МАТЕМАТИКА

УДК 517.946

НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ ОБРАЩЕНИЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ[1]

© 2003 Ю.С. Бабурин[2]

В статье излагаются и иллюстрируются на примерах новые методы решения в замкнутой форме полных сингулярных интегральных уравнений второго рода с ядром Коши определенного класса.

Излагаемые здесь методы обращения полных сингулярных интегральных уравнений второго рода с ядром Коши (в дальнейшем, полных СИУ-2К) основаны на соединении концепции регуляризации полных СИУ-2К [1, § 22–24] или [2, § 45,50,75,99] с концепцией сингуляризации полных СИУ-2К указанного класса [3 и 4, глава 1].

Пусть в исходном уравнении

$$(K_1\phi)(t) \equiv a_1(t)\phi(t) + \oint\limits_L \left[\frac{1}{\pi i}\frac{b_1(t)}{\tau - t} + k_1(t,\tau)\right]\phi(\tau)d\tau = f_1(t), t \in L \qquad (1)$$

контур интегрирования L — это замкнутая простая кусочно-гладкая кривая, ограничивающая конечную односвязную область $D^+{}_L$; коэффициенты $a_1(t)$ и $b_1(t)$ — заданные функции класса Гельдера $H^{(\lambda)}(L)$ при $0 < \lambda \leqslant 1$, допускающие по переменной t с контура L в замыкание $D^+{}_L \cup L$ области $D^+{}_L$ однозначные аналитические продолжения $a_{+,1}(z)$ и $b_{+,1}(z)$ функционального класса $C^{(\infty)}(D^+{}_L) \cap H^{(\lambda)}(D^+{}_L \cup L)$, удовлетворяющие условию

$$a_{+,1}(z) - b_{+,1}(z) \neq 0 \quad \text{при всех} \quad z \in (D^+{}_L \cup L); \qquad (2)$$

[1] Представлена доктором физико-математических наук профессором Ю.Н. Радаевым.

[2] Бабурин Юрий Степанович, кафедра высшей математики и информатики Самарского государственного университета, 443011, Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

сингулярный интеграл с ядром Коши понимается в смысле его главного значения по Коши; регулярная часть $k_1(t,\tau)$ ядра представима в виде

$$k_1(t,\tau) = k_1^*(t,\tau)\prod_{j=1}^{m}(t-z_j)^{-\mu_j}, \tag{3}$$

где m — неотрицательное целое число (при $m=0$ произведение равно единице), μ_j и z_j при $1 \leqslant j \leqslant m$ — натуральные при $m \neq 0$ числа и фиксированные точки области $D^+{}_L$, а

$$k_1^*(t,\tau) = \lim_{z\to t\in L} k_{+,1}^*(z,\tau) = \lim_{w\to\tau\in L} k_{1,+}^*(t,w), \tag{4}$$

причем

$$k_{+,1}^*(z,\tau) \in C_z^{(\infty)}\{(z,\tau) : z \in D^+{}_L, \tau \in L\} \cap H_z^{(\lambda)}\{(z,\tau) : z \in L, \tau \in L, z \neq \tau\}, \tag{5}$$

$$k_{1,+}^*(t,w) \in C_w^{(\infty)}\{(t,w) : t \in L, w \in D^+{}_L\} \cap H_w^{(\lambda)}\{(t,w) : t \in L, w \in L, t \neq w\}. \tag{6}$$

Если к обеим частям уравнения (1) применить сингулярный интегральный оператор (в дальнейшем СИ-оператор) K_2, определяемый формулой

$$(K_2\psi)(t) = a_2(t)\psi(t) + \oint_L \left[\frac{1}{\pi i}\frac{b_2(t)}{\tau - t} + k_2(t,\tau)\right]\psi(\tau)d\tau, \quad t \in L, \tag{7}$$

где $a_2(t), b_2(t)$ и $k_2(t,\tau)$ — произвольные функции, удовлетворяющие условию Гельдера на контуре L (последняя — по каждой из переменных t и τ), то получится при $t \in L$ новое полное СИУ-2К

$$(K_2K_1\phi)(t) = a_{2,1}(t)\phi(t) + \oint_L \left[\frac{1}{\pi i}\,\frac{b_{2,1}(t)}{\tau - t} + k_{2,1}(t,\tau)\right]\phi(\tau)d\tau = (K_2 f_1)(t) \tag{8}$$

