{}_{\alpha} = 0$ и, следовательно, $B^{0a}{}_{a} = 0 \Rightarrow A^{da}_{da} = 0 \Rightarrow r^a_a = 0$. Обратно, если $r^a_a = 0$, то $A^{da}_{da} = 0 \Rightarrow B^{0a}{}_{a} = 0 \Rightarrow P$ принадлежит классу $\mathcal{W}_3$.

Если P принадлежит классу $\mathcal{W}_4$, то $B^{\lambda\beta}{}_{\gamma} = \alpha^{[\lambda}\delta^{\beta]}_{\gamma}$. Учитывая, что $B^{0a}{}_{0} = \alpha^{[0}\delta^{a]}_{0}$ и $B^{0a}{}_{0} = 0$, получаем $\alpha^a = 0$, $B^{0a}{}_{b} = \frac{1}{2}\left(\alpha^0\delta^a_b - \alpha^a\delta^0_b\right) = \frac{1}{2}\alpha^0\delta^a_b$. С другой стороны, $B^{0a}{}_{b} = -\sqrt{2}A^{da}_{db}$. Сравнивая два последних равенства, получим $A^{da}_{db} = k\delta^a_b$, где $k = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\alpha^0$. В силу этого $r^a{}_b = k\delta^a_b$, и, следовательно, $r_{ij} = kg^{ij} - k\|\xi\|^2\eta_i\eta_j$. Получили, что в этом случае M — η-эйнштейново многообразие.

Теорема 5.1. Если M — связное косимплектическое многообразие, то:

1) P — многообразие с эрмитовой структурой.
2) P — келерово тогда и только тогда, когда M — Риччи-плоское многообразие.
3) P принадлежит классу $\mathcal{W}_3$ тогда и только тогда, когда $\kappa \equiv r^i_i = 0$.
4) P принадлежит классу $\mathcal{W}_4$ тогда и только тогда, когда M — η-эйнштейново многообразие класса $\left(1, -\|\xi\|^2\right)$.

6. Сасакиево многообразие

Если база тороидального расслоения имеет сасакиеву структуру, то $C^{abc} = C^{ab} = C^{ab}{}_{c} = D^{ab} = D^{a} = 0$, $C_a{}^b = -\sqrt{-1}\delta^b_a$.

$$\begin{cases} d\omega^a = \omega^a_b \wedge \omega^b + \sqrt{-1}\omega^a \wedge \omega, \\ d\omega_a = -\omega^b_a \wedge \omega_b - \sqrt{-1}\omega_a \wedge \omega, \\ d\omega = -2\omega^a \wedge \omega_a, \end{cases} \tag{6.1}$$

$$\omega^a_{\hat b} = \omega^{\hat b}_a = 0, \quad \omega^a_0 = \sqrt{-1}\omega^a, \quad \omega^0_a = \sqrt{-1}\omega_a. \qquad (6.2)$$

Дифференцируя (6.1), получим:

$$\begin{cases} \Delta\omega^a_b \wedge \omega^b = 0, \\ \Delta\omega^b_a \wedge \omega_b = 0, \end{cases} \qquad (6.3)$$

где $\Delta\omega^a_b = d\omega^a_b - \omega^a_d \wedge \omega^d_b + 2\omega^a \wedge \omega_b$.

Расписывая $\Delta\omega^a_b$ через базис и подставляя в (6.3), получим:

$$d\omega^a_b = \omega^a_d \wedge \omega^d_b + \left(A^{ac}_{bd} - 2\delta^a_d\delta^b_c\right)\omega^d \wedge \omega_c. \qquad (6.4)$$

Из (6.1) следует:

$$\begin{cases} d\omega^0_a = -\sqrt{-1}\omega^b_a \wedge \omega_b + \omega_a \wedge \omega, \\ d\omega^a_0 = \sqrt{-1}\omega^a_b \wedge \omega^b - \omega^a \wedge \omega. \end{cases} \qquad (6.5)$$

С другой стороны, имеем:

$$d\omega^i_j = \omega^i_k \wedge \omega^k_j + \frac{1}{2}R^i{}_{jkl}\omega^k \wedge \omega^l.$$

