

ОГРАНИЧЕННЫЕ НА ВСЕЙ ОСИ РЕШЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ¹

© 2003 Е.В. Китаева²

Рассматривается задача приближенного отыскания ограниченных на всей оси решений систем сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений и краевых задач для параболических уравнений. Изучены разностные дискретизации этих задач, доказаны априорные оценки производных решений непрерывных и дискретных задач и соответствующие оценки погрешности.

Введение

Метод интегральных многообразий является одним из основных инструментов качественной теории дифференциальных уравнений [1–3]. Актуальной является задача численного отыскания интегральных многообразий. Для ее решения важным промежуточным звеном является задача приближенного отыскания ограниченных на всей оси решений сингулярно возмущенных уравнений и систем. В настоящей работе рассматриваются ограниченные на всей оси решения дискретизаций сингулярно возмущенных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений и краевых задач для параболических уравнений. Доказываются теоремы существования и единственности решений непрерывных и дискретных задач, априорные оценки производных и оценки погрешности этих решений. Рассматриваемые задачи являются модельными для задач теории теплового взрыва.

¹ Представлена доктором физико-математических наук профессором В.А. Солевым.

² Китаева Елена Викторовна, кафедра дифференциальных уравнений и теории управления Самарского государственного университета, Самара, 443011, ул. Акад. Павлова, 1.

1. Модельная линейная задача

Введем обозначения. Буква ε обозначает малый положительный параметр. Символ $[a]$ обозначает целую часть вещественного числа a . Z — множество целых чисел. Символ $|x|$ означает модуль числа или максимальную по модулю компоненту вектора. Пусть m — натуральное число. Запись $\|x\| = m^{-1/2}(\sum_{i=1}^m |x_i|^2)^{1/2}$ означает евклидову норму вектора $x \in R^m$. Далее, $l_\infty = \{z = \{z_n\}, n \in Z\}$ — пространство ограниченных числовых последовательностей $z_n \in R$ с нормой $\|z\|_\infty = \sup_{n \in Z} |z_n|$. Тем же символом $\|x\|_\infty = \max_{n \in [1, m]} |x_n|$ будем обозначать соответствующую норму вектора в R^m . Если A — квадратная $m \times m$ -матрица, то запись $\|A\|$ обозначает спектральную норму матрицы, а $\|A\|_\infty$ — операторную норму A в пространстве R^m с соответствующей нормой. $C(\Omega)$ — пространство ограниченных на $(-\infty, +\infty)$ непрерывных функций с нормой $\|u\|_{C(\Omega)} = \sup_{t \in \Omega} \|u(t)\|$. Пространство $[C(R)]^m$ с нормой $\|x\|_{C,2} = \sup_{t \in R} \|x(t)\|$ будем обозначать $[C(R)]_2^m$, а то же пространство с нормой $\|x\|_{C,\infty} = \sup_{t \in R} \|x(t)\|_\infty$ обозначим $[C(R)]_\infty^m$. Символом C будем обозначать константы (вообще говоря, различные), не зависящие от ε . Иногда для таких констант будем применять обозначения $C_1, C_2, \dots$. Если для некоторой величины γ имеют место оценки $|\gamma| \leq C|\beta|$, то будем писать $\gamma = O(\beta)$, а если $0 < C_1|\beta| \leq |\gamma| \leq C_2|\beta|$, то $\gamma = O^*(\beta)$. Символом I будем обозначать единичную матрицу или тождественный оператор. Для векторов или матриц запись $A \leq B$ означает, что $a_{ij} \leq b_{ij}$ ($a_i \leq b_i$) для всех элементов. Запись $A \leq 0$ ($A \geq 0$) означает, что $a_{ij} \leq 0$ ($a_{ij} \geq 0$) для всех элементов. Символ $\text{diag}\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ обозначает диагональную $m \times m$ -матрицу с элементами a_i на главной диагонали. Символом $x_{\tau,1}^n = \frac{x(\tau(n+1)) - x(\tau n)}{\tau}$ будем обозначать разностную аппроксимацию первой производной на сетке с шагом τ , а через $x_{\tau,i+1}^n = \frac{x_{\tau,i}^{n+1} - x_{\tau,i}^n}{\tau}$, $i \geq 1$ — соответствующие аппроксимации высших производных. Константы C_i будем считать не зависящими также и от τ .

Технические утверждения, которые носят вспомогательный характер, будем называть леммами и предложениями. Основные результаты статьи будем формулировать в виде теорем.

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varepsilon \dot{x} = A(t)x + f(t). \quad (1.1)$$

Здесь $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$, $(x_s = x_s(t))$ — неизвестная вектор-функция, $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)^T$, $f_s = f_s(t)$, $-\infty < t < +\infty$ — заданная вектор-функция, $A(t) = \{a_{ij}(t)\}$ — симметричная квадратная матрица порядка m . Предположим, что

А1. Матричная функция $A(t)$ ограничена равномерно по $t \in (-\infty, +\infty)$ вместе с $2k_1 + 1$ производными и имеет собственные значения $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_k > 0 > \lambda_{k+1} > \dots > \lambda_m$, причем $\inf_{t \in (-\infty, +\infty)} |\lambda_i(t)| \geq \lambda_0 > 0$.

А2. Вектор-функция $f(t)$ равномерно ограничена при $t \in (-\infty, +\infty)$ вместе с $2k_1 + 1$ производными $\|\frac{d^i}{dt^i} f\|_\infty, 0 \leq i \leq 2k_1 + 1$.

Лемма 1. Система (1.1) имеет единственное ограниченное при $t \in (-\infty, +\infty)$ решение $x(t)$. Для этого решения справедливы оценки

$$\sup_{t \in (-\infty, +\infty)} \|x^{(i)}(t)\|_\infty \leq C, \quad 0 \leq i \leq k_1. \quad (1.2)$$

Эта и последующие леммы и теоремы будут доказаны в следующем параграфе.

Поставим задачу численного отыскания ограниченного на всей оси решения задачи (1.1).

Рассмотрим соответствующую дискретную задачу. Зафиксируем некоторое τ , для которого

$$\left| \frac{\tau}{\varepsilon} \lambda_i(t) \right| \leq 1 - C, \quad 1 \leq i \leq m, \quad t \in R. \quad (1.3)$$

Пусть последовательность векторов x^n удовлетворяет условиям

$$x^{n+1} = (I + \frac{\tau}{\varepsilon} A(\tau n))x^n + \frac{\tau}{\varepsilon} f(\tau n). \quad (1.4)$$

Пусть I_k, I_m — единичные матрицы порядков k, m соответственно, $P = \text{diag}(I_k, 0)$.

Теорема 1. Найдутся такие $\varepsilon_0 > 0$, $\gamma_0 > 0$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\frac{\tau}{\varepsilon} \leq \gamma_0$ существует определенная на $Z \times Z$ матричнозначная функция $U(n, l)$ удовлетворяющая следующим условиям.

1. Для любых n, l $\varepsilon \frac{U(n+1, l) - U(n, l)}{\tau} - A(n)U(n, l) = \delta_{n, l} I$, где $\delta_{n, l}$ — символ Кронекера.

2. Справедливы оценки

$$\|U(n, l)\|_\infty \leq C(1 - \frac{\lambda_0}{2\varepsilon} \tau)^{|n-l|}. \quad (1.5)$$

Данная теорема является дискретным аналогом леммы 2.1 из [1]. Ее доказательство приводится в следующем параграфе.

Теорема 2. Найдутся такие $\varepsilon_0 > 0$, $\gamma_0 > 0$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\frac{\tau}{\varepsilon} \leq \gamma_0$ задача (1.4) имеет единственное ограниченное при $n \in (-\infty, +\infty)$ решение

$$x^n = \frac{\tau}{\varepsilon} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} U(n, s) f(\tau s). \quad (1.6)$$

Для него справедливы оценки

$$\sup_{n \in (-\infty, +\infty)} \|x^n\|_\infty \leq C, \quad \sup_{n \in (-\infty, +\infty)} \|x_{\tau, i}^n\|_\infty \leq C, \quad 1 \leq i \leq k_1. \quad (1.7)$$

Теорема 3. Для ограниченных на всей оси решений (2.1) и (1.6) систем (1.1) и (1.4) справедливы оценки

$$\|x(\tau n) - x^n\|_\infty \leq C\epsilon\tau. \quad (1.8)$$

Таким образом, вместо решения задачи (1.1) можно искать решение (1.6).