с коэффициентами [1, с.200; 2, с.197]

$$a_{2,1}(t) = a_2(t)a_1(t) + b_1(t)b_2(t), \quad b_{2,1}(t) = a_2(t)b_1(t) + a_1(t)b_2(t) \tag{9}$$

и с регулярной частью ядра [4, с.4]

$$k_{2,1}(t,\tau) = a_2(t)k_1(t,\tau) + a_1(\tau)k_2(t,\tau) + \frac{b_2(t)}{\pi i}\,\frac{a_1(\tau) - a_1(t)}{\tau - t} + \\ + \oint_L \left[\frac{1}{\pi i}\frac{b_2(t)}{s - t} + k_2(t,s)\right]\left[\frac{-1}{\pi i}\frac{b_1(s)}{s - \tau} + k_1(s,\tau)\right]ds. \tag{10}$$

Если при этом коэффициенты СИ-оператора K_2 вида (7) выбирать из требования, чтобы выполнялось "основное левое регулярное тождество":

$$b_{2,1}(t) = 0 \quad \text{при всех} \quad t \in L, \tag{11}$$

то есть выбирать в виде

$$a_2(t) = u(t)a_1(t), \quad b_2(t) = -u(t)b_1(t), \tag{12}$$

где $u(t)$ — произвольная функция класса $H^{(\lambda)}(L)$ и $u(t) \neq 0$ при всех $t \in L$, то в уравнении (8) исчезает сингулярный интеграл с ядром Коши. Если одновременно с этим регулярную часть $k_2(t,\tau)$ ядра СИ-оператора K_2 вида (7) выбирать в том же допустимом классе (3)–(7), которому принадлежит регулярная часть $k_1(t,\tau)$ ядра исходного уравнения (1), то есть выбирать в виде

$$k_2(t,\tau) = k_2^*(t,\tau)\prod_{j=1}^{m}(t-z_j)^{-\mu_j}, \tag{13}$$

где

$$k_2^*(t,\tau) = \lim_{z\to t\in L} k_{+,2}^*(z,\tau) = \lim_{w\to\tau\in L} k_{2,+}^*(t,w), \tag{14}$$

и

$$k_{+,2}^*(z,\tau) \in C_z^{(\infty)}\{(z,\tau) : z \in D^+{}_L, \tau \in L\} \cap H_z^{(\lambda)}\{(z,\tau) : z \in L, \tau \in L, z \neq \tau\}, \tag{15}$$

$$k_{2,+}^*(t,w) \in C_w^{(\infty)}\{(t,w) : t \in L, w \in D^+{}_L\} \cap H_w^{(\lambda)}\{(t,w) : t \in L, w \in L, t \neq w\}, \tag{16}$$

а неизвестную функцию $k_2^*(t,\tau)$ выбирать из требования, чтобы выполнялось "основное левое сингулярное тождество":

$$k_{2,1}(t,\tau) = 0, \quad t \in L, \tau \in L, t \neq \tau, \tag{17}$$

то после вычисления (с помощью аппарата вычетов теории однозначных аналитических функций, например, [5, глава 5]) *конечного* числа интегралов левой части уравнения (17) вспомогательная функция $k_2^*(t,\tau)$ вычисляется:

1) однозначно и безусловно как решение неоднородного линейного алгебраического уравнения, если $m = 0, k_1(t,\tau) = k_1^*(t,\tau)$ и поэтому $k_2(t,\tau) = k_2^*(t,\tau)$;

2) однозначно при выполнении соответствующего условия однозначной разрешимости неоднородной системы линейных алгебраических уравнений (в дальнейшем неоднородной СЛАУ) из $n = \mu_1 + \mu_2 + +\cdots+\mu_m$ таких уравнений относительно вспомогательных неизвестных

$$\frac{\partial^l}{\partial w^l}k_{2,+}^*(t,z_j) = \lim_{w\to z_j}\frac{\partial^l}{\partial w^l}k_{2,+}^*(t,w), \quad 1 \leqslant l \leqslant \mu_j, \ 1 \leqslant j \leqslant m,$$

число которых совпадает с числом n уравнений этой неоднородной СЛАУ, если $m \neq 0$.