Сравнивая (6.4) и (6.5) с последним равенством, получим:

$$\begin{gathered} R^a{}_{bc}{}^d = A^{ad}_{bc} - \delta^a_d\delta^d_c \qquad R^0{}_a{}^b{}_0 = R^a{}_{00b} = \delta^a_c; \\ R^a{}_{bcd} = R^a{}_b{}^{cd} = R^a{}_{bc0} = R^a{}_b{}^c{}_0 = R^a{}_0{}^c{}_0 = R^a{}_{0c0} = R^0{}_{ab0} = 0. \end{gathered} \qquad (6.6)$$

Тогда:

$$\begin{aligned} & r^a_b = -A^{ac}_{cb} + 2n\delta^a_b, \quad r_{0a} = r^a_0 = 0, \\ & \mathrm{ric} = 2\sqrt{-1}\left(A^{ac}_{cb} - 2n\delta^a_b\right)\omega^b \wedge \omega_a, \\ & \rho = 2\sqrt{-1}\left(A^{ad}_{ac} - 2\delta^a_b\right)\omega^b \wedge \omega_d. \end{aligned} \qquad (6.7)$$

Тогда для многообразия P справедливо:

$$\begin{gathered} B^{\alpha\beta\gamma} = 0, \qquad B^{ab}{}_c = B^{ab}{}_0 = B^{a0}{}_0 = 0, \\ B^{a0}{}_b = -B^{0a}{}_b = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{-1}\delta^a_b + 2\{A^{da}_{db} - 2\delta^a_b\}\right). \end{gathered} \qquad (6.8)$$

Следовательно, P — эрмитово многообразие.

Пусть P — многообразие с келеровой структурой. Тогда $B^{\alpha\beta}{}_\gamma = 0$ и, следовательно, $B^{0a}{}_b = 0 \Leftrightarrow A^{da}_{db} = k\delta^a_b$, где $k = \frac{\left(-4-\sqrt{-1}\right)}{2}$, но A^{da}_{db} — вещественная функция, пришли к противоречию.

Далее, пусть P принадлежит классу $\mathcal{W}_3$. Тогда из формул (6.8) следует $A^{da}_{da} = kn$ или $r^a_a = kn$, что противоречит вещественности функции A^{da}_{db}. Пусть теперь P принадлежит классу $\mathcal{W}_4$. Тогда, если $B^{\alpha\beta}{}_\gamma = \alpha^{[\alpha}\delta^{\beta]}_\gamma$, то $\alpha^a = 0$, $A^{da}_{db} = \frac{8+\alpha^0-\sqrt{-2}}{4}\delta^a_b$, что также является противоречием. Получили:

Теорема 6.1. Если M — связное сасакиево многообразие, тогда в пространстве T^1-расслоения над M индуцируется собственно-эрмитова структура.

7. Квазисасакиево многообразие

Для квазисасакиевой структуры $C^{abc} = C^{ab} = C^{ab}{}_c = D^{ab} = D^a = 0$, $C_a{}^b = -C^b{}_a$, $D^b_a = 2C_a{}^b$. Структурные уравнения квазисасакиева многообразия запишутся в виде:

$$\begin{cases} d\omega^a = & \omega^a_b \wedge \omega^a + C^a{}_b\omega^b \wedge \omega, \\ d\omega_a = & -\omega^b_a \wedge \omega_b - C^b{}_a\omega_b \wedge \omega, \\ d\omega = & -2C^a{}_b\omega^b \wedge \omega_a, \end{cases} \tag{7.1}$$

$$\omega^a_{\hat{b}} = \omega^{\hat{b}}_a = 0, \omega^a_0 = C^a{}_c\omega^c, \quad \omega^0_a = C^b{}_a\omega_b. \tag{7.2}$$

Рассуждая как и выше, получим:

$$\mathrm{ric} = \sqrt{-1}K^a{}_d{}^d\omega_a \wedge \omega + \sqrt{-1}K^d{}_{ad} + 2\sqrt{-1}\Big(A^{ad}_{db} - 2C^a{}_dC^d{}_b\Big)\omega^b \wedge \omega_a.$$

$$\rho = 2\sqrt{-1}K^a{}_{ac}\omega^c \wedge \omega + 2\sqrt{-1}K^a{}_a{}^c\omega_a \wedge \omega + \\ + 2\sqrt{-1}\Big(A^{ac}_{ad} - 2C^a{}_aC^c{}_d\Big)\omega^d \wedge \omega_c. \tag{7.3}$$

где $K^a{}_{bc}$, $K^a{}_b{}^c$, A^{ac}_{bd} — подходящие функции такие, что альтернация по верхним и нижним индексам равна нулю, т.е. $K^a{}_{[bc]} = K^{[a}_{b}{}^{c]} = A^{ac}_{[bd]} = A^{[ac]}_{bd} = 0$.