2. Доказательства и вспомогательные результаты

Доказательство леммы 1. Пусть I_k, I_{m-k} — единичные матрицы порядков $k, m-k$ соответственно, $P = \text{diag}(I_k, 0)$. Тогда согласно [1, лемма 2.1] однородная система (1.1) имеет такую фундаментальную матрицу $U(t)$, что матрица

$$U(t, \xi) = \begin{cases} U(t)PU^{-1}(\xi), & t \leq \xi, \\ U(t)(P - I_{m-k})U^{-1}(\xi), & t > \xi \end{cases}$$

удовлетворяет условию

$$\|U(t, \xi)\|_\infty \leq C \exp(-\frac{\gamma_0}{\epsilon}|t - \xi|)$$

при всех t, ξ .

Пусть

$$x(t) = \frac{1}{\epsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} U(t, \xi) f(\xi) d\xi. \quad (2.1)$$

Тогда из результатов [1, гл. 6] следует, что функция (2.1) является единственным ограниченным на всей оси решением системы (1.1). Для доказательства оценок (1.2) будем искать решение (1.1) в виде $x(t) = x_0(t) + \epsilon x_1(t) + \epsilon^2 x_2(t) + \dots + \epsilon^{k_1} x_{k_1}(t) + r(t, \epsilon)$. Подставляя это выражение в (1.1) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ϵ , получим, что $x_0(t) = -A^{-1}f(t)$, $x_i(t) = A^{-1}\dot{x}_{i-1}(t)$, $1 \leq i \leq k_1$, а $r(t, \epsilon)$ есть решение уравнения $\epsilon \dot{r} = Ar - \epsilon^{k_1+1} \dot{x}_{k_1}$. Единственное ограниченное на $(-\infty, \infty)$ решение этого уравнения имеет вид $r(t, \epsilon) = -\epsilon^{k_1} \int_{-\infty}^{+\infty} U(t, \xi) \dot{x}_{k_1}(\xi) d\xi$. Отсюда следует, что $\sup_{t \in (-\infty, +\infty)} r(t, \epsilon) \leq C\epsilon^{k_1+1}$. Из вида $x_i(t)$, $0 \leq i \leq 2$ послед-

ней формулы и предположения A2 следует, что функции $x_i(t), r(t, \epsilon)$ равномерно ограничены вместе с k_1 производными (для производных $r(t, \epsilon)$ эта оценка получается дифференцированием в силу уравнения). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Обозначим через $B(t) = \{b_{ij}(t)\}$ матрицу, приводящую к диагональному виду матрицу $A(t)$. Пусть $-B^{-1}(\tau(s+1)) \frac{B(\tau(s+1)) - B(\tau s)}{\tau} = F(\tau s) = \{f_{ij}(\tau s)\}$. Сделаем в (1.4) замену $x^s = B(\tau s)y^s$. Тогда получим, что система (1.4) примет вид

$$\epsilon \frac{y^{s+1} - y^s}{\tau} = \Lambda(\tau s)y^s + \epsilon F(\tau s)y^{s+1}, \quad (2.2)$$

где $\Lambda(t) = \text{diag}\{\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_m(t)\}$, $G(t) = \text{diag}\{f_{11}(t), f_{22}(t), \dots, f_{mm}(t)\}$. Пусть $V(s) = \text{diag}\{v_1(s), v_2(s), \dots, v_m(s)\}$ — диагональная матрица с диагональными элементами $v_i(s) = \prod_{n=0}^{s-1} (1 + \frac{\tau}{\varepsilon} \lambda_i(\tau n))$, являющаяся фундаментальной матрицей системы, получающейся из (2.2) отбрасыванием слагаемого с матрицей F . Выберем в условии теоремы 1 γ_0, ε_0 столь малыми, чтобы выполнялись условия $1 + \frac{\tau}{\varepsilon} \lambda_i(\tau n) > 0, k+1 \leq i \leq m$. Пусть

$$V(n, l) = \begin{cases} V(n)PV^{-1}(l+1), & n \leq l, \\ V(n)(P - I_m)V^{-1}(l+1), & n > l. \end{cases}$$

Рассмотрим разностное уравнение бесконечного порядка

$$W(n, l) = V(n, l) + \frac{\tau}{\varepsilon} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} V(n, s) \varepsilon F(\tau s) W(s+1, l) \quad (2.3)$$

относительно неизвестной $m \times m$ матричной функции $W(n, l)$ целочисленных аргументов. Введем в рассмотрение полное метрическое пространство $M = \{W = \{W(n, l)\}, n, l \in \mathbb{Z},\}$ $m \times m$ -матричнозначных функций, удовлетворяющих условию $\sup_{n, l \in \mathbb{Z}} \|W(n, l)(1 - \frac{\tau}{\varepsilon} \frac{\lambda_0}{2})^{-|n-l|}\|_{\infty} < +\infty$ с метрикой

$$d(W, V) = \sup_{n, l \in \mathbb{Z}} \|(W(n, l) - V(n, l))(1 - \frac{\tau}{\varepsilon} \frac{\lambda_0}{2})^{-|n-l|}\|_{\infty}.$$

Из вида матриц $V(n), V(n, l)$ следует, что найдутся такие $\varepsilon_0 > 0, \gamma_0 > 0$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0], \frac{\tau}{\varepsilon} \leq \gamma_0$ оператор в правой части (2.3) будет сжимающим в M , и значит имеет там единственный неподвижный элемент W . Из определения $V(n, l)$ согласно формуле (2.3) следует, что матричная функция $U(n, l) = B(\tau n)W(n, l)B^{-1}(\tau l)$ и будет искомой. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Определим последовательность векторов x^n формулами (1.6). Тогда из предположения А2 и условий 1, 2 теоремы 1 следует, что последовательность (1.6) является ограниченным на всей оси решением системы (1.4). Докажем его единственность. В случае, если матрица $A(t)$ диагональна, однородная система (1.4) имеет фундаментальную матрицу $U(k) = \text{diag}\{u_1(k), u_2(k), \dots, u_m(k)\}$, где $u_i(k) = \prod_{n=0}^k (1 + \frac{\tau}{\varepsilon} (\lambda_i(\tau n)))$. Столбцы этой матрицы образуют фундаментальную систему решений однородной системы (1.4), любая нетривиальная линейная комбинация которой неограничена при $n \in \{-\infty, +\infty\}$. Значит, в случае диагональной матрицы, ограниченное решение единственно. В общем случае заметим, что после приведения неоднородной системы к квазидиагональному виду, аналогичному (2.2), в силу уже установленной единственности для диагональной матрицы, получим, что задача отыскания ограниченного решения эквивалентна разностному уравнению вида (2.3), единственность решения которого аналогично доказательству теоремы 1

вытекает из принципа сжатия. Доказательство оценок (1.7) полностью аналогично доказательству оценок (1.2) из леммы 1 с заменой обычных производных разностными и функции Грина дифференциальной задачи разностной функцией Грина. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3. Подставим функцию (2.1) в задачу (1.4). Тогда в силу (1.1), (1.4) для векторов $r^n = x(\tau n) - x^n$ будем иметь

$$r^{n+1} = (I + \frac{\tau}{\varepsilon}A)r^n + \frac{\tau}{\varepsilon}\varepsilon(x_{\tau,1}^n - \dot{x}(\tau n)). \quad (2.4)$$

Поскольку последовательность r^n ограничена по норме, то из (2.4) получаем, что

$$r^n = \frac{\tau}{\varepsilon} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} U(n, l) \varepsilon(x_{\tau,1}^n - \dot{x}(\tau n)). \quad (2.5)$$

Но из оценок (1.2) при $i = 2$ следует, что

$$\|x_{\tau,1}^n - \dot{x}(\tau n)\|_{\infty} = \tau \|\ddot{x}(\xi_n)\|_{\infty} \leq C\tau. \quad (2.6)$$

Из (2.5), (2.6) следует (1.8). Теорема доказана.

Лемма 2. Имеют место оценки

$$\|A(\tau n)x_{\tau,k}^n\|_{\infty} \leq C, 1 \leq k \leq k_1 - 1, \quad (2.7)$$

где C не зависит от n .

Доказательство вытекает из теоремы 2 и равномерной ограниченности матричной функции $A(t)$.

3. Нелинейная задача

Рассмотрим нелинейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varepsilon \dot{x} = F(x, t). \quad (3.1)$$

Здесь $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$, $(x_s = x_s(t))$ — неизвестная вектор-функция, $F = (f_1, f_2, \dots, f_m)^T$, $f_s = f_s(t, x)$, $-\infty < t < +\infty$ — заданная вектор-функция. Предположим, что

А3. Уравнение $F(x, t) = 0$ имеет при $t \in R$ решение $x_0(t)$, причем матрица Якоби $F_x(x_0(t), t)$ удовлетворяет условию А1.