При найденных (однозначно!) значениях $a_2(t), b_2(t)$ и $k_2(t,\tau)$ правая часть уравнения (8) становится известной, а само уравнение (8)

в силу выполнения тождеств (11) и (17) превращается в неоднородное линейное уравнение относительно прежней искомой функции $\phi(t)$. Единственное решение этого алгебраического уравнения

$$\phi(t) = \frac{(K_2 f_1)(t)}{a_{2,1}(t)} = \frac{1}{u(t)\left[a_1^2(t) - b_1^2(t)\right]}(K_2 f_1)(t), \quad t \in L \tag{18}$$

является не зависящим от произвольной функции $u(t)$ частным решением исходного СИУ-2К вида (1); поэтому справедливо представление

$$\phi(t) = \phi_*(t) + \sum_{j=1}^{n_1} c_j^* \phi_{0,j}(t), \quad t \in L, \tag{19}$$

где $\phi_*(t)$ — частное решение неоднородного линейного уравнения (1), c_j^* — фиксированные значения постоянных c_j при $1 \leqslant j \leqslant n_1$, $\{\phi_{0,j}(t)\}$ — полная система линейно независимых на контуре L собственных функций СИ-оператора K_1 вида (1) и число $n_1 \geqslant \omega_1$, если ω_1 — индекс уравнения (1).

Решив с помощью проверки следующую "проблему распознавания":

1) какая группа слагаемых правой части равенства (18) входит в каждую из функций $\phi_*(t)$ и $\phi_{0,j}(t)$ правой части представления (19);

2) с какими значениями c_j^* произвольных постоянных c_j входят функции $\phi_{0,j}(t)$ при $1 \leqslant j \leqslant n_1$ в правую часть уравнения (18), — общее решение исходного уравнения (1) можно записать в виде

$$\phi(t) = \phi_*(t) + \sum_{j=1}^{n_1} c_j \phi_{0,j}(t), \quad t \in L, \tag{20}$$

где $c_1, c_2, ..., c_{n_1}$ — произвольные (вообще говоря, комплекснозначные) постоянные.

В этом — суть метода непосредственного обращения слева полных СИУ-2К указанного типа. Он применим к уравнениям вида (1), для которых выполнено условие (2) и для которых индекс $\omega_1 \leqslant 0$. Полезно высказать заранее следующее предостережение: если при решении конкретных примеров не обеспечено выполнение условия (13), то этот метод становится внутренне противоречивым, ибо получаемая вспомогательная функция $k_2^*(t, \tau)$ оказывается не принадлежащей избранному нами допустимому для нее функциональному классу (14), так как условие (16) в таких случаях не выполняется. Такая "внутренняя защищенность от ошибок" — замечательное свойство изложенного метода, редко встречающееся даже в "классических" методах решения полных СИУ-2К вида (1).

В качестве *примера 1* приведем здесь решение в замкнутой форме (то есть решения явного и точного, а не приближенного, и в результате вычисления *конечного* числа интегралов от известных и заданных функций) нормального случая полного СИУ-2К (вида (47) из [3, с.36]):

$$(K_1\phi)(t) = (t^2+2)\phi(t) + \frac{1}{\pi i}\oint\limits_L \left[\frac{t^2-2}{\tau - t} - \frac{\tau}{2}\cos(\tau - t)\right]\phi(\tau)d\tau =$$

$$= 2t^2(e^t + t\sin t), \quad t \in L, \tag{21}$$

где $L = \{t : |t| = 1\}$ — проходимая против часовой стрелки единичная окружность с центром $z = 0$.

Решение. Поскольку здесь $a_{+,1}(z) - b_{+,1}(z) = (z^2+2) - (z^2-2) = 4 \neq 0$ и $a_{+,1}(z) + b_{+,1}(z) = (z^2+2) + (z^2-2) = 2z^2 = 0$ при $z = 0 \in (D^*_L) = \{z : |z| < 1\}$, то условие (2) выполнено и индекс уравнения (21)

$$\omega_1 = \mathrm{Ind}_L \frac{a_1(t) - b_1(t)}{a_1(t) + b_1(t)} = N_{D^+_L}[a_1(z) - b_1(z)] - N_{D^+_L}[a_1(z) + b_1(z)] = -2,$$

