

УДК 511.334

АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ И МОДУЛЯРНЫЕ ФОРМЫ¹

© 2003 Г.В. Воскресенская²

В статье находятся все такие абелевы группы, что параболические формы, ассоциированные со всеми элементами этих групп с помощью некоторого точного представления, являются модулярными формами из специального класса с мультипликативными коэффициентами Фурье.

Введение

Интересным актуальным аспектом теории модулярных форм является изучение их связей с представлениями конечных групп. В настоящей статье исследуется проблема нахождения таких конечных групп, что модулярные формы, ассоциированные со всеми элементами этих групп с помощью некоторого точного представления, принадлежат специальному классу модулярных форм, которые называются мультипликативными η -произведениями. Это открытая проблема: все такие группы до сих пор не найдены. В этой статье полностью разобран случай абелевых групп.

Эта-функция Дедекинда $\eta(z)$ определяется формулой

$$\eta(z) = q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n), \quad q = e^{2\pi iz},$$

z лежит в верхней комплексной полуплоскости.

Мы рассматриваем модулярные формы, которые полностью описываются следующими условиями: это параболические формы целого веса с характеристиками, собственные относительно всех операторов Гекке

¹ Представлена доктором физико-математических наук профессором В.Е. Воскресенским.

² Воскресенская Галина Валентиновна (vosk@ssu.samara.ru), кафедра алгебры и геометрии Самарского государственного университета, 443011, Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

и не имеющие нулей вне параболических вершин. Заранее мы не предполагаем, что эти функции являются модифицированными произведениями η -функций Дедекинда. Однако фактически это так, таких функций ровно 28; приведем их полный список.

Формы веса 1:

$$\eta(23z)\eta(z), \eta(22z)\eta(2z), \eta(21z)\eta(3z), \eta(20z)\eta(4z), \\ \eta(18z)\eta(6z), \eta(16z)\eta(8z), \eta^2(12z).$$

Формы веса 2:

$$\eta(15z)\eta(5z)\eta(3z)\eta(z), \eta(14z)\eta(7z)\eta(2z)\eta(z), \eta(12z)\eta(6z)\eta(4z)\eta(2z), \\ \eta^2(11z)\eta^2(z), \eta^2(10z)\eta^2(2z), \eta^2(9z)\eta^2(3z), \eta^2(8z)\eta^2(4z), \eta^4(6z).$$

Формы веса 3:

$$\eta^2(8z)\eta(4z)\eta(2z)\eta^2(z), \eta^3(7z)\eta^3(z), \eta^3(6z)\eta^3(2z), \eta^6(4z).$$

Формы веса 4:

$$\eta^4(5z)\eta^4(z), \eta^4(4z)\eta^4(2z), \eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z), \eta^8(3z).$$

Форма веса 5: $\eta^4(4z)\eta^2(2z)\eta^4(z)$.

Формы веса 6: $\eta^6(3z)\eta^6(z), \eta^{12}(2z)$.

Форма веса 8: $\eta^8(2z)\eta^8(z)$.

Форма веса 12: $\eta^{24}(z)$.

К этому списку добавим еще 2 параболические формы полуцелого веса: $\eta(24z), \eta^3(8z)$.

Эти функции мы назовем *мультипликативными η -произведениями*, так как они имеют мультипликативные коэффициенты Фурье.

С различных точек зрения эти функции изучались в ряде недавних работ американских и японских математиков [1–7].

Сопоставление модулярных форм элементам конечных групп осуществляется по следующему правилу. Пусть Φ — представление конечной группы G унимодулярными матрицами в пространстве V , размерность которого делится на 24. Тогда для любого элемента $g \in G$ характеристический многочлен оператора $\Phi(g)$ имеет вид:

$$P_g(x) = \prod_{k=1}^s (x^{a_k} - 1)^{t_k}, \quad a_k \in \mathbb{N}, \quad t_k \in \mathbb{Z}.$$

С каждым элементом $g \in G$ можно связать функцию

$$\eta_g(z) = \prod_{k=1}^s \eta^{t_k}(a_k z).$$

Функция $\eta_g(z)$ является параболической формой определенного уровня $N(g)$ и веса

$$k(g) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^s t_k$$

с характером, равным характеру квадратичного поля $\mathbb{Q}$

$$\sqrt{\prod_{k=1}^s (ia_k)^{t_k}}.$$

Будем называть представление группы *искомым* или *представлением допустимого типа*, если с помощью этого представления с элементами группы ассоциируются мультипликативные η -произведения. Целью работы является нахождение абелевых групп, имеющих такие точные представления.

Допустимые группы указываются с точностью до изоморфизма.

Искомые группы могут содержать элементы порядков, не превосходящих 24 и не равных 13, 17, 19. Непосредственно проверяется, что если некоторому элементу группы соответствует мультипликативное η -произведение, то всем его степеням также соответствуют параболические формы из указанного выше списка. Используя этот факт, при исследовании групп достаточно рассматривать представления только для элементов, не лежащих в одной циклической группе. Единичному элементу группы соответствует параболическая форма $\eta^{24}(z)$.