А4. Вектор-функция $F(x, t)$ имеет на множестве $\{(x, t) : t \in R, \|x\|_{\infty} \leq r\}$, где $r > 0$ — достаточно большое, но не зависящее от ε число, все $2k_1 + 1$ частные производные по x_j, t , причем $\|\frac{\partial^{|i|} F}{\partial x^i}\|_{\infty} \leq C, 2 \leq i \leq 2k_1 + 1, \|\frac{\partial^{|i|} F}{\partial x^{i-s} \partial t^s}\|_{\infty} \leq C, s > 0, 0 \leq i \leq 2k_1$.

Тогда из результатов [1, 2] вытекает

Лемма 3. Найдется такое $\varepsilon_0 > 0$ и константа $L > 0$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ задача (3.1) имеет в области $G = \{x \in [C(R)]^m : \|x(t) - x_0(t)\|_{\infty} \leq L\}$

единственное решение $x(t)$, для которого справедливы оценки (1.2), а также оценки

$$\|x(t) - x_0(t)\|_\infty \leq C\varepsilon. \quad (3.2)$$

Рассмотрим соответствующую дискретную задачу. Зафиксируем τ так, чтобы выполнялось условие (1.3). Пусть последовательность векторов x_n удовлетворяет условиям

$$x^{n+1} = x^n + \frac{\tau}{\varepsilon} F(x^n, \tau n). \quad (3.3)$$

Теорема 4. Найдутся такие $\varepsilon_0 > 0$, $\gamma_0 > 0$, $C_1 > 0$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\frac{\tau}{\varepsilon} \leq \gamma_0$ задача (1.4) имеет в области $G_\tau = \{y = \{y^n\} \in l_\infty : \|y^n - x_0(\tau n)\|_\infty \leq C_1\}$ единственное решение $x = \{x^n, n \in \mathbb{Z}\}$. Для него справедливы оценки

$$\sup_{n \in (-\infty, +\infty)} \|x_{\tau, i}^n\|_\infty \leq C, \quad 0 \leq i \leq k_1. \quad (3.4)$$

Доказательство. Перепишем задачу (3.3) в виде

$$\varepsilon \frac{x^{n+1} - x^n}{\tau} = F_x(x_0(\tau n), \tau n)(x^n - x_0(\tau n)) + Q(n, x^n - x_0(\tau n)), \quad (3.5)$$

где $\|Q(n, x) - Q(n, y)\|_\infty \leq \mu(x, y)\|x - y\|_\infty$, $\mu(x, y) \rightarrow 0$ при $\|x\|_\infty \rightarrow 0$, $\|y\|_\infty \rightarrow 0$. Обозначим $A(t) = F_x(x_0(t), t)$. Сделаем в задаче (3.5) замену $x^n - x_0(\tau n) = \delta^n$. Тогда она примет вид

$$\varepsilon \frac{\delta^{n+1} - \delta^n}{\tau} = A(\tau n)\delta^n + r(\tau n, \varepsilon) + R(n, \delta_n), \quad (3.6)$$

где

$$\|r(\tau n, \varepsilon)\|_\infty \leq C\varepsilon, \quad \|R(n, u) - R(n, v)\|_\infty \leq C\mu(u, v)\|u - v\|_\infty. \quad (3.7)$$

Задача об отыскании ограниченного решения (3.6) эквивалентна разностному уравнению

$$\delta^n = \frac{\tau}{\varepsilon} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} U(n, s)r(\tau s, \varepsilon) + Q(\tau n, \varepsilon), \quad (3.8)$$

где $Q(\tau n, \varepsilon) = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} U(n, s)r(\tau s, \varepsilon)$, $\|Q(\tau n, \varepsilon)\|_\infty \leq C\varepsilon$. Из этих оценок и свойств матрицы $U(n, l)$ (см. теорему 1) следует, что при достаточно малых $\varepsilon > 0$ оператор (3.8) будет сжимающим в метрическом пространстве $\{\delta = \{\delta^n \in R^m, n \in \mathbb{Z}\} : \|\delta^n\|_\infty \leq C_1\varepsilon\}$ с метрикой $\rho(\delta, \tilde{\delta}) = \max_{1 \leq n \leq m} \|\delta^n - \tilde{\delta}^n\|_\infty$ для достаточно большой C_1 . Доказательство оценок (3.4) аналогично доказательству аналогичных оценок в лемме 1 и 2. Теорема доказана.

Теорема 5. Для многообразий систем (3.1) и (3.3) справедливы оценки (1.8).

Доказательство. Подставим решение задачи (3.1) в задачу (3.3). Тогда для векторов $r^n = x^n - x(\tau n)$ будем иметь

$$\varepsilon \frac{r^{n+1} - r^n}{\tau} = F_x(x(\tau n), \tau n)r^n + R(r^n) + \varepsilon(\dot{x}(\tau n) - x_{\tau, 1}^n), \quad (3.9)$$

где

$$R(r^n) = F(x^n, \tau n) - F(x(\tau n), \tau n) - F_x(x(\tau n), \tau n)r^n,$$

и в силу свойств дифференцируемых отображений при условии $\|p\|_\infty \leq \nu$, $\|q\|_\infty \leq \nu$, где ν — достаточно малое число,

$$\|R(q^n) - R(p^n)\|_\infty \leq \mu(\nu)\|q^n - p^n\|_\infty, \quad \lim_{y \rightarrow 0} \mu(y) = 0. \quad (3.10)$$

Поскольку в силу (3.2) при достаточно малых $\varepsilon > 0$ матрица $F_x(x(\tau n), \tau n)$ удовлетворяет условиям, аналогичным A1, то задача (3.9) будет эквивалентна разностному уравнению

$$r^n = \frac{\tau}{\varepsilon} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} W(n, l) [\varepsilon(x_{\tau,1}^n - \dot{x}(\tau n)) + R(r^n)], \quad (3.11)$$

где матрица $W(n, l)$ удовлетворяет оценкам вида (1.5).

Но из леммы 3 аналогично (2.6) следует, что

$$\|x_{\tau,1}^n - \dot{x}(\tau n)\|_\infty = \tau \|\ddot{x}(\xi_n)\|_\infty \leq C\tau. \quad (3.12)$$

Из (3.10)–(3.12) следует, что при достаточно малых ε, τ и некотором C_1 уравнение (3.11) в шаре $B(0, C_1 \varepsilon \tau)$ метрического пространства, рассмотренного в доказательстве теоремы 4, будет эквивалентно задаче (3.9), а оператор в правой части (3.11) будет сжимающим в этом шаре. Поэтому в этом шаре будет существовать единственное решение задачи (3.9). Теорема доказана.

4. Линейная задача высокого порядка

При частичной дискретизации параболических уравнений возникают задачи вида (1.1) высоких порядков. В данном параграфе рассматривается задача (1.1) в предположении $m \gg 1$. Всюду предполагается, что константы $C, C_1, C_2, \dots$ не зависят также и от m . Предположения A1 и A2 в данном пункте сформулируем следующим образом.

B1. Матричная функция $A(t)$ имеет собственные значения $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_k > 0 > \lambda_{k+1} > \dots > \lambda_m$, где k не зависит от m , причем справедливы оценки

$$\lambda_s = O^*(s^2), \quad |\lambda_i - \lambda_j| \geq C|i - j|^2, \quad i \neq j, \quad \inf_{t \in (-\infty, +\infty)} |\lambda_i(t)| \geq \lambda_0 > 0. \quad (4.1)$$

Матричная функция $A(t)$ имеет $2k_1 + 1$ производных, для которых справедливы оценки

$$\|A^{(i)}(t)\|_\infty \leq C, \quad 1 \leq i \leq 2k_1 + 1.$$

B2. Вектор-функция $f(t)$ равномерно ограничена при $t \in (-\infty, +\infty)$ вместе с $2k_1 + 1$ производными, т.е. $\|\frac{d^i}{dt^i} f\|_\infty, \quad 0 \leq i \leq k_1$.

Кроме того, сделаем следующее предположение.

В3. Найдется такая константа $C > 0$, что для любых $f \in R^m$, $t \in R$ выполняется неравенство $\|A^{-1}(t)f\|_\infty \leq C\|f\|$.