где $N_{D^+_L}\{w(z)\}$ означает число нулей функции $w(z)$ в области D^+_L , если каждый нуль считать столько раз подряд, какова его кратность. Поэтому при решении в замкнутой форме уравнения (21) целесообразна [3, с.17, теорема 6] его непосредственная сингуляризация слева и недопустима его непосредственная сингуляризация справа. Так как здесь $k_1(t,\tau) = k^*_1(t,\tau) = \frac{-\tau}{2\pi i}\cos(\tau - t)$, ибо функция $k_{+,1}(z,\tau) = \frac{-\tau}{2\pi i}\cos(\tau - z)$ голоморфна по переменной z в замкнутом круге $(D^+_L \cup L) = \{z : |z| \leqslant 1\}$ при всех $\tau \in L$ и поэтому принадлежит допустимому классу (5) и функция $k^+_{1,+}(t,w) = \frac{-w}{2\pi i}\cos(w - t)$ голоморфна по переменной w в замкнутом круге $(D^+_L \cup L) = \{w : |w| \leqslant 1\}$ при всех $t \in L$ и поэтому принадлежит допустимому классу (6), то к обеим частям уравнения (21) применяем СИ-оператор K_2 вида (7) с регулярной частью ядра $k_2(t,\tau) = k^*_2(t,\tau)$ вида (13) при $m = 0$, принадлежащей допустимому классу функций (14)–(16). В результате приходим к уравнению (8) с коэффициентами

$$a_{2,1}(t) = a_2(t)(t^2+2) + (t^2-2)b_2(t), \quad b_{2,1}(t) = a_2(t)(t^2-2) + (t^2+2)b_2(t)$$

и с регулярной частью ядра

$$k_{2,1}(t,\tau) = -\frac{a_2(t)}{2\pi i}\tau\cos(\tau - t) + (\tau^2+2)k^*_2(t,\tau) + \frac{b_2(t)}{\pi i}\frac{(2+\tau^2) - (2+t^2)}{\tau - t} +$$

$$+\frac{1}{\pi i}\oint\limits_L \left[\frac{1}{\pi i}\frac{b_2(t)}{s-t} + k^*_2(t,s)\right]\left[\frac{2-s^2}{s-\tau} - \frac{\tau}{2}\cos(\tau - s)\right]ds.$$

Используя следующие результаты вычисления интегралов:

$$1)\quad \frac{b_2(t)}{\pi i}\oint\limits_L \frac{1}{\pi i}\frac{2-s^2}{s-\tau}\frac{ds}{s-t} = \frac{b_2(t)}{\pi i}\frac{(2+t^2)-(2+\tau^2)}{\tau-t} = -\frac{b_2(t)}{\pi i}(\tau+t);$$

$$2)\quad \frac{-\tau}{2\pi i}\oint\limits_L \frac{b_2(t)}{\pi i}\frac{\cos(s-\tau)}{s-t}ds = -b_2(t)\frac{\tau}{2\pi i}\cos(\tau-t);$$

$$3)\quad \oint\limits_L \frac{2-s^2}{\pi i}\frac{k_2^*(t,s)}{s-\tau}ds = \oint\limits_L \frac{2-s^2}{\pi i}\frac{k_{2,+}^*(t,s)}{s-\tau}ds = (2-\tau^2)k_2^*(t,\tau);$$

$$4)\quad \frac{-\tau}{2\pi i}\oint\limits_L k_2^*(t,\tau)\cos(\tau-s)ds = -\tau\sum_j res_{z=z_j\in D^+_L}\left[k_{2,+}^*(t,z).\cos(\tau-z)\right] = 0$$

и требуя выполнения тождеств (11) и (17), мы приходим к соотношениям: $a_2(t) = u(t)(2+t^2), b_2(t) = u(t)(2-t^2)$ при всех $t \in L$ и $-4u(t)\tau\cos(\tau-t) + 2\pi i\left[(\tau^2+2)+(\tau^2-2)\right]k_2^*(t,\tau) = 0$ при всех $t \in L$, $\tau \in L$, $t \neq \tau$; отсюда и получаем $k_2^*(t,\tau) = \frac{\tau}{2\pi i}u(t)\cos(\tau-t)$ как функцию, принадлежащую избранному нами допустимому для нее классу (14)–(16) и удовлетворяющую тождеству (17). Таким образом, в данном примере СИ-оператор K_2 определяется формулой

$$(K_2\psi)(t) = u(t)\left\{(t^2+2)\psi(t) + \frac{1}{\pi i}\oint\limits_L\left[\frac{2-t^2}{\tau-t}+\frac{\tau}{2}\cos(\tau-t)\right]\psi(\tau)d\tau\right\},$$

а уравнение (8) принимает вид $8t^2u(t)\phi(t) = K_2[2t^2(e^t + t\sin t)],\ t \in L$ и имеет единственное решение

$$\phi(t) = e^t + t\sin t, \quad t \in L, \tag{22}$$

не зависящее от произвольной функции $u(t)$. Непосредственной проверкой убеждаемся (в результате вычисления конечного числа интегралов), что ни одно из слагаемых e^t и $t\sin t$ в отдельности не образует ни частного решения $\phi_*(t)$, ни собственной функции $\phi_{0,j}(t)$ исходного СИ-оператора K_1 вида (21), но зато $\phi_*(t) = e^t + t\sin t,\ t \in L$. Отсюда и заключаем, что исходное уравнение (21) с индексом $\omega_1 = -2$ безусловно разрешимо и имеет единственное решение вида (22). На этом решение примера 1 закончено.