Следовательно, компоненты виртуальных и структурных тензоров запишутся в виде:

$$\begin{gathered} B^{abc} = B^{ab0} = B^{0ab} = 0, \quad B^{0a}{}_b = -B^{a0}{}_b = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\Big(C^a{}_b + 2A^{da}_{db} - 4C^d{}_dC^a{}_b\Big), \\ B^{ab}{}_c = B^{ab}{}_0 = B^{a0}{}_0 = B^{0a}{}_0 = 0, \qquad B^{0a0} = \tfrac{\sqrt{-1}}{2}K^d{}_d{}^a. \end{gathered} \tag{7.4}$$

Заметим, что $B^{[0a0]} = 0$ и, следовательно, $B^{[\alpha\beta\gamma]} = 0$; таким образом, P — G_2-многообразие. Эрмитовость многообразия P равносильна тому, что $K^d{}_d{}^a = K^d{}_{da} = 0$, и из структурных уравнений многообразия M имеем $dC^a{}_a = 0$.

Теорема 7.1. Если M — связное квазисасакиево многообразие, то:

1) Структура, индуцируемая в пространстве T^1-расслоения, является G_2-структурой.
2) G_2-структура, индуцированная в пространстве T^1-расслоения, интегрируема $\Rightarrow$ $C^a{}_a = \mathrm{const}$.

8. Компоненты тензора Римана—Кристоффеля

В римановой геометрии важную роль играет тензор Римана—Кристоффеля. Найдем компоненты этого тензора индуцированной на пространстве главного T^1-расслоения $\mathcal{AH}$-структуры.

Пусть $\tilde{R}$ — тензор кривизны на базе, R — тензор кривизны, индуцированной на многообразии P.

Пусть $X, Y, Z \in \mathcal{H}, \tilde{X} = \pi_* X, \tilde{Y} = \pi_* Y, \tilde{Z} = \pi_* Z$. Тогда, согласно теореме 3.4, получим:

$$\begin{aligned}\nabla_X Y = \ & p_H(\nabla_X Y) + p_V(\nabla_X Y) = (i_H \circ \pi_*)\nabla_X Y + \langle \nabla_X Y, \nu\rangle \nu = \\ = \ & i_H(\nabla_{\pi X}(\pi Y)) - g_0(\omega(\nu)\Omega(X,Y)) = i_H \nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y} - \Omega(X,Y),\end{aligned}$$

где g_0 — биинвариантная метрика на $G = T^1$, т.е $g_0(\omega(U), \omega(V)) = \omega(U)\omega(V)$, $U, V \in \mathcal{X}(M)$.

Заметим также, что $\nabla_\nu \Omega(X,Y) = 0$. В самом деле:

$$\nabla_\nu \Omega(X,Y) = \nu(\Omega(X,Y)) = \nu((\pi^*\Omega^*)(X,Y)) = (\pi_*\nu)(\Omega^*(\tilde{X}\tilde{Y})) \circ \pi = 0.$$

Далее:

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z. \tag{8.1}$$

Имеем:

$$\begin{aligned}\nabla_X \nabla_Y Z = \nabla_X\Big(i_H \nabla_{\tilde{Y}} \tilde{Z} - \Omega(Y,Z)\nu\Big) = \\ = i_H \nabla_{\tilde{X}} \nabla_{\tilde{Y}} \tilde{Z} - \Omega(Y,Z)\Omega(X,\varepsilon_\lambda)\varepsilon^\lambda - \Omega(Y,Z)\Omega(X,\xi)\xi - \\ - \Big(\Omega(X, \nabla_Y Z) + \nabla_X \Omega(Y,Z)\Big)\nu;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla_Y \nabla_X Z = i_H \nabla_{\tilde{Y}} \nabla_{\tilde{X}} \tilde{Z} - \Omega(X,Z)\Omega(Y,\varepsilon_\lambda)\varepsilon^\lambda - \Omega(X,Z)\Omega(Y,\xi)\xi - \\ - \Big(\Omega(Y, \nabla_X Z) + \nabla_Y(\Omega(X,Z))\Big)\nu;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X = i_H \nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y} - i_H \nabla_{\tilde{Y}} \tilde{X} - \Omega(X,Y)\nu + \Omega(Y,X)\nu = \\ = i_H[\tilde{X}, \tilde{Y}] - 2\Omega(X,Y)\nu;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla_{[X,Y]} Z = i_H \nabla_{[\tilde{X},\tilde{Y}]} \tilde{Z} - 2\Omega(X,Y)\nabla_\nu Z + \langle \nabla_{[X,Y]} Z, \nu\rangle \nu = \\ = i_H \nabla_{[\tilde{X},\tilde{Y}]} \tilde{Z} - 2\Omega(X,Y)\Omega(Z,\varepsilon_\lambda)\varepsilon^\lambda - 2\Omega(X,Y)\Omega(Z,\xi)\xi - \Omega([X,Y],Z)\nu.\end{aligned}$$

Подставим полученные равенства в (8.1):

$$\begin{aligned}R(X,Y)Z = \tilde{R}(\tilde{X},\tilde{Y})\tilde{Z} + \\ + (\Omega(X,Z)\Omega(Y,\varepsilon_\lambda) - \Omega(Y,Z)\Omega(X,\varepsilon_\lambda) + 2\Omega(X,Y)\Omega(Z,\varepsilon_\lambda))\,\varepsilon^\lambda + \\ + \Big(\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\{\nabla_Y(\Omega)(X,Z) - \nabla_X(\Omega)(Y,Z)\} + \Omega(X,Z)\Omega(Y,\varepsilon_0) - \\ - \Omega(Y,Z)\Omega(X,\varepsilon_0) + 2\Omega(X,Y)\Omega(Z,\varepsilon_0)\Big)\varepsilon_0 + \\ + \Big(\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\{\nabla_X(\Omega)(Y,Z) - \nabla_Y(\Omega)(X,Z)\} + \Omega(X,Z)\Omega(Y,\varepsilon_0) - \\ - \Omega(Y,Z)\Omega(X,\varepsilon_0) + 2\Omega(X,Y)\Omega(Z,\varepsilon_0)\Big)\varepsilon^0.\end{aligned}$$

Далее,

$$R(X,\nu)Y = \nabla_X \nabla_\nu Y - \nabla_\nu \nabla_X Y - \nabla_{[X,\nu]} Y = \nabla_X \nabla_\nu Y - \nabla_\nu \nabla_X Y.$$

Прежде всего заметим, что, т.к. ∇ — риманова связность, то $\langle\nabla_X Y, Z\rangle = -\langle\nabla_X Z, Y\rangle$ и, следовательно, получим:

$$\Omega(Y,\varepsilon_\gamma)(i_H\nabla_{\tilde X}\tilde\varepsilon^\gamma) + \Omega(Y,\xi)(i_H\nabla_{\tilde X}\tilde{\tilde\xi}) = \Omega(Y,\varepsilon_\gamma)\langle i_H\nabla_{\tilde X}\tilde\varepsilon^\gamma, \varepsilon_\lambda\rangle\varepsilon^\lambda +$$
$$+ \Omega(Y,\varepsilon_\gamma)\langle i_H\nabla_{\tilde X}\tilde\varepsilon^\gamma, \xi\rangle\xi + \Omega(Y,\xi)\langle i_H\nabla_{\tilde X}\tilde{\tilde\xi}, \varepsilon^\lambda\rangle\varepsilon_\lambda + \Omega(Y,\xi)\langle i_H\nabla_{\tilde X}\tilde{\tilde\xi}, \xi\rangle\xi =$$
$$= -\Omega(Y, i_H\nabla_{\tilde X}\tilde\varepsilon_\lambda)\varepsilon^\lambda - \Omega(Y, i_H\nabla_{\tilde X}\tilde{\tilde\xi})\xi.$$