В случае $m \gg 1$ нормы $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_\infty$ существенно неэквивалентны, и нам потребуется изучить оператор с ядром $G(t, \xi)$ как оператор, действующий из $[C(R)]_2^m$ в $[C(R)]_\infty^m$.

Лемма 4. Найдутся такие $\varepsilon_0 > 0, \gamma_0 > 0$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\frac{1}{\varepsilon} \leq \gamma_0$ существует определенная на $R \times R$ матричнозначная функция $G(t, \xi)$, удовлетворяющая следующим условиям.

1. Для любых $t \neq \xi$ $\varepsilon \frac{\partial G(t, \xi)}{\partial x} - A(t)G(t, \xi) = 0$, $G(t+0, t) - G(t-0, t) = I$.
2. Матрица $G(t, \xi)$ имеет вид $G(t, \xi) = B(t)W(t, \xi)B^{-1}(\xi)$, где $B(t)$ — матрица, приводящая к диагональному виду матрицу $A(t)$, а матрица $W(t, \xi)$ представима в виде $W(t, \xi) = U(t, \xi) + K(t, \xi)$, где $U(t, \xi) = \text{diag}\{u_1(t, \xi), u_2(t, \xi), \dots, u_m(t, \xi)\}$ — диагональная матрица с диагональными элементами

$$u_{ii}(t, \xi) = \begin{cases} \exp(\int_{\xi}^t \frac{\lambda_i(s)}{\varepsilon} ds), & \xi \geq t \\ 0, & \xi < t \end{cases}, \quad 1 \leq i \leq k,$$

$$u_{ii}(t, \xi) = \begin{cases} \exp(\int_{\xi}^t \frac{\lambda_i(s)}{\varepsilon} ds), & \xi \leq t \\ 0, & \xi > t \end{cases}, \quad k+1 \leq i \leq m, \quad (4.2)$$

а для элементов $k_{ij}(t, \xi)$ матриц $K(t, \xi)$ справедливы неравенства $|k_{ij}(t, \xi)| \leq \frac{C}{(1+|i-j|)^2} \exp(-\frac{\lambda_0}{2\varepsilon}|t-\xi|)$.

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 1, сделаем в (1.1) замену переменных $x = B(t)y$. Пусть $\tilde{F}(t) = -B^{-1}(t)B'(t)$. Однако здесь все рассматриваемые матрицы имеют порядок $m \gg 1$ и необходима следующая оценка.

Предложение 1. Для элементов $\tilde{f}_{ij}(t)$ матрицы $\tilde{F}(t)$ справедливы оценки

$$|\tilde{f}_{ij}(t)| \leq \frac{C}{(1+|i-j|)^2},$$

где константа C не зависит от t, m .

Доказательство предложения 1. Вначале изучим матрицу $B'(t)$. Столбцами матрицы $B(t)$ являются собственные векторы $b_i(t)$ матрицы $A(t)$. В силу известных результатов о возмущениях собственных векторов [4, с. 76] справедливо представление

$$b_i(t + \Delta t)(1 + O(\Delta t)) - b_i(t) = \Delta t \left(\sum_{1 \leq j \leq m, j \neq i} \frac{\alpha_{ji}(t)}{\lambda_i(t) - \lambda_j(t)} b_j(t) \right) + o(\Delta t), \quad (4.3)$$

где $\alpha_{ji}(t) = (\frac{A(t+\Delta t) - A(t)}{\Delta t} b_j(t), b_i(t))$. В силу предположения об ограниченности производной $A(t)$ числа $\beta_{ji}(t)$ будут ограничены равномерно по m, ε, t . Но тогда в силу (4.3) производные $b'_i(t)$ существуют и имеют вид $b'_i(t) = \beta_{ii}(t)b_i(t) + \sum_{1 \leq j \leq m, j \neq i} \frac{\beta_{ji}(t)}{\lambda_i(t) - \lambda_j(t)} b_j(t)$, где $\beta_{ji}(t) = (A'(t)b_j(t), b_i(t))$.

Заметим, что $\beta_{ii}(t) = (b'_i(t), b_i(t)) = 0.5(b_i(t), b_i(t))' = 0.5(1)' = 0$. Окончательно получаем

$$b'_i(t) = \sum_{1 \leq j \leq m, j \neq i} \frac{\beta_{ji}(t)}{\lambda_i(t) - \lambda_j(t)} b_j(t), \quad |\beta_{ji}| = |(A'(t)b_j(t), b_i(t))| \leq C. \quad (4.4)$$

Поскольку в силу предположения В1 $|\lambda_i(t) - \lambda_j(t)| \geq C|i - j|^2$, то из (4.4) следует, что

$$b'_i(t) = \sum_{1 \leq j \leq m, j \neq i} \gamma_{ji}(t) b_j(t), \quad |\gamma_{ji}| \leq \frac{C}{(1 + |i - j|)^2}. \quad (4.5)$$

Поскольку $A(t)$ симметричная матрица, то можно считать, что $b_i(t)$ образуют ее собственный ортонормированный базис и $B^{-1}(t) = B^T(t)$. Но тогда в силу (4.5) $|f_{ji}| = |(b_j^T, b'_i)| = |\gamma_{ji}| \leq \frac{C}{(1 + |i - j|)^2}$, и предложение 1 доказано.

Предложение 2. В предположениях В1-В3 справедлива оценка

$$\|B''(t)\| \leq C. \quad (4.6)$$

Доказательство предложения 2. Поскольку $\lambda_i(t) = (A(t)b_i(t), b_i(t))$, то из предположения В1 следует, что $|\lambda'_i(t)| \leq C$. Но тогда оценка (4.6) получается дифференцированием (4.4) и применением (4.5) и условия В1. Предложение доказано.

Предложение 3. Найдется такая константа $C_1 > 0$, что для любых целых i, j справедливо неравенство

$$\sum_{s=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1 + |i - s|)^2} \frac{1}{(1 + |s - j|)^2} \leq \frac{C_1}{(1 + |i - j|)^2}.$$

Доказательство см. [5].

Если теперь ε достаточно мало, то после сделанной замены (1.1) примет вид

$$\varepsilon \dot{y} = \Lambda(t)y + \varepsilon F(t)y, \quad (4.7)$$

где $\Lambda(t) = \text{diag}\{\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_m(t)\}$.

Пусть $U(t, \xi) = \text{diag}\{u_1(t, \xi), u_2(t, \xi), \dots, u_m(t, \xi)\}$ — диагональная матрица с диагональными элементами (4.2), являющаяся функцией Грина задачи отыскания ограниченного на всей оси решения системы с диагональной матрицей, получающейся из (4.7) отбрасыванием слагаемого с матрицей $\tilde{F}$.

Рассмотрим при фиксированном $\xi \in R$ интегральное уравнение

$$W(t, \xi) = U(t, \xi) + \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} U(t, \tau) \varepsilon F(\tau) W(\tau, \xi) d\tau \quad (4.8)$$

относительно неизвестной $m \times m$ матричной функции $W(t, \xi)$.

Пусть C_2 — некоторая положительная константа. Введем в рассмотрение полное метрическое пространство

$$M = \{W = \{W(t, \xi) = U(t, \xi) + K(t, \xi)\}, t, \xi \in R, \}$$

$m \times m$ -матричнозначных функций, для которых элементы $k_{ij}(t, \xi)$ матриц $K(t, \xi)$ удовлетворяют неравенствам $|k_{ij}(t, \xi)| \leq \frac{C_2}{(1+|i-j|)^2} \exp(-\frac{\lambda_0}{2\varepsilon}|t-\xi|)$ с метрикой

$$d(W, V) = \sup_{t, \xi \in R} \|(W(t, \xi) - V(t, \xi)) \exp(\frac{\lambda_0}{2\varepsilon}|t - \xi|)\|.$$

Из предложений 1 и 3 и определения матриц $U(t, \xi)$ следует, что найдутся такие $\varepsilon_0 > 0$, $\gamma_0 > 0$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ оператор в правой части (4.8) переводит M в себя и является в нем сжимающим, и, значит, имеет там единственный неподвижный элемент W . Но тогда матричная функция $G(t, \xi) = B(t)W(t, \xi)B^{-1}(\xi)$ и будет искомой. Лемма доказана.

Теорема 6. В предположениях В1–В3 задача (1.1) имеет единственное ограниченное на всей оси решение $x(t)$, для которого справедливы оценки

$$\|A(t)x(t)\|_{C,2} \leq C\|f(t)\|_{C,2}, \quad (4.9)$$

$$\|x(t)\|_{C,\infty} \leq C\|f(t)\|_{C,2}, \quad (4.10)$$

$$\|x^{(i)}(t)\|_{C,\infty} \leq C, \quad 0 \leq i \leq k_1, \quad (4.11)$$

где константа C не зависит от C, ε, f .