Так как искомое представление является точным, то по виду параболической формы можно понять порядок соответствующего ей элемента группы.

Если некоторая группа является допустимой, то допустимой будет и любая ее подгруппа. Если группа не является допустимой, то не является допустимой и любая группа, которая ее содержит.

Основной результат статьи может быть сформулирован в виде следующей теоремы:

Теорема. Пусть G — такая абелева группа, что существует некоторое точное представление T такое, что для любого элемента g этой группы модулярная форма $\eta_g(z)$, ассоциированная с g с помощью T , является мультипликативным η -произведением.

Тогда G является подгруппой в одной из следующих групп:

$$\begin{aligned} Z_3 \times Z_3, \quad Z_{14}, \quad Z_{15}, \quad Z_2 \times Z_2 \times Z_2 \times Z_2, \quad Z_4 \times Z_2 \times Z_2, \quad Z_4 \times Z_4, \quad Z_8 \times Z_2, \\ Z_{16}, \quad Z_{18}, \quad Z_{10} \times Z_2, \quad Z_{20}, \quad Z_{21}, \quad Z_{22}, \quad Z_{23}, \\ Z_{24}, \quad Z_{12} \times Z_2, \quad Z_6 \times Z_2 \times Z_2. \end{aligned}$$

Мы привели список максимальных групп по возрастанию порядков.

1. Абелевы группы, содержащие элементы порядков 5, 7, 11, 23, и мультипликативные η -произведения

1.1. Абелевы группы, содержащие элементы порядка 5

Пусть T — искомое представление, χ — его характер. Этими символами мы будем обозначать искомое представление и его характер всюду в тексте до конца статьи.

Тогда $\chi(e) = 24$, $\chi(g) = 4$, если $\text{ord}(g) = 5$, так как в этом случае элемент g соответствует модулярной форме $\eta^4(5z)\eta^4(z)$.

Покажем, что группа $Z_5 \times Z_5$ не является допустимой. Пусть T_1 — единичное представление группы G . Оно совпадает со своим характером $T_1 = \chi_1$. Обозначим через m_1 кратность вхождения представления T_1 в разложение представления T в прямую сумму неприводимых представлений. Это число является неотрицательным целым числом (возможно, нулем). Оно вычисляется с помощью скалярного произведения характеров: $\langle \chi, \chi_1 \rangle = \frac{1}{25}(24 + 4 \cdot 24) = 4,8$. Мы получили противоречие.

Группа $Z_{10} \times Z_2$ является допустимой. Все элементы порядка 10 соответствуют модулярной форме $\eta^2(10z)\eta^2(2z)$, все элементы порядка 5 соответствуют модулярной форме $\eta^4(5z)\eta^4(z)$, все элементы порядка 2 соответствуют $\eta^{12}(2z)$. Тогда $\chi(e) = 24$, $\chi(g) = 4$, если $\text{ord}(g) = 5$, $\chi(g) = 0$, если $\text{ord}(g) = 2, 10$. Пусть группа $Z_{10} \times Z_2 \cong \langle f \rangle \times \langle h \rangle$. Все неприводимые представления, переводящие элемент f в первообразные корни 10-й и 5-й степени из 1, входят в искомой представление с кратностью 1, четыре неприводимых представления, переводящие f в 1 и -1 , входят в искомой представление с кратностью 2. Искомое представление единственно.

Покажем, что группа $Z_{10} \times Z_2 \times Z_2$ не является допустимой. Пусть подгруппа Z_{10} порождается элементом f , и Φ — такое одномерное представление, которое переводит f в ζ_{10} . Тогда число

$$\langle \chi_T, \chi_\Phi \rangle = \frac{1}{40}(24 + 4 \cdot (\zeta_5^4 + \zeta_5^3 + \zeta_5^2 + \zeta_5)) = 0,5.$$

Так как это число должно быть целым, получаем противоречие.

Покажем, что группа $Z_{15} \times Z_3$ не является допустимой. В этой группе 32 элемента порядка 15, которые соответствуют модулярной форме $\eta(15z)\eta(5z)\eta(3z)\eta(z)$, 4 элемента порядка 5, которые соответствуют модулярной форме $\eta^4(5z)\eta^4(z)$, 8 элементов порядка 3, которые соответствуют $\eta^6(3z)\eta^6(z)$. Тогда число

$$\langle \chi_T, \chi_1 \rangle = \frac{1}{45}(24 + 32 + 4 \cdot 4 + 6 \cdot 8) = \frac{8}{3}.$$

Так как это число должно быть целым, получаем противоречие.