Следовательно:

$$R(X,\nu)Y = \nabla_X(\Omega)(Y,\varepsilon_\gamma)\varepsilon^\gamma +$$
$$+\Big(\frac{1}{\sqrt2}\nabla_X(\Omega)(Y,\xi) - \sqrt{-2}\,\Omega(Y,\varepsilon_0)\Omega(X,\varepsilon_0) - \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt2}\Omega(Y,\varepsilon_\gamma)\Omega(X,\varepsilon^\gamma)\Big)\varepsilon_0 +$$
$$+\Big(\frac{1}{\sqrt2}\nabla_X(\Omega)(Y,\xi) + \sqrt{-2}\,\Omega(Y,\varepsilon_0)\Omega(X,\varepsilon_0) + \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt2}\Omega(Y,\varepsilon_\gamma)\Omega(X,\varepsilon^\gamma)\Big)\varepsilon^0.$$

Аналогично можно показать:

$$R(\nu,X)\nu = \Big(-\Omega(X,\varepsilon_\gamma)\Omega_\lambda{}^\gamma - 2\Omega(X,\varepsilon_0)\Omega_{\lambda0}\Big)\varepsilon^\lambda +$$
$$+ 2\Omega(X,\varepsilon^\lambda)\Omega_{\lambda0}\varepsilon_0 + \Omega(X,\varepsilon^\lambda)\Omega_{\lambda0}\varepsilon^0,$$

$$R(X,Y)\nu = -R(Y,\nu)X - R(\nu,X)Y =$$
$$= \nabla_{\varepsilon_\lambda}(\Omega)(Y,X)\varepsilon^\lambda + \frac{1}{\sqrt2}\nabla_\xi(\Omega)(Y,X)\varepsilon_0 + \frac{1}{\sqrt2}\nabla_\xi(\Omega)(Y,X)\varepsilon^0.$$

Суммируя полученные результаты, получим следующее утверждение:

Предложение 8.1. Справедливы следующие равенства:

1) $$R(X,Y)Z = \tilde R(\tilde X,\tilde Y)\tilde Z + \Big(\Omega(X,Z)\Omega(Y,\varepsilon_\lambda) - \Omega(Y,Z)\Omega(X,\varepsilon_\lambda) +$$
$$+ 2\Omega(X,Y)\Omega(Z,\varepsilon_\lambda)\Big)\varepsilon^\lambda + \Big(\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt2}(\nabla_Y(\Omega)(X,Z) - \nabla_X(\Omega)(Y,Z)) +$$
$$+ \Omega(X,Z)\Omega(Y,\varepsilon_0) - \Omega(Y,Z)\Omega(X,\varepsilon_0) + 2\Omega(X,Y)\Omega(Z,\varepsilon_0)\Big)\varepsilon_0 +$$
$$+\Big(\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt2}(\nabla_X(\Omega)(Y,Z) - \nabla_Y(\Omega)(X,Z)) + \Omega(X,Z)\Omega(Y,\varepsilon_0) -$$
$$- \Omega(Y,Z)\Omega(X,\varepsilon_0) + 2\Omega(X,Y)\Omega(Z,\varepsilon_0)\Big)\varepsilon^0;$$

2) $$R(X,\nu)Y = \nabla_X(\Omega)(Y,\varepsilon_\gamma)\varepsilon^\gamma +$$
$$+\Big(\frac{1}{\sqrt2}\nabla_X(\Omega)(Y,\xi) - \sqrt{-2}\,\Omega(Y,\varepsilon_0)\Omega(X,\varepsilon_0) - \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt2}\Omega(Y,\varepsilon_\gamma)\Omega(X,\varepsilon^\gamma)\Big)\varepsilon_0 +$$
$$+\Big(\frac{1}{\sqrt2}\nabla_X(\Omega)(Y,\xi) + \sqrt{-2}\,\Omega(Y,\varepsilon_0)\Omega(X,\varepsilon_0) + \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt2}\Omega(Y,\varepsilon_\gamma)\Omega(X,\varepsilon^\gamma)\Big)\varepsilon^0;$$