Доказательство. Определим вектор-функцию $x(t)$ формулой $x(t) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, \xi) f(\xi) d\xi$, где $G(t, \xi)$ — функция Грина из леммы 4. Тогда из леммы 4 следует, что $x(t)$ является ограниченным на всей оси решением системы (1.1). Докажем его единственность. Заметим, что задача об отыскании $x(t)$ эквивалентна задаче об отыскании ограниченного решения $y(t)$ неоднородной системы, соответствующей однородной системе (4.7).

Если в (4.7) отбросить член $\varepsilon F(t)$, то получим систему с диагональной матрицей, для которой соответствующая однородная система имеет фундаментальную матрицу $U(t) = \text{diag}\{u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)\}$, где $u_i(t) = \frac{1}{\varepsilon} \exp(\int_0^t \frac{\lambda_i(s)}{\varepsilon} ds)$, $1 \leq i \leq m$.

Столбцы этой матрицы образуют фундаментальную систему решений однородной системы, любая нетривиальная линейная комбинация которой неограничена при $t \in \{-\infty, +\infty\}$. Значит, в случае диагональной матрицы ограниченное решение единственно. В общем случае для неоднородной системы (4.7) заметим, что в силу уже установленной единственности для диагональной матрицы получим, что задача отыскания ограниченного решения эквивалентна интегральному уравнению вида $y(t) = g(t) + \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} U(t, s) \varepsilon F(s) y(s) ds$, единственность решения которого аналогично доказательству леммы 4 вытекает из принципа сжатия.

Докажем оценки (4.9). Поскольку $B(t)$ — ортогональная матрица, то при любом t имеем с учетом п. 2 формулировки леммы 4

$$\begin{aligned} \|A(t)x(t)\| &= \|B^{-1}(t)A(t)x(t)\| = \|B^{-1}(t)A(t)\frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, \xi) f(\xi) d\xi\| = \\ &= \|B^{-1}(t)A(t)\frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} B(t)W(t, \xi)B^{-1}(\xi) f(\xi) d\xi\| = \\ &= \|\frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} \Lambda(t)W(t, \xi)B^{-1}(\xi) f(\xi) d\xi\| \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} \|\Lambda(t)W(t, \xi)\| \|f(\xi)\| d\xi \leq \\ &\leq \sup_{\xi \in (-\infty, +\infty)} \|f(\xi)\| \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} \|\Lambda(t)W(t, \xi)\| d\xi \leq \\ &\leq C \sup_{\xi \in (-\infty, +\infty)} \|f(\xi)\| \frac{1}{\varepsilon} (\max_{1 \leq i \leq m} |\lambda_i(t)| \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-|\int_{\xi}^t \frac{\lambda_i(s)}{\varepsilon} ds|) d\xi + \\ &+ \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+s^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\frac{\lambda_0}{2\varepsilon}|t-\xi|) d\xi) \leq C \sup_{\xi \in (-\infty, +\infty)} \|f(\xi)\|, \end{aligned}$$

и оценка (4.9) доказана. Оценка (4.10) вытекает из (4.9) и условия В3.

Доказательство (4.11) совершенно аналогично доказательству соответствующих оценок (1.2) из леммы 1, так как производные матриц $A^{-1}(t)$ выражаются через произведения матриц $A^{-1}(t)$ и производных матриц $A(t)$, нормы которых ограничены равномерно по m в силу предположения В1, а интегральный оператор с ядром $G(t, \xi)$ равномерно ограничен в соответствующих нормах в силу (4.10). Теорема доказана.

Установим дискретные аналоги леммы 4 и теоремы 6.

Теорема 7. Найдутся такие $\varepsilon_0 > 0$, $\gamma_0 > 0$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\frac{m^2 \tau}{\varepsilon} \leq \gamma_0$ существует определенная на $Z \times Z$ матричнозначная функция $U(n, l)$, удовлетворяющая следующим условиям.

1. Для любых n, l $\varepsilon \frac{U(n+1, l) - U(n, l)}{\tau} - A(n)U(n, l) = \delta_{n, l} I$, где $\delta_{n, l}$ — символ Кронекера.

2. Матрица $U(n, l)$ имеет вид $U(n, l) = B(\tau n)W(n, l)B^{-1}(\tau l)$, где $B(t)$ — матрица, приводящая к диагональному виду матрицу $A(t)$, а матрица $W(n, l)$ представима в виде $W(n, l) = V(n, l) + K(n, l)$, где $V(n, l) = \text{diag}\{v_1(n, l), v_2(n, l), \dots, v_m(n, l)\}$ — диагональная матрица с диагональными элементами

$$\begin{aligned} v_{ii}(n, l) &= \begin{cases} \prod_{s=n}^l (1 + \frac{\tau}{\varepsilon} \lambda_i(\tau s))^{-1}, & l \geq n \\ 0, & l < n \end{cases}, \quad 1 \leq i \leq k, \\ v_{ii}(n, l) &= \begin{cases} \prod_{s=l+1}^{n-1} (1 + \frac{\tau}{\varepsilon} \lambda_i(\tau s)), & n > l \\ 0, & l \leq n \end{cases}, \quad k+1 \leq i \leq m, \end{aligned} \quad (4.12)$$

а для элементов $k_{ij}(n, l)$ матриц $K(n, l)$ справедливы неравенства $|k_{ij}(n, l)| \leq \frac{C}{(1+|i-j|)^2} (1 - \frac{\lambda_0 \tau}{2\varepsilon})^{|n-l|}$.

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 1, приведем (1.1) к виду (2.2) в тех же обозначениях.

Предложение 4. Для элементов $f_{ij}(\tau s)$ матрицы $F(\tau s)$ справедливы оценки

$$|f_{ij}(\tau s)| \leq \frac{C}{(1 + |i - j|)^2}, \quad (4.13)$$

где константа C не зависит от τ, s, m .

Доказательство предложения 4. С учетом предложения 2 для любого s имеем

$$F(\tau s) = -B^{-1}(\tau s) \frac{B(\tau(s+1)) - B(\tau s)}{\tau} = B^{-1}(\tau s) B'(\tau s) + \tau E(\tau s),$$

где $\|E(\tau s)\| \leq C$. Поэтому в силу условия $\tau \leq C/m^2$ неравенства вида (4.13) имеют место для матрицы $\tau E(\tau s)$. Но для элементов матрицы $B^{-1}(\tau s) B'(\tau s)$ они имеют место в силу предложения (1). Предложение доказано.

Пусть C_2 — некоторая константа. Введем в рассмотрение полное метрическое пространство $m \times m$ матричнозначных функций $M = \{W = V(n, l) + K(n, l), n, l \in \mathbb{Z}\}$, для которых элементы матриц $K(n, l)$ удовлетворяют оценкам $|k_{ij}(n, l)| \leq \frac{C_2}{(1+|i-j|)^2} (1 - \frac{\lambda_0 \tau}{2\varepsilon})^{|n-l|}$ с метрикой $d(W, V) = \sup_{t, \xi \in R} \|(W(n, l) - V(n, l))(1 - \frac{\lambda_0 \tau}{2\varepsilon})^{|n-l|}\|$.

Далее, рассуждая аналогично доказательству теоремы 1 и леммы 4, получаем утверждение теоремы 7. Теорема доказана.

Теорема 8. В предположениях В1-В3 задача (1.4) имеет единственное ограниченное на всей оси решение x^n , для которого справедливы оценки

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}} \|A(\tau n) x^n\| \leq C \|f(t)\|_{C,2}, \quad (4.14)$$

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}} \|x^n\|_\infty \leq C \|f(t)\|_{C,2}, \quad (4.15)$$

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}} \|x_{\tau,i}^n\|_\infty \leq C, \quad 0 \leq i \leq k_1, \quad (4.16)$$

где константа C не зависит от C, ε, f .

Доказательство с учетом теоремы 7 полностью аналогично доказательству теоремы 6 и теоремы 2.

Теорема 9. Для ограниченных на всей оси решений (2.1) и (1.6) систем (1.1) и (1.4) справедливы оценки

$$\|x(\tau n) - x^n\|_\infty \leq C \varepsilon \tau. \quad (4.17)$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3 с учетом теоремы 7.