Покажем, что группа $Z_{20} \times Z_2$ не является допустимой. В этой группе 16 элементов порядка 20, которые соответствуют модулярной форме $\eta(20z)\eta(4z)$, 12 элементов порядка 10, которые соответствуют модулярной форме $\eta^2(10z)\eta^2(2z)$, 4 элемента порядка 5, которые соответствуют модулярной форме $\eta^4(5z)\eta^4(z)$, 4 элемента порядка 4, которые соответствуют $\eta^6(4z)$, 3 элемента порядка 2, которые соответствуют $\eta^{12}(2z)$. Пусть подгруппа Z_{20} порождается элементом f , и Φ — такое одномерное представление, которое переводит f в ζ_{20} . Тогда число

$$\langle \chi_T, \chi_\Phi \rangle = 0,5.$$

Так как это число должно быть целым, получаем противоречие.

Теперь мы можем сделать вывод: максимальными допустимыми абелевыми группами, содержащими элементы порядка 5, являются Z_{15} , $Z_{10} \times Z_2$, Z_{20} .

1.2. Абелевы группы, содержащие элементы порядка 7

Покажем, что группа $Z_7 \times Z_7$ не является допустимой.

Пусть T — искомое представление, χ — его характер. Тогда $\chi(e) = 24$, $\chi(g) = 3$, если $\text{ord}(g) = 7$, так как в этом случае элемент g соответствует модулярной форме $\eta^3(7z)\eta^3(z)$. Получим $\langle \chi, \chi_1 \rangle = \frac{1}{49}(24 + 48 \cdot 3) = \frac{24}{7}$. Мы получили противоречие, так как это число должно быть целым.

Покажем, что группа $Z_{21} \times Z_3$ не является допустимой. Имеем $\chi_T(g) = 3$, если $\text{ord}(g) = 7$; $\chi_T(g) = 0$, если $\text{ord}(g) = 21, 3$. В группе 6 элементов 7-го порядка, 48 элементов 21-го порядка, 8 элементов 3-го порядка и единичный элемент. Получим $\langle \chi, \chi_1 \rangle = \frac{1}{63}(24 + 6 \cdot 3) = \frac{2}{3}$. Мы получили противоречие, так как это число должно быть целым.

Следовательно, максимальными допустимыми абелевыми группами, содержащими элементы порядка 7, являются Z_{14} , Z_{21} .

1.3. Абелевы группы, содержащие элементы порядка 11

Покажем, что группа $Z_{11} \times Z_{11}$ не является допустимой.

Пусть T — искомое представление, χ — его характер. Тогда $\chi(e) = 24$, $\chi(g) = 2$, если $\text{ord}(g) = 11$, так как в этом случае элемент g соответствует модулярной форме $\eta^2(11z)\eta^2(z)$. Получим $\langle \chi, \chi_1 \rangle = \frac{1}{121}(24 + 120 \cdot 2) = \frac{24}{11}$. Мы получили противоречие, так как это число должно быть целым.

Покажем, что группа $Z_{22} \times Z_2$ не является допустимой. В нашем случае $\chi_T(g) = 2$, если $\text{ord}(g) = 11$; $\chi_T(g) = 0$, если $\text{ord}(g) = 2, 22$. В группе 10 элементов 11-го порядка, 30 элементов 22-го порядка, 3 элемента

2-го порядка и единичный элемент. Пусть $T \cong m_1 T_1 \oplus m_2 T_2 \oplus \dots \oplus m_s T_s$ — разложение представления T в прямую сумму неприводимых представлений.

$$\langle \chi_T, \chi_T \rangle = \sum_{k=1}^s (m_k)^2 = 14, \quad \langle \chi_T, \chi_1 \rangle = \sum_{k=1}^s m_k = 24.$$

Так как m_k — натуральные числа, такие равенства невозможны.

Следовательно, максимальная допустимая абелева группа, содержащая элементы порядка 11, определяется однозначно: это Z_{22} .

1.4. Абелева группа, содержащая элементы порядка 23

Покажем, что группа $Z_{23} \times Z_{23}$ не является допустимой.

Пусть T — искомое представление, χ — его характер. Тогда $\chi(e) = 24$, $\chi(g) = 1$, если $\text{ord}(g) = 23$, так как в этом случае элемент g соответствует модулярной форме $\eta(23z)\eta(z)$. Получим $\langle \chi, \chi_1 \rangle = \frac{24}{23}$. Мы получили противоречие, так как это число должно быть целым.

Следовательно, единственной допустимой абелевой группой, содержащей элементы порядка 23, является Z_{23} .

2. Абелевы группы порядков, равных степени числа 2, и мультипликативные η -произведения

2.1. Абелевы группы, содержащие элементы порядка 2

2.1.1. Группа $Z_2 \times Z_2 \times Z_2$

Мы рассмотрим этот случай подробно и укажем все возможные соответствия между элементами группы и модулярными формами. Обозначим через u количество элементов, соответствующих параболической форме $\eta^8(2z)\eta^8(z)$, через v — количество элементов, соответствующих параболической форме $\eta^{12}(2z)$. Покажем, что u и v могут принимать различные значения от 0 до 7.