3) $$R(\nu,X)\nu = \Big(-\Omega(X,\varepsilon_\gamma)\Omega_\lambda{}^\gamma - 2\Omega(X,\varepsilon_0)\Omega_{\lambda0}\Big)\varepsilon^\lambda +$$
$$+ 2\Omega(X,\varepsilon^\lambda)\Omega_{\lambda0}\varepsilon_0 + \Omega(X,\varepsilon^\lambda)\Omega_{\lambda0}\varepsilon^0;$$

$$4)\ R(X,Y)\nu = \nabla_{\varepsilon_\lambda}(\Omega)(Y,X)\varepsilon^\lambda + \frac{1}{\sqrt{2}}\nabla_\xi(\Omega)(Y,X)\varepsilon_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}\nabla_\xi(\Omega)(Y,X)\varepsilon^0.$$

Т.к. ε_α, ξ — горизонтальные векторные поля, то, подставляя их в первые три равенства предложения, получим:

Следствие 1. Справедливы следующие соотношения:

$$1)\ R(\xi,\varepsilon_\alpha)\xi = \tilde{R}\Big(\tilde{\xi},\tilde{\varepsilon}_\alpha\Big)\tilde{\xi} + 6\Omega_{0\alpha}\Omega_{0\lambda}\varepsilon^\lambda + \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\nabla_\xi(\Omega)(\xi,\varepsilon_\alpha)\varepsilon_0 - \\ - \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\nabla_\xi(\Omega)(\xi,\varepsilon_\alpha)\varepsilon^0;$$

$$2)\ R(\xi,\nu)\varepsilon_\alpha = \nabla_X(\Omega)(Y,\varepsilon_\gamma)\varepsilon^\gamma + \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\nabla_\xi(\Omega)(\varepsilon_\alpha,\xi) - \sqrt{-1}\Omega_{\alpha\lambda}\Omega_0{}^\lambda\Big)\varepsilon_0 + \\ + \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\nabla_\xi(\Omega)(\varepsilon_\lambda,\xi) + \sqrt{-1}\Omega_{\alpha\lambda}\Omega_0{}^\lambda\Big)\varepsilon^0;$$

$$3)\quad R(\nu,\varepsilon_\alpha)\nu = \Big(- \Omega_{\alpha\gamma}\Omega_\lambda{}^\gamma - 2\Omega_{\alpha 0}\Omega_{\lambda 0}\Big)\varepsilon^\lambda + \Omega_\alpha{}^\lambda\Omega_{\lambda 0}\varepsilon_0 + \Omega_\alpha{}^\lambda\Omega_{\lambda 0}\varepsilon^0.$$

Из предложения 8.1 и следствия к нему, учитывая определения ε_0, ε^0, несложно получить следующее утверждение:

Предложение 8.2. В принятых обозначениях справедливы следующие соотношения:

$$1)\ R(\varepsilon_0,\varepsilon_\alpha)\varepsilon_{\hat{0}} = \frac{1}{2}\tilde{R}(\tilde{\xi},\tilde{\varepsilon}_\alpha)\tilde{\xi} + \Big(\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\nabla_\xi(\Omega)(\varepsilon_\alpha,\xi) + \Omega_\lambda{}^\gamma\Omega_{\gamma 0}\Big) + \\ + \Big(2\Omega_{0\alpha}\Omega_{0\lambda} - \frac{1}{2}\Omega_{\alpha\gamma}\Omega_\lambda{}^\gamma + \frac{\sqrt{-1}}{2}\nabla_\xi(\Omega)(\varepsilon_\alpha,\varepsilon_\lambda)\Big)\varepsilon^\lambda;$$

$$2)\ R(\varepsilon_\alpha,\varepsilon_\beta)\varepsilon_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{R}(\tilde{\varepsilon}_\alpha,\tilde{\varepsilon}_\beta)\tilde{\xi} + \sqrt{-1}\nabla_\xi(\Omega)(\varepsilon_{\alpha\beta})\varepsilon_0 + \\ + \Big(-\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\nabla_{\varepsilon_\lambda}(\Omega)(\varepsilon_\beta,\varepsilon_\alpha) + \Omega_{\alpha 0}\Omega_{\beta 0} - \Omega_{\alpha\lambda}\Omega_{\beta 0} + 2\Omega_{\alpha\beta}\Omega_{0\lambda}\Big)\varepsilon^\lambda;$$