Лемма 5. Имеют место оценки

$$\|A(\tau n) x_{\tau,k}^n\| \leq C, \quad 1 \leq k \leq k_1 - 1, \quad (4.18)$$

где C не зависит от n .

Доказательство получается разностным дифференцированием равенства

$$\frac{x^{n+1} - x^n}{\tau} = A(\tau n)x^n + f(\tau n)$$

с учетом предположений В1–В3 данного пункта и теоремы 8.

5. Нелинейная задача высокого порядка

В этом пункте мы рассмотрим задачу (3.1) случае $m \gg 1$. Сделаем следующие предположения.

С1. Уравнение $F(x, t) = 0$ имеет при $t \in R$ решение $x_0(t)$, причем матрица Якоби $F_x(x_0(t), t)$ удовлетворяет условиям В1, В3.

С2. Вектор-функция $F(x, t)$ имеет на множестве $\{(x, t) : t \in R, \|x - x_0(t)\|_\infty \leq r\}$, где $r > 0$ — не зависящее от m, ε число, все $2k_1 + 1$ частные производные по x_j, t , причем $\|\frac{\partial^{|i|} F}{\partial x^i}\|_\infty \leq C$, $2 \leq i \leq 2k_1 + 1$, $\|\frac{\partial^{|i|} F}{\partial x^i \partial t^s}\|_\infty \leq C$, $s > 0$, $0 \leq i \leq 2k_1$.

Теорема 10. В предположениях С1–С2 данного пункта справедливы лемма 3 и теоремы 4, 5.

Доказательство. В доказательстве нуждается лишь аналог леммы 3, так как в силу предположений С1–С2 и результатов п. 4 доказательство аналогов теорем 4, 5 ничем не отличается от п. 3. Докажем его.

Перепишем задачу (3.1) в виде

$$\varepsilon \dot{x} = F_x(x_0(t), t)(x(t) - x_0(t)) + Q(t, x(t) - x_0(t)), \quad (5.1)$$

где $\|Q(t, x) - Q(t, y)\|_\infty \leq \mu(x, y)\|x - y\|_\infty$, $\mu(x, y) \rightarrow 0$ при $\|x\|_\infty \rightarrow 0$, $\|y\|_\infty \rightarrow 0$. Обозначим $A(t) = F_x(x_0(t), t)$. Сделаем в задаче (5.1) замену $x(t) - x_0(t) = \delta(t)$. Тогда она примет вид

$$\varepsilon \dot{\delta} = A(t)\delta + r(t, \varepsilon) + R(t, \delta), \quad (5.2)$$

где

$$\|r(t, \varepsilon)\|_\infty \leq C\varepsilon, \quad \|R(t, u) - R(t, v)\|_\infty \leq C\mu(u, v)\|u - v\|_\infty. \quad (5.3)$$

Задача об отыскании ограниченного решения (5.2) эквивалентна интегральному уравнению

$$\delta(t) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, \xi) R(\xi, \delta(\xi)) d\xi + Q(t, \varepsilon), \quad (5.4)$$

где $Q(t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, \xi) r(\xi, \varepsilon) d\xi$, $\|Q(t, \varepsilon)\|_\infty \leq C\varepsilon$. Из этих оценок и свойств матрицы $G(t, \xi)$ (см. лемму 4) следует, что при достаточно малых $\varepsilon > 0$ оператор (5.4) будет сжимающим в множестве $\{\delta \in [C(R)]^m : \|\delta\|_\infty \leq C_1\varepsilon\}$ для достаточно большой C_1 . Доказательство оценок (3.4) аналогично доказательству аналогичных оценок в лемме 1 и теореме 2. Теорема доказана.

6. Приложения к краевым задачам для параболических уравнений

6.1. Линейная краевая параболическая задача с постоянными коэффициентами

Рассмотрим задачу

$$\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + au + f(t, \xi) \quad (6.1)$$

с граничными условиями

$$u \Big|_{\xi=-1} = u \Big|_{\xi=1} = 0. \quad (6.2)$$

Предположим, что

D1. Функция $f(t, \xi)$ и все ее частные производные $\frac{\partial^{i|s} f}{\partial t^{i-s} \partial \xi^s}$, $0 \leq i \leq 2k_1 + 1$, $0 \leq s \leq i$ равномерно ограничены при $t \in R$, $\xi \in [-1, 1]$.

D2. Константа $a > 0$ такова, что для собственных значений $\lambda_j = -(\frac{\pi}{2}j)^2 + a$ справедливы неравенства $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_k > 0 > \lambda_{k+1} > \dots$.

Лемма 6. Задача (6.1)–(6.2) имеет единственное ограниченное при $t \in (-\infty, +\infty)$, $\xi \in [-1, 1]$ решение $u(t, \xi)$. Для этого решения справедливы оценки

$$\sup_{t \in (-\infty, +\infty), \xi \in [-1, 1]} \left\| \frac{\partial^i u}{\partial t^i} \right\|_{C[-1, 1]} \leq C, \quad 0 \leq i \leq k_1. \quad (6.3)$$

$$\sup_{t \in (-\infty, +\infty), \xi \in [-1, 1]} \left\| \frac{\partial^i u}{\partial \xi^i} \right\|_{C[-1, 1]} \leq C, \quad 0 \leq i \leq 4. \quad (6.4)$$

Доказательство. Будем искать решение задачи (6.1)–(6.2) в виде ряда Фурье по собственным функциям соответствующей однородной задачи

$$u(t, \xi) = \sum_{s=1}^{+\infty} x_s(t) \sin \frac{s\pi(\xi+1)}{2}. \quad (6.5)$$

Подставляя разложение (6.5) в (6.1) и разлагая в ряд Фурье правую часть $f(t, \xi) = \sum_{s=1}^{+\infty} f_s(t) \sin \frac{s\pi(\xi+1)}{2}$, получим для последовательности коэффициентов Фурье $x = \{x_s(t)\}$ задачу

$$\varepsilon \dot{x} = \Lambda x + F(t), \quad (6.6)$$

где $F(t) = \{f_s(t), 1 \leq s < +\infty\}$, $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s, \dots\}$, λ_s — собственные значения однородной задачи. Заметим, что в силу непрерывности $f(t, \xi)$ справедлива оценка $\|F(t)\| \leq C < \infty$, где $\|\cdot\|$ — норма в l_2 .

Поскольку (6.6) — система с диагональной матрицей, то аналогично конечномерному случаю получаем, что (6.6) имеет единственное ограниченное при $t \in R$ решение

$$x(t) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} U(t, \tau) F(\tau) d\tau, \quad (6.7)$$

где $U(t, \tau) = \text{diag}\{u_1(t, \tau), u_2(t, \tau), \dots, u_s(t, \tau), \dots\}$ — диагональная матрица с диагональными элементами

$$u_i(t, \tau) = \begin{cases} \exp(\frac{\lambda_i(t-\tau)}{\varepsilon}), & \tau \leq t \\ 0, & \tau > t \end{cases}, \quad 1 \leq i \leq k,$$

$$u_i(t, \tau) = \begin{cases} \exp(\frac{\lambda_i(t-\tau)}{\varepsilon}), & \tau > t \\ 0, & \tau \leq t \end{cases}, \quad k+1 \leq i < +\infty.$$

Из (6.6), (6.7) и предположений D1, D2 следует, что функция (6.5) удовлетворяет оценкам (6.3). Единственность решения вытекает из того, что любое другое решение отличается от (6.5) на нетривиальное решение однородной задачи, а однородная задача не имеет ограниченных на всей оси нетривиальных решений. Осталось доказать оценки (6.4). Для этого заметим, что в силу (6.7) для коэффициентов Фурье $x_s(t)$ справедливы оценки $|x_s(t)| \leq \frac{C}{s^2} \sup_{t \in R} |f_s(t)|$, а с учетом предположений о гладкости $f(t, \xi)$ по переменной t такие же оценки справедливы и для их производных $x_s^{(i)}(t)$, $1 \leq i \leq 2k_1 + 1$. Поэтому производные $\frac{\partial^i}{\partial t^i} \frac{\partial^j}{\partial \xi^j} u(t, \xi)$ для $0 \leq i \leq k_1, 0 \leq j \leq 2$ можно находить почленным дифференцированием (6.5), причем результат не зависит от порядка дифференцирования. Отсюда вытекают оценки (6.4) при $i = 1, 2$. Далее имеем

$$\frac{\partial^4 u}{\partial \xi^4} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}, \quad (6.8)$$

и оценка (6.4) для $i = 4$ следует из (6.3) и предположения D1 о гладкости f . Оценки для $i = 3$ вытекают из оценок (6.4) для $i = 2, 4$ и формулы Ньютона-Лейбница. Лемма доказана.