Составим необходимую нам таблицу неприводимых представлений этой группы. Пусть $Z_2 \times Z_2 \times Z_2 \cong \langle f \rangle \times \langle g \rangle \times \langle h \rangle$. Мы укажем значения только на образующих элементах.

T	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8
f	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
g	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
h	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1

Одномерные представления T_k совпадают со своими характеристиками χ_k .

Случай $u = 0, \quad v = 7$.

Допустимое представление содержит все неприводимые представления с кратностью 3.

Случай $u = 1, \quad v = 6$.

Пусть элемент f соответствует $\eta^8(2z)\eta^8(z)$.

Если $\chi_k(f) = 1$, то $\langle \chi_T, \chi_k \rangle = 4$.

Если $\chi_k(f) = 1$, то $\langle \chi_T, \chi_k \rangle = 2$.

Искомое представление:

$$T \cong 4(T_1 \oplus T_2 \oplus T_3 \oplus T_4) \oplus 2(T_5 \oplus T_6 \oplus T_7 \oplus T_8).$$

Случай $u = 2, \quad v = 5$.

Без ограничения общности можно считать, что элементы f и g соответствуют $\eta^8(2z)\eta^8(z)$.

При $k = 1, 2 \quad \langle \chi_T, \chi_k \rangle = 5$.

При $k = 3, 4, 5, 6 \quad \langle \chi_T, \chi_k \rangle = 3$.

При $k = 7, 8 \quad \langle \chi_T, \chi_k \rangle = 1$.

Искомое представление:

$$T \cong 5(T_1 \oplus T_2) \oplus 3(T_3 \oplus T_4 \oplus T_5 \oplus T_6) \oplus T_7 \oplus T_8.$$

Случай $u = 3, \quad v = 4$.

Здесь возможны 2 варианта.

1. Элементы f, g и gf соответствуют $\eta^8(2z)\eta^8(z)$.

При $k = 1, 2 \quad \langle \chi_T, \chi_k \rangle = 6$.

При $3 \leq k \leq 8 \quad \langle \chi_T, \chi_k \rangle = 2$.

Искомое представление:

$$T \cong 6(T_1 \oplus T_2) \oplus 2(T_3 \oplus T_4 \oplus T_5 \oplus T_6 \oplus T_7 \oplus T_8).$$

2. Элементы f, g и h соответствуют $\eta^8(2z)\eta^8(z)$.

Имеем $\langle \chi_T, \chi_1 \rangle = 6$; при $k = 2, 3, 5 \quad \langle \chi_T, \chi_k \rangle = 4$.

При $k = 4, 6, 7 \quad \langle \chi_T, \chi_k \rangle = 2; \langle \chi_T, \chi_8 \rangle = 0$.

Искомое представление:

$$T \cong 6T_1 \oplus 4(T_2 \oplus T_3) \oplus 2(T_4 \oplus T_6 \oplus T_7).$$

Случай $u = 4, \quad v = 3$.

Без ограничения общности можно считать, что элементы f, g, h и gf соответствуют $\eta^8(2z)\eta^8(z)$.

Искомое представление:

$$T \cong 7T_1 \oplus 5T_2 \oplus 3(T_3 \oplus T_5 \oplus T_7) \oplus T_4 \oplus T_6 \oplus T_8.$$

Случай $u = 5, \quad v = 2$.

Можно считать, что элементы f и g соответствуют $\eta^{12}(2z)$, остальные элементы порядка 2 соответствуют $\eta^8(2z)\eta^8(z)$.

Искомое представление:

$$T \cong 8T_1 \oplus 2(T_3 \oplus T_4 \oplus T_5 \oplus T_6) \oplus 4(T_7 \oplus T_8).$$

Случай $u = 6, \quad v = 1$.

Можно считать, что элемент f соответствует $\eta^{12}(2z)$, остальные элементы порядка 2 соответствуют $\eta^8(2z)\eta^8(z)$.

Искомое представление:

$$T \cong 9T_1 \oplus T_2 \oplus T_3 \oplus T_4 \oplus 3(T_5 \oplus T_6 \oplus T_7 \oplus T_8).$$

Случай $u = 7, \quad v = 0$.

Единичное представление входит в искомое с кратностью 10, все остальные представления входят в него с кратностью 2.

2.1.2. Группа $Z_2 \times Z_2 \times Z_2 \times Z_2$

Эта группа является допустимой.

Пусть эта группа порождена элементами g_1, g_2, g_3, g_4 . Пусть элемент g_1 соответствует $\eta^{12}(2z)$, остальные элементы порядка 2 соответствуют $\eta^8(2z)\eta^8(z)$. В искомое представление одномерные представления, переводящие элемент g_1 в 1, входят с кратностью 2, одномерные представления, переводящие элемент g_1 в -1 , входят с кратностью 1.

Можно доказать, что группа $Z_2 \times Z_2 \times Z_2 \times Z_2 \times Z_2$ уже не является допустимой.