$$3)\ R(\varepsilon_\alpha,\varepsilon_0)\varepsilon_\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{R}(\tilde{\varepsilon}_\alpha,\tilde{\xi})\tilde{\varepsilon}_\beta + \Big(-\frac{\sqrt{-1}}{2}\nabla_\xi(\Omega)(\varepsilon_\alpha,\varepsilon_\beta) - \frac{1}{2}\Omega_{\alpha\lambda}\Omega_\beta{}^\lambda + \\ + 2\Omega_{\alpha 0}\Omega_{\beta 0}\Big)\varepsilon_0 + \Big(-\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\nabla_{\varepsilon_\alpha}(\Omega)(\varepsilon_\beta,\varepsilon_\lambda) + \Omega_{\alpha\beta}\Omega_{0\lambda} - \Omega_{0\beta}\Omega_{\alpha\lambda} + 2\Omega_{\alpha 0}\Omega_{\beta\lambda}\Big)\varepsilon^\lambda + \\ + \Big(-\frac{\sqrt{-1}}{2}\nabla_{\varepsilon_\beta}(\Omega)(\varepsilon_\alpha,\xi) - \frac{\sqrt{-1}}{2}\nabla_{\varepsilon_\alpha}(\Omega)(\varepsilon_\beta,\xi) + \frac{1}{2}\Omega_{\alpha\lambda}\Omega_\beta{}^\gamma + 4\Omega_{\alpha 0}\Omega_{\beta 0}\Big)\varepsilon^0;$$

$$4)\ R(\varepsilon_\alpha,\varepsilon_{\hat{0}})\varepsilon_{\hat{0}} = \frac{1}{2}\tilde{R}(\tilde{\varepsilon}_\alpha,\tilde{\xi})\tilde{\xi} + \Big(\sqrt{-1}\nabla_\xi(\Omega)(\varepsilon_\alpha,\xi) + \frac{1}{2}\Omega_\alpha{}^\lambda\Omega_{\lambda 0}\Big)\varepsilon^0 + \\ + \Big(\frac{\sqrt{-1}}{2}\Big\{\nabla_{\varepsilon_\alpha}(\Omega)(\xi,\varepsilon_\lambda) - \nabla_{\varepsilon_\lambda}(\Omega)(\varepsilon_\alpha,\xi)\Big\} - 4\Omega_{0\alpha}\Omega_{0\lambda} - \frac{1}{2}\Omega_{\alpha\gamma}\Omega_\lambda{}^\gamma\Big)\varepsilon^\lambda;$$

5) $R(\varepsilon_0, \varepsilon_{\hat{0}})\varepsilon_{\hat{0}} = \left(\frac{\sqrt{-1}}{2}\nabla_\xi(\Omega)(\xi, \varepsilon_\lambda) - \Omega_{0\gamma}\Omega_\lambda{}^\gamma\right)\varepsilon^\lambda + 2\Omega_{0\gamma}\Omega_0{}^\gamma\varepsilon_0.$

Таким образом, обобщая полученные результаты, можно вычислить компоненты тензора Римана—Кристоффеля:

Теорема 8.1. Компоненты тензора Римана—Кристоффеля можно записать в виде:

$$\begin{array}{lll}
1) & R_{\alpha\beta\gamma\delta} = & \tilde{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} + \Omega_{\alpha\gamma}\Omega_{\beta\gamma} - \Omega_{\beta\gamma}\Omega_{\alpha\delta} + 2\Omega_{\alpha\beta}\Omega_{\gamma\delta};\\
2) & R_{\alpha\beta\gamma0} = & \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{R}_{\alpha\beta\gamma0} - \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\Omega_{\alpha\beta,\gamma} + \Omega_{\alpha\gamma}\Omega_{\beta0} - \Omega_{\beta\gamma}\Omega_{\alpha0} + 2\Omega_{\alpha\beta}\Omega_{\gamma0};\\
3) & R_{\alpha\beta\gamma\hat{0}} = & \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{R}_{\alpha\beta\gamma0} - \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\Omega_{\alpha\beta,\gamma} + \Omega_{\alpha\gamma}\Omega_{\beta0} - \Omega_{\beta\gamma}\Omega_{\alpha0} + 2\Omega_{\alpha\beta}\Omega_{\gamma0};\\
4) & R_{\alpha\beta0\hat{0}} = & \sqrt{-1}\nabla_\xi(\Omega)(\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta);\\
5) & R_{\alpha0\beta0} = & \frac{1}{2}\tilde{R}_{\alpha0\beta0} - \frac{\sqrt{-1}}{2}\nabla_{\varepsilon_\beta}(\Omega)(\varepsilon_\alpha, \xi) - \frac{\sqrt{-1}}{2}\nabla_{\varepsilon_\alpha}(\Omega)(\varepsilon_\beta, \xi) +\\
& & + \frac{1}{2}\Omega_{\alpha\gamma}\Omega_\beta{}^\gamma + 4\Omega_{\alpha0}\Omega_{\beta0};\\
6) & R_{\alpha0\beta\hat{0}} = & \frac{1}{2}\tilde{R}_{\alpha0\beta0} + 2\Omega_{0\alpha}\Omega_{0\beta} - \frac{1}{2}\Omega_{\alpha\gamma}\Omega_\beta{}^\gamma + \frac{\sqrt{-1}}{2}\nabla_\xi(\Omega)(\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta);\\
7) & R_{\alpha\hat{0}\beta\hat{0}} = & \frac{1}{2}\tilde{R}_{\alpha0\beta0} - \frac{\sqrt{-1}}{2}\left(\nabla_{\varepsilon_\alpha}(\Omega)(\xi, \varepsilon_\beta) - \nabla_{\varepsilon_\beta}(\Omega)(\varepsilon_\alpha, \xi)\right) -\\
& & -4\Omega_{\alpha0}\Omega_{\beta0} - \frac{1}{2}\Omega_{\alpha\gamma}\Omega_\beta{}^\gamma;\\
8) & R_{\alpha0\hat{0}0} = & \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\nabla_\xi(\Omega)(\xi, \varepsilon_\alpha) + \Omega_{0\gamma}\Omega_\alpha{}^\gamma;\\
9) & R_{\alpha\hat{0}0\hat{0}} = & \frac{-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\nabla_\xi(\Omega)(\varepsilon_\alpha, \xi) - \Omega_{\gamma0}\Omega_\alpha{}^\gamma;\\
10) & R_{0\hat{0}0\hat{0}} = & 2\Omega_{0\gamma}\Omega_0{}^\gamma.
\end{array}$$

Литература

[1] Банарау М.Б. Новая характеризация классов $\mathcal{AH}$-структуры Грея-Хервеллы //Смоленский пединститут. Деп. в ВИНИТИ 25.11.1992 №3334-В92. 35 с.

[2] Кириченко В.Ф. Дифференциальная геометрия главных тороидальных расслоений // Фундаментальная и прикладная математика. 2000. Т. 6. №4. С. 1095–1120.

[3] Кириченко В.Ф. Дифференциально-геометрические структуры. Тверь: Твер. гос. ун-т, 2001.

[4] Кириченко В.Ф. Методы обобщенной почти эрмитовой геометрии в теории почти контактных многообразий //Итоги науки и техники. Проблемы геометрии. 1986. Т. 18. С. 25–71.

[5] Кобаяши Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1981.

[6] Родина Е.В. О геометрии линейных расширений почти контактных многообразий // МПГУ им. В.И. Ленина. Деп. в ВИНИТИ 26.06.96. №2110-В96.

[7] Kobayashi S. Principal fibre bundle with the 1-dimensional toroidal group // Tôhoku Math. J. V. 8. P. 29–45.

CANONICAL PRINCIPAL T^1-BUNDLE OVER ODD-DIMENSIONAL MANIFOLD[3]

© 2003 A.V. Savinov[4]

The geometry of principal T^1-bundle over almost contact manifold is studied. It is proved that almost Hermitian structure is canonically induced on the space of such a bundle. The structure is determined by the so called generalized Ricci form. This form is calculated explicitly. By using this result important properties of the canonical almost Hermitian structures including curvature properties are studied.

Поступила в редакцию $8/I/2003$;
в окончательном варианте — $29/IV/2003$.

[3] Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. Y.N. Radayev.

[4] Savinov Alexandr Valer'evitch, Dept. of Geometry, Moscow State Pedagogical University, 107140, Moscow, Russia.