Поставим задачу приближенного отыскания равномерно ограниченного при $t \in R$ решения задачи (6.1)–(6.2). В системе координат ξ, t разобьем отрезок $[-1, 1]$ на оси $O\xi$ равномерной сеткой $-1 = \xi_{-m} < \xi_{-m+1} < \dots < 1 = \xi_m$ с шагом $h = 1/m$, $m = 2^s$, а ось времени равномерной сеткой $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_l \dots$ с шагом $\tau = \varepsilon h^2/5$. Заменим неизвестную функцию $u(t, \xi)$ неизвестной сеточной функцией $\{u_j^l\}_{j=-m}^m$, где верхний индекс l обозначает номер временного слоя, а нижний индекс j — дискретную пространственную координату. Заменим дифференциальную задачу (6.1)–(6.2) разностной задачей

$$\varepsilon \frac{u_j^{l+1} - u_j^l}{\tau} = f(\tau_l, \xi_j) + \frac{u_{j-1}^l - 2u_j^l + u_{j+1}^l}{h^2} + au_j^l, \quad -m+1 \leq j \leq m-1, \quad (6.9)$$

$$u_{-m}^l = u_m^l = 0, \quad l = 0, 1, \dots \quad (6.10)$$

Введем в пространстве сеточных функций $M = \{v = \{v_j, -m+1 \leq j \leq m-1\}\}$ норму $\|v\|_m = m^{-1/2} \sqrt{\sum_{j=-m+1}^{m-1} |v_j|^2}$. Если в дальнейшем для $v \in M$ встречаются компоненты с номерами $-m, m$, то всюду имеется в виду, что $v_{-m} = v_m = 0$. Кроме того, будем рассматривать в M норму $\|v\|_{C(M)} = \max_{-m+1 \leq j \leq m-1} |v_j|$. Через $u^l \in M$ будем обозначать сеточные функции вида $u^l = \{u_j^l, -m+1 \leq j \leq m-1\}$, являющиеся следами функции u при фиксированном значении l .

Теорема 11. Найдутся такие $\varepsilon_0 > 0$, $\gamma_0 > 0$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\frac{\tau}{\varepsilon} \leq \gamma_0/m^2$ задача (6.9), (6.10) имеет единственное ограниченное при $l \in (-\infty, +\infty)$, $j \in [-m, m]$ решение $u = \{u_j^l\}$. Для него справедливы оценки

$$\sup_{l \in (-\infty, +\infty)} \|u^l\|_m \leq C, \quad \sup_{l \in (-\infty, +\infty)} \|u_{\tau, i; \xi, p}^l\|_m \leq C, \quad 1 \leq i \leq k_1, \quad 0 \leq p \leq 4. \quad (6.11)$$

Доказательство совершенно аналогично доказательству леммы 6 с той разницей, что решение u ищется в виде конечного Фурье-разложения по ортонормированному базису из собственных сеточных функций оператора $Du = \frac{u_{j-1}^l - 2u_j^l + u_{j+1}^l}{h^2} + au_j^l$.

Пусть для непрерывной функции $v(\xi)$ $Tv = \{v(jh), -m \leq j \leq m\} \in M$.

Теорема 12. Для ограниченных на всей оси решений задач (6.1)–(6.2) и (6.9)–(6.10) справедливы оценки

$$\|Tu(\tau l, \xi) - u^l\|_m \leq C(\varepsilon \tau + h^2). \quad (6.12)$$

Доказательство. Подставим функцию $u(t, \xi)$ в задачу (6.9)–(6.10). Тогда в силу (6.1), (6.9) для $r^l = Tu(\tau l, \xi) - u^l$ будем иметь

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{r^{l+1} - r^l}{\tau} &= \frac{r_{j-1}^l - 2r_j^l + r_{j+1}^l}{h^2} + ar_j^l + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(\tau, \xi_j) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{u(\tau l, \xi_j) - 2u(\tau l, \xi_j) + u(\tau l, \xi_{j+1})}{h^2} + \varepsilon \left(\frac{u(\tau(l+1), \xi_j) - u(\tau l, \xi_j)}{\tau} - \frac{\partial u}{\partial t}(\tau l, \xi_j) \right) \right). \end{aligned} \quad (6.13)$$

Поскольку последовательность r^l ограничена по норме, то из (6.13) получаем, что r есть ограниченное на всей оси решение задачи вида (6.9)–(6.10) с правой частью $\tilde{f}(\tau l, \xi_j) = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(\tau, \xi_j) - \frac{u(\tau l, \xi_j) - 2u(\tau l, \xi_j) + u(\tau l, \xi_{j+1})}{h^2} - \varepsilon \left(\frac{u(\tau(l+1), \xi_j) - u(\tau l, \xi_j)}{\tau} - \frac{\partial u}{\partial t}(\tau l, \xi_j) \right) \right)$. Но из леммы 6 следует, что $\|\tilde{f}\|_m \leq C(\varepsilon \tau + h^2)$. Отсюда в силу леммы 6 получаем (6.12). Теорема доказана.

Таким образом, вместо ограниченного решения задачи (6.1)–(6.2) можно искать ограниченное решение задачи (6.9)–(6.10).

6.2. Линейная краевая параболическая задача с переменными коэффициентами

Рассмотрим задачу

$$\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + a(t, \xi)u + f(t, \xi) \quad (6.14)$$

с граничными условиями

$$u|_{\xi=-1} = u|_{\xi=1} = 0. \quad (6.15)$$

Предположим, что

Е1. Функции $f(t, \xi)$, $a(t, \xi)$ и все их частные производные $\frac{\partial^{ij} f}{\partial t^{i-s} \partial \xi^s}$, $\frac{\partial^{ij} a}{\partial t^{i-s} \partial \xi^s}$, $0 \leq i \leq 2k_1 + 1$, $0 \leq s \leq i$, равномерно ограничены при $t \in R$, $\xi \in [-1, 1]$.

Е2. При каждом фиксированном $t \in R$ для собственных значений оператора $\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + a(t, \xi)$ с краевыми условиями (6.14) справедливы неравенства $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_k > 0 > \lambda_{k+1} > \dots$, $|\lambda_i(t)| \geq \lambda_0 > 0$ и выполняются условия (4.1).

Теорема 13. Задача (6.14)–(6.15) имеет единственное ограниченное при $t \in (-\infty, +\infty)$, $\xi \in [-1, 1]$ решение $u(t, \xi)$. Для этого решения справедливы оценки (6.3)–(6.4).

Доказательство этой теоремы будет дано чуть позже.

Рассмотрим полудискретную задачу приближенного отыскания ограниченного решения $u(t, \xi)$:

$$\varepsilon \dot{u}_j(t) = f(t, \xi_j) + \frac{u_{j-1}(t) - 2u_j(t) + u_{j+1}(t)}{h^2} + a(t, \xi_j)u_j(t), \quad -m+1 \leq j \leq m-1, \quad (6.16)$$

$$u_{-m}(t) = u_m(t) = 0. \quad (6.17)$$

Теорема 14. Найдутся такие $\varepsilon_0 > 0$, $\gamma_0 > 0$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\frac{\varepsilon}{\gamma_0} \leq \gamma_0/m^2$ задача (6.16), (6.17) имеет единственное ограниченное при $t \in (-\infty, +\infty)$, $j \in [-m, m]$ решение $u(t) = \{u_j(t)\}$. Для него справедливы оценки

$$\sup_{t \in (-\infty, +\infty)} \|u(t)\|_m \leq C, \quad \sup_{t \in (-\infty, +\infty)} \left\| \frac{\partial^i u}{\partial t^i}(\xi, p) \right\|_m \leq C, \quad 1 \leq i \leq k_1, 0 \leq p \leq 4, \quad (6.18)$$

а также оценки

$$\sup_{t \in (-\infty, +\infty)} \|u(t)\|_{C(M)} \leq C \sup_{t \in (-\infty, +\infty)} \|f(t, \xi)\|_m, \quad (6.19)$$

где C не зависит от f .