2.2. Допустимые абелевы группы порядка 16

2.2.1. Группа $Z_8 \times Z_2$

Все элементы восьмого порядка имеют одинаковые квадраты. Следовательно, все элементы восьмого порядка соответствуют модулярным формам одного и того же типа. Рассмотрим три случая.

1. Все элементы восьмого порядка соответствуют модулярной форме $\eta^3(8z)$. Тогда все элементы 4-го порядка соответствуют $\eta^6(4z)$. Обозначим через u количество элементов, соответствующих параболической форме $\eta^8(2z)\eta^8(z)$, через v — количество элементов, соответствующих параболической форме $\eta^{12}(2z)$. Тогда

$$\langle \chi_T, \chi_1 \rangle = \frac{1}{16}(24 + 8u) = \frac{1}{2}(3 + u).$$

Следовательно, $u = 1$. В этом случае группа является допустимой. Пусть элемент g соответствует $\eta^8(2z)\eta^8(z)$. Те одномерные представления нашей группы, которые переводят g в 1, входят в искомое с кратностью 2, те одномерные представления нашей группы, которые переводят g в -1 , входят в искомое с кратностью 1.

2. Все элементы восьмого порядка соответствуют модулярной форме $\eta^2(8z)\eta^2(4z)$, Пусть все элементы 4-го порядка соответствуют $\eta^4(4z)\eta^4(2z)$, Обозначим через u количество элементов, соответствующих параболической форме $\eta^8(2z)\eta^8(z)$, через v — количество элементов, соответствующих параболической форме $\eta^{12}(2z)$. Тогда так же, как и раньше,

$$\langle \chi_T, \chi_1 \rangle = \frac{1}{16}(24 + 8u) = \frac{1}{2}(3 + u).$$

Следовательно, $u = 1$. Пусть $Z_8 \times Z_2 \cong \langle f \rangle \times \langle h \rangle$. Пусть элемент h соответствует $\eta^8(2z)\eta^8(z)$. Те одномерные представления, переводящие h в 1, входят в искомое с кратностью 2, остальные представления входят в искомое с кратностью 1. Но тогда среди собственных значений оператора $T(f)$ имеется по 3 значения каждого первообразного корня из 1 степени 8, и элемент f не может соответствовать $\eta^2(8z)\eta^2(4z)$. Допустимое представление построить нельзя. Случай, когда модулярной форме $\eta^8(2z)\eta^8(z)$ соответствует элемент f^4h , исследуется аналогично.

Пусть теперь два элемента f^2 и f^6 соответствуют $\eta^4(4z)\eta^4(2z)$, элементы hf^2 и hf^6 соответствуют $\eta^4(4z)\eta^2(2z)\eta^4(z)$. Тогда

$$\langle \chi_T, \chi_1 \rangle = \frac{1}{16}(24 + 8 + 8u) = 2 + \frac{u}{2}.$$

Если $u = 0$, то для представления T_k , переводящего f^2 в i , а h в 1, число $\langle \chi_T, \chi_k \rangle$ не будет целым. Если $u = 2$, то для представления T_k , переводящего f в i , а h в -1 , число $\langle \chi_T, \chi_k \rangle$ не будет целым.

Таким образом мы приходим к выводу: если абелева группа содержит элемент 8-го порядка, соответствующего модулярной форме $\eta^2(8z)\eta^2(4z)$, то эта группа изоморфна Z_8 .

3. Все элементы восьмого порядка соответствуют модулярной форме $\eta^2(8z)\eta(4z)\eta(2z)\eta^2(z)$. Группа $Z_8 \times Z_2$ не является допустимой,

2.2.2. Группа $Z_4 \times Z_4$

Пусть $Z_4 \times Z_4 \cong \langle f \rangle \times \langle h \rangle$.

Эта группа является допустимой. Пусть f^2 соответствует форме $\eta^8(2z)\eta^8(z)$, элементы f^2h^2 и h^2 соответствуют $\eta^{12}(2z)$. Тогда представления, переводящие элемент f в i или $-i$, входят в искомое представление с кратностью 1; представления, переводящие элемент f в 1 или -1 , входят в искомое представление с кратностью 2. Элементы

f, f^3, fh^2 и f^3h^2 соответствуют $\eta^4(4z)\eta^4(2z)$, остальные элементы 4-го порядка соответствуют $\eta^6(4z)$.

2.2.3. Группа $Z_4 \times Z_2 \times Z_2$

Пусть $Z_4 \times Z_2 \times Z_2 \cong \langle f \rangle \times \langle h \rangle \times \langle c \rangle$.

Эта группа является допустимой. Приведем примеры двух возможных вариантов.

Пусть элемент h соответствует $\eta^8(2z)\eta^8(z)$, остальные элементы второго порядка соответствуют $\eta^{12}(2z)$. Тогда представления, переводящие элемент h в 1, входят в искомое представление с кратностью 2, представления, переводящие элемент h в -1 , входят в искомое представление с кратностью 1. Все элементы 4-го порядка соответствуют $\eta^6(4z)$.

Пусть элементы h, c, hc соответствуют $\eta^8(2z)\eta^8(z)$, остальные элементы второго порядка соответствуют $\eta^{12}(2z)$. Тогда представления, переводящие элементы h и c в 1, входят в искомое представление с кратностью 3, остальные представления входят в искомое представление с кратностью 1. Все элементы 4-го порядка соответствуют $\eta^6(4z)$.

2.3. Абелевы группы порядка 32

Перечислим эти группы:

$$\begin{aligned} Z_{32}, \quad Z_{16} \times Z_2, \quad Z_8 \times Z_4, \quad Z_8 \times Z_2 \times Z_2, \\ Z_4 \times Z_4 \times Z_2, \quad Z_4 \times Z_2 \times Z_2 \times Z_2, \quad Z_2 \times Z_2 \times Z_2 \times Z_2 \times Z_2. \end{aligned}$$

Все эти группы не являются допустимыми.

Группа Z_{32} не является допустимой, так как элементы порядка 32 не могут соответствовать мультипликативным η -произведениям.

Приведем подробное доказательство для группы $Z_{16} \times Z_2$.

Обозначим через u количество элементов, соответствующих параболической форме $\eta^8(2z)\eta^8(z)$, через v — количество элементов, соответствующих параболической форме $\eta^{12}(2z)$.

Для группы $Z_{16} \times Z_2$ нужно рассмотреть три случая.

Случай $u = 3$. Здесь $\langle \chi_T, \chi_1 \rangle = \frac{3}{2}$.

Случай $u = 2$. Если два элемента группы соответствуют $\eta^8(2z)\eta^8(z)$, то для представления T_k , переводящего один из этих элементов в 1, а второй — в -1 , число $\langle \chi_T, \chi_k \rangle$ не является целым.

Случай $u = 1$. Если только один элемент группы соответствует $\eta^8(2z)\eta^8(z)$, то для представления T_k , переводящего его в -1 , число $\langle \chi_T, \chi_k \rangle$ не является целым.

Для остальных групп порядка 32 доказательство проводится аналогичными рассуждениями.

3. Абелевы группы, содержащие элементы порядка 3, и мультипликативные η -произведения

3.1. Группа $Z_3 \times Z_3$

Здесь надо рассмотреть три случая.

1. Все элементы третьего порядка соответствуют модулярной форме $\eta^8(3z)$. Тогда $\chi_T(e) = 24$, $\chi_T(g) = 0$, если $\text{ord}(g) = 3$. $\langle \chi_T, \chi_1 \rangle = \frac{8}{3}$. Мы получили противоречие, так как это число должно быть целым.

2. Все элементы третьего порядка соответствуют модулярной форме $\eta^6(3z)\eta^6(z)$. Тогда $\chi_T(e) = 24$, $\chi_T(g) = 6$, если $\text{ord}(g) = 3$. В этом случае группа $Z_3 \times Z_3$ является допустимой. Искомое представление содержит единичное представление с кратностью 8, остальные представления входят в искомое с кратностью 2.

3. Пусть u элементов соответствуют $\eta^6(3z)\eta^6(z)$, v элементов соответствуют $\eta^8(3z)$. Оба этих числа больше нуля. Так как элементы g и g^2 соответствуют одной и той же модулярной форме, то числа u и v — четные.

$$\langle \chi_T, \chi_1 \rangle = \frac{1}{9}(24 + 6u) = \frac{1}{3}(8 + 2u).$$

Единственный возможный вариант здесь $u = 2$. Пусть элементы f и f^2 соответствуют $\eta^6(3z)\eta^6(z)$. Пусть T_k — одномерное представление нашей группы, m_k — кратность его вхождения в T . Если $T_k(f) = 1$, то $m_k = 4$; если $T_k(f) = \zeta_3$ или ζ_3^2 , то $m_k = 2$. Получено допустимое представление.

Покажем теперь, что группа $Z_3 \times Z_3 \times Z_3$ не является допустимой. Здесь возможны только два случая.

1. Все элементы третьего порядка соответствуют модулярной форме $\eta^6(3z)\eta^6(z)$. Тогда число

$$\langle \chi_T, \chi_1 \rangle = \frac{1}{27}(24 + 26 \cdot 6) = \frac{20}{3}.$$

Так как это число должно быть целым, получаем противоречие.