Доказательство. Заметим, что из условия Е2 и результатов о сходимости собственных значений оператора $(D(t)u)_j = \frac{u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}}{h^2} + a(t, \xi_j)u_j$ к собственным значениям $\lambda_i(t)$ при каждом фиксированном t следует

[4], что при достаточно малом $h > 0$ собственные значения D удовлетворяют тем же условиям, что и $\lambda_i(t)$, и равномерно по t, m отделены от 0. Поэтому для задачи (6.16)–(6.17) справедливы все условия п. 6 с заменой $x(t)$ на $u(t)$. Поэтому справедливы аналоги леммы 4 и теорем 6, 7. В силу теоремы 6 мы получаем, что

$$\|D(t)U(t)\|_m \leq C\|f\|_m,$$

откуда в силу сеточных аналогов теорем вложения [7] вытекают оценки (6.19), а также оценки (6.18) при $i = 0$, $p = 1, 2$. Доказательство оценки (6.18) для $i = 0$, $p = 4, 3$ и для $i \geq 1$ получается дифференцированием в силу уравнения совершенно аналогично (6.8) с заменой обычного дифференцирования по ξ разностным дифференцированием. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 13. Рассмотрим последовательность разбиений Δ_s отрезка $[-1, 1]$ с шагом $h = 1/2^s$. При достаточно большом s для каждого из них задача (6.16)–(6.17) имеет решение $u(t) = \{u_j(t)\}$, для которого справедливо утверждение теоремы 13. Обозначим через $u_s(t, \xi)$ интерполяционный эрмитов сплайн седьмой степени по ξ , определяемый из условий $\frac{\partial^i u_m}{\partial \xi^i}(t, \xi_j) = (u_{\xi,i}(t))_j$, $0 \leq i \leq 2$, $0 \leq p \leq 3$. Из оценок погрешности эрмитовой интерполяции [6], оценок (6.18) и теоремы Арцела следует, что последовательность сужений функций $u_s(t, \xi)$ на множество $P_n = \{-1 \leq \xi \leq 1, -n \leq t \leq n\}$ компактна в $C^1[-n, n] \times C^2[-1, 1]$ при любом фиксированном натуральном n . Устремляя n, s к бесконечности и переходя, если нужно, к подпоследовательности, получим, что сужения $u_{s_n}(t, \xi)$ на P_n вместе с двумя производными сходятся равномерно на каждом P_n . В пределе получим функцию $u(t, \xi) \in C^1(R) \times C^2[-1, 1]$. В силу равномерной ограниченности $\frac{\partial^3 u_s}{\partial \xi^3}$ и $\frac{\partial^2 u_s}{\partial t^2}$ и определения u_s получаем, что $u(t, \xi)$ и есть искомое решение. Единственность вытекает из того, что однородное уравнение (6.16) не может иметь ограниченного на всей оси нетривиального решения. Теорема 13 доказана.

Теорема 15. Для ограниченных на всей оси решений задач (6.14)–(6.15) и (6.16)–(6.17) справедливы оценки (6.12).

Доказательство совершенно аналогично доказательству теоремы 12.

6.3. Нелинейная краевая параболическая задача

Рассмотрим задачу

$$\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + p(t, \xi, u) \quad (6.20)$$

с граничными условиями

$$u \Big|_{\xi=-1} = u \Big|_{\xi=1} = 0. \quad (6.21)$$

Предположим, что

F1. Краевая задача (6.20)–(6.21) при $\varepsilon = 0$ имеет при $t \in R$, $\xi \in [-1, 1]$ решение $u_0(t, \xi)$, причем для линейной краевой задачи (6.14)–(6.15), где $a(t, \xi) = p_u(t, \xi, u_0(t, \xi))$ выполнены условия E1–E2.

F2. Функция $p(t, \xi, u)$ имеет на множестве $\{(t, \xi) : t \in R, |\xi| \leq r, |u| \leq r\}$, где $r > 0$ — достаточно большое, но не зависящее от ε число, все $2k_1 + 1$ частные производные по ξ, t .

Теорема 16. Задача (6.20)–(6.21) имеет в некоторой $C(R \times [-1, 1])$ -окрестности $u_0(t, \xi)$ единственное ограниченное при $t \in (-\infty, +\infty)$, $\xi \in [-1, 1]$ решение $u(t, \xi)$. Для этого решения справедливы оценки (6.3)–(6.4).

Как и в предыдущем пункте, доказательство этой теоремы будет получено после рассмотрения полудискретной задачи.

Рассмотрим полудискретную задачу приближенного отыскания ограниченного решения $u(t, \xi)$:

$$\varepsilon \dot{u}_j(t) = p(t, \xi_j, u_j(t)) + \frac{u_{j-1}(t) - 2u_j(t) + u_{j+1}(t)}{h^2}, \quad -m+1 \leq j \leq m-1, \quad (6.22)$$

$$u_{-m}(t) = u_m(t) = 0. \quad (6.23)$$

Теорема 17. Найдутся такие $\varepsilon_0 > 0$, $\gamma_0 > 0$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\frac{\varepsilon}{h} \leq \gamma_0/m^2$ задача (6.22), (6.23) имеет в некоторой $C(R)$ -окрестности $u^0(t) = \{u_j^0(t), j \in Z\}$, $u_j^0(t) = u_0(t, \xi_j)$ единственное ограниченное при $t \in (-\infty, +\infty)$, $j \in [-m, m]$ решение $u(t) = \{u_j(t)\}$. Для него справедливы оценки вида (6.18).

Доказательство аналогично доказательству аналога теоремы 10. Аналогично (5.2), (5.3) перепишем задачу (6.22), (6.23) в виде

$$\varepsilon \dot{\delta}_j(t) = \frac{\delta_{j-1}(t) - 2\delta_j(t) + \delta_{j+1}(t)}{h^2} + r(t, \xi_j, \varepsilon) + R(t, \xi_j, \delta_j), \quad (6.24)$$

где $\delta(t) = u(t) - u^0(t)$,

$$\|r(t, \varepsilon)\|_{C(M)} \leq C(\varepsilon + h^2), \quad \|R(t, \xi, u) - R(t, \xi, v)\|_{C(M)} \leq C\mu(u, v)\|u - v\|_{C(M)}, \quad (6.25)$$

$\mu(u, v) \rightarrow 0$ при $\|u\|_{C(M)} \rightarrow 0$, $\|v\|_{C(M)} \rightarrow 0$.

Задача об отыскании ограниченного решения (6.24) эквивалентна интегральному уравнению

$$\delta(t) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, \tau) R(\tau, \xi, \delta(\tau)) d\tau + Q(t, \varepsilon), \quad (6.26)$$

где $Q(t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, \tau) r(\tau, \varepsilon) d\tau$, $\|Q(t, \varepsilon)\|_{C(M)} \leq C(\varepsilon + h^2)$. Из этих оценок и свойств матрицы $G(t, \tau)$ (см. лемму 4) следует, что при достаточно малых $\varepsilon > 0$, $h > 0$ оператор (6.26) будет сжимающим в множестве

$\{\delta \in M : \|\delta\|_{C(M)} \leq C_1(\epsilon + h^2)\}$ для достаточно большой C_1 . Доказательство оценок (6.18) аналогично доказательству аналогичных оценок в теореме 14. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 16 аналогично доказательству теоремы 13.

Литература

- [1] Митропольский Ю.А., Лыкова О.Б. Интегральные многообразия в нелинейной механике. М.: Наука, 1973. 512 с.
- [2] Стрыгин В.В., Соболев В.А. Разделение движений методом интегральных многообразий. М.: Наука, 1988. 256 с.
- [3] Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. М.: Мир, 1985. 376 с.
- [4] Уилкинсон Дж.Х. Алгебраическая проблема собственных значений. М.: Наука, 1970. 564 с.
- [5] Блатов И.А. Об оценках элементов обратных матриц и о модификациях метода матричной прогонки // Сиб. мат. журн. 1992. Т. 33. № 2. С. 10–21.
- [6] Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1977. 512 с.
- [7] Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. 590 с.

THE BOUNDED WITHIN WHOLE DOMAIN SOLUTIONS OF THE DISCRETE SINGULARLY PERTURBED EQUATIONS AND SYSTEMS³

© 2003 E.V. Kitaeva⁴

The problem of the approximate search for the bounded within whole domain solutions of the systems of the singularly perturbed ordinary differential equations and boundary value problems for parabolic equations is considered. The difference discretization schemes for these problems are studied. Apriori estimates of the derivatives for the solutions of the continuous and discrete problems are given, and the corresponding estimates of error are obtained.

Поступила в редакцию 28/I/2003;
в окончательном варианте — 3/III/2003.

³ Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. V.A. Sobolev.

⁴ Kitaeva Elena Viktorovna, Dept. of Differential Equations and Control Theory, Samara State University, Samara, 443011, Russia.