2. Пусть u элементов соответствуют $\eta^6(3z)\eta^6(z)$, v элементов соответствуют $\eta^8(3z)$. Оба этих числа больше нуля. Числа u и v — четные.

$$\langle \chi_T, \chi_1 \rangle = \frac{1}{27}(24 + 6u) = \frac{1}{9}(8 + 2u).$$

Единственный возможный вариант здесь $u = 14$. Пусть T_k — одномерное представление нашей группы, m_k — кратность его вхождения в T . Пусть u_1 — число элементов g , соответствующих $\eta^6(3z)\eta^6(z)$, таких, что $T_k(g) = 1$, u_2 — число элементов g , соответствующих $\eta^6(3z)\eta^6(z)$, таких, что $T_k(g) = \zeta_3$, u_3 — число элементов g , соответствующих $\eta^6(3z)\eta^6(z)$, таких, что $T_k(g) = \zeta_3^2$. Имеем $u_2 = u_3$, $u_1 + 2u_2 = 14$.

$$\begin{aligned}\langle \chi_T, \chi_k \rangle &= \frac{1}{27}(24 + 6(u_1 + \zeta_3 \cdot u_2 + \zeta_3^2 \cdot u_3)) = \\ &= \frac{1}{27}(24 + 6u_1 - 6u_2) = \frac{1}{9}(8 + 2(u_1 - u_2)).\end{aligned}$$

Если T_k — неединичное представление, то возможен единственный вариант: $u_1 - u_2 = 5$. Так как $u_1 + 2u_2 = 14$, то $u_1 = 8, u_2 = 3$. Так как T_k — неединичное представление, все три образующие нашей группы не будут переходить в 1 при T_k . Тогда $\text{Ker}(T_k)$ состоит из единичного элемента и элементов, соответствующих $\eta^6(3z)\eta^6(z)$. На элементах, соответствующих $\eta^8(3z)$, представление T_k не принимает значение 1. Пусть h — элемент группы G , соответствующий $\eta^8(3z)$. Тогда среди собственных значений оператора $T_k(h)$ имеется в точности 4 значения, равных 1 и оператор $T_k(h)$ не может иметь характеристический многочлен $(x^3 - 1)^8$. Полученное противоречие показывает, что изучаемая группа не является допустимой.

3.2. Абелевы группы, содержащие элементы порядка 9

Группа Z_{18} является допустимой. Покажем, что группы $Z_{18} \times Z_2$ и $Z_9 \times Z_3$ не являются допустимыми.

В группе $Z_{18} \times Z_2$ 2 элемента порядка 3. Тогда $\chi_T(e) = 24$, $\chi(g) = 6$, если $\text{ord}(g) = 3$, $\chi(g) = 0$, если $\text{ord}(g) \neq 3$. Пусть $Z_{18} \times Z_2 \cong \langle f \rangle \times \langle h \rangle$. Рассмотрим Φ — такое одномерное представление, которое переводит f в ζ_{18} , h в 1. Тогда число $\langle \chi_T, \chi_\Phi \rangle = 0,5$. Так как это число должно быть целым, получаем противоречие.

В группе $Z_9 \times Z_3$ 8 элементов порядка 3, причем $\chi_T(e) = 24$, $\chi(g) = 6$, если $\text{ord}(g) = 3$, $\chi(g) = 0$, если $\text{ord}(g) \neq 3$. Число $\langle \chi_T, \chi_1 \rangle = \frac{8}{3}$. Так как это число должно быть целым, получаем противоречие.

3.3. Абелевы группы, содержащие элементы порядка 6

В статье [10] было показано, что все группы порядка 24 являются допустимыми.

Перечислим абелевы группы порядка 24:

$$Z_{24}, \quad Z_{12} \times Z_2, \quad Z_6 \times Z_2 \times Z_2.$$

В качестве допустимого представления можно взять регулярное.

Докажем, что группа $Z_6 \times Z_3$ не является допустимой.

Пусть $Z_6 \times Z_3 \cong \langle f \rangle \times \langle h \rangle$.

Пусть элемент f соответствует $\eta^4(6z)$, тогда f^3 соответствует $\eta^{12}(2z)$. Следовательно, все элементы 6-го порядка соответствуют $\eta^4(6z)$, все элементы третьего порядка соответствуют $\eta^8(3z)$. Но группа $Z_3 \times Z_3$, в которой все элементы третьего порядка соответствуют $\eta^8(3z)$ не является допустимой.

Так как в этой группе любой элемент третьего порядка является квадратом некоторого элемента 6-го порядка, то, исключив рассмотренный выше случай, мы должны считать, что все элементы третьего порядка соответствуют $\eta^6(3z)\eta^6(z)$. Единственный элемент второго порядка соответствует $\eta^8(2z)\eta^8(z)$. Обозначим через s количество элементов, соответствующих параболической форме $\eta^3(6z)\eta^3(2z)$, через t количество элементов, соответствующих параболической форме $\eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z)$. Числа s и t четные, не превосходящие 8. Тогда число

$$\langle \chi_T, \chi_1 \rangle = 4 + \frac{1}{9}(4 + t)$$

не является целым при возможных значениях t . Так как группа $Z_6 \times Z_3$ не является допустимой, то не являются допустимыми и группы $Z_{12} \times Z_3$ и $Z_{18} \times Z_3$.

Докажем, что группа $Z_6 \times Z_2 \times Z_2 \times Z_2$ не является допустимой.

В этой группе все элементы второго порядка должны соответствовать модулярной форме одного типа.

1. Пусть все элементы второго порядка соответствуют $\eta^{12}(2z)$. Тогда $\chi_T(g) = 0$, если $\text{ord}(g) \neq 1$. Тогда число $\langle \chi_T, \chi_1 \rangle = \frac{3}{2}$ не является целым.

2. Пусть все элементы второго порядка соответствуют $\eta^8(2z)\eta^8(z)$. Два элемента третьего порядка соответствуют $\eta^6(3z)\eta^6(z)$. Обозначим через s количество элементов, соответствующих параболической форме $\eta^3(6z)\eta^3(2z)$, через t количество элементов, соответствующих параболической форме $\eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z)$. Число t не превосходит 16. Тогда число

$$\langle \chi_T, \chi_1 \rangle = 3 + \frac{1}{24}(6 + t)$$

не является целым при возможных значениях t .

Докажем, что группа $Z_{12} \times Z_2 \times Z_2$ не является допустимой.

Все элементы двенадцатого порядка соответствуют одной и той же модулярной форме. Здесь возможны два случая.

1. Элементы двенадцатого порядка соответствуют $\eta^2(12z)$. Тогда $\chi_T(g) = 0$, если $\text{ord}(g) \neq 1$. Число $\langle \chi_T, \chi_1 \rangle = 0,5$ не является целым.

2. Элементы двенадцатого порядка соответствуют модулярной форме $\eta(12z)\eta(6z)\eta(4z)\eta(2z)$.

Докажем, что в этом случае уже группа $Z_{12} \times Z_2$ не является допустимой.

В группе два элемента порядка 3, они соответствуют $\eta^6(3z)\eta^6(z)$. Следовательно, все 3 элемента порядка 2 соответствуют $\eta^8(2z)\eta^8(z)$, а все 4 элемента 4-го порядка соответствуют $\eta^4(4z)\eta^2(2z)\eta^4(z)$, так

как каждый элемент 4-го порядка является кубом для некоторого элемента 12-го порядка. Обозначим через s количество элементов, соответствующих параболической форме $\eta^3(6z)\eta^3(2z)$, через t количество элементов, соответствующих параболической форме $\eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z)$. Число t может принимать значения 2 или 4. Элементов 12-го порядка в группе 8. Тогда число

$$\langle \chi_T, \chi_1 \rangle = 3 + \frac{1}{12}(2 + t)$$

не является целым при возможных значениях t .

Мы рассмотрели все случаи, доказательство теоремы завершено.

Литература

- [1] Dummit D., Kisilevsky H., McKay J. Multiplicative products of η -functions // Contemp. Math. 1985. V. 45. P. 89–98.
- [2] Mason G. Finite groups and Hecke operators // Math. Ann. 1989. V. 282. P. 381–409.
- [3] Mason G. M_{24} and certain automorphic forms // Contemp. Math. 1985. V. 45. P. 223–244.
- [4] Koike M. On McKay's conjecture // Nagoya Math. J. 1984. V. 95. P. 85–89.
- [5] Kondo T. Examples of multiplicative η -products // Sci. Pap. Coll. Arts and Sci. Univ. Tokyo. 1986. V. 35. P. 133–149.
- [6] Martin Y., Ken O. Eta-quotients and elliptic curves // Proc. Amer. Math. Soc. 1997. V. 125. No. 11. P. 3169–3176.
- [7] Gordon B., Sinor S. Multiplicative properties of η -products // Lecture Notes in Math. Springer-Verlag. 1989. V. 1395. P. 173–200.
- [8] Воскресенская Г.В. Модулярные формы и представления групп диэдра // Матем. заметки. 1998. Т. 63. №1. С. 130–133.
- [9] Воскресенская Г.В. Параболические формы и конечные подгруппы в $SL(5, \mathbb{C})$ // Функцион. анализ и его прил. 1995. Т. 29. №2. С. 1–73.
- [10] Воскресенская Г.В. Модулярные формы и регулярные представления групп порядка 24 // Матем. заметки. 1996. Т. 60. №2. С. 292–294.
- [11] Voskresenskaya G.V. One special class of modular forms and group representations // Journal de Theorie des Nombres de Bordeaux 1999. V. 11. P. 247–262.
- [12] Воскресенская Г.В. Метациклические группы и модулярные формы // Матем. заметки. 2000. Т. 67. №2. С. 18–25.

ABELIAN GROUPS AND MODULAR FORMS³

© 2003 G.V. Voskresenskaya⁴

In the paper all such abelian groups that the cusp forms associated with all elements of these groups by a faithful representation are modular forms from a special class with multiplicative Fourier coefficients are obtained.

Поступила в редакцию 19/III/2003.

³ Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. V.E. Voskresenskii.

⁴ Voskresenskaya Galina Valentinovna (vosk@ssu.samara.ru), Dept. of Algebra and Geometry, Samara State University, Samara, 443011, Russia.