Если же в исходном уравнении (1) положить

$$\phi(t) = (K_2\psi)(t), \quad t \in L, \tag{23}$$

где K_2 — полный СИ-оператор вида (7), то приходим к новому полному СИУ-2К вида

$$(K_1K_2\psi)(t) = a_{1,2}(t)\psi(t) + \oint\limits_L \left[\frac{1}{\pi i}\frac{b_{1,2}(t)}{\tau - t} + k_{1,2}(t,\tau)\right]\psi(\tau)d\tau = f(t), \quad t \in L, \quad (24)$$

с коэффициентами $a_{1,2}(t) = a_{2,1}(t)$ и $b_{1,2}(t) = b_{2,1}(t)$ того же вида (9) и с регулярной частью ядра

$$k_{1,2}(t,\tau) = a_1(t)k_2(t,\tau) + a_2(\tau)k_1(t,\tau) + \frac{b_1(t)}{\pi i}\frac{a_2(\tau) - a_2(t)}{\tau - t} +$$

$$+ \oint\limits_L \left[\frac{1}{\pi i}\frac{b_1(t)}{s - t} + k_1(t,s)\right]\left[\frac{-1}{\pi i}\frac{b_2(s)}{s - \tau} + k_2(s,\tau)\right]ds,$$

получающейся из $k_{2,1}(t,\tau)$ вида (10) взаимной перестановкой индексов "1" и "2". Если при этом коэффициенты СИ-оператора K_2 вида (7) выбирать из требования, чтобы выполнялось "основное правое регулярное тождество":

$$b_{1,2}(t) = 0, \quad t \in L, \quad (25)$$

то есть выбирать их по-прежнему в виде (12), то в уравнении (24) исчезает его сингулярная часть, другими словами, сингулярный интеграл с ядром Коши, понимаемый в смысле его главного значения. Если одновременно с этим регулярную часть $k_2(t,\tau)$ ядра СИ-оператора K_2 вида (7) выбирать в том же допустимом классе (3)–(7), которому принадлежит регулярная часть $k_1(t,\tau)$ ядра исходного уравнения (1), то есть выбирать в виде (13)–(16), а неизвестную функцию $k_2^*(t,\tau)$ выбирать из требования, чтобы выполнялось "основное правое сингулярное тождество":

$$k_{1,2}(t,\tau) = 0, \quad t \in L, \tau \in L, t \neq \tau, \quad (26)$$

то после вычисления (с помощью аппарата вычетов теории однозначных аналитических функций, например, [5, глава 5] конечного числа интегралов левой части уравнения (26) вспомогательная функция $k_2^*(t,\tau)$ вычисляется

1) однозначно и безусловно как решение неоднородного линейного алгебраического уравнения, если $m = 0$, $k_1(t,\tau) = k_1^*(t,\tau)$ и поэтому $k_2(t,\tau) = k_2^*(t,\tau)$;

2) однозначно при выполнении соответствующего условия однозначной разрешимости неоднородной СЛАУ, в которой число уравнений совпадает с числом $n = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_m$ входящих в нее вспомогательных неизвестных вида

$$\frac{\partial^l}{\partial z^l}k_{+,2}^*(z_j,\tau) = \lim_{z \to z_j}\frac{\partial^l}{\partial z^l}k_{+,2}^*(z,\tau), \quad 1 \leqslant l \leqslant \mu_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant m.$$

При найденных (однозначно!) значениях $a_2(t), b_2(t)$ и $k_2^*(t,\tau)$, удовлетворяющих требованиям (25) и (26), уравнение (24) превращается в линейное алгебраическое уравнение относительно новой искомой функции $\psi(t)$, $t \in L$. Если единственное решение $\psi^*(t) = f_1(t)/a_{1,2}(t)$, $t \in L$ этого уравнения подставить в обе части равенства (7), то по формуле (23) получается выражение

$$\tilde{\phi}(t) = (K_2\psi^*)(t) = K_2\left[\frac{1}{u(t)}\frac{f_1(t)}{a_1^2(t) - b_1^2(t)}\right], \quad t \in L \tag{27}$$

не зависящего от произвольной функции $u(t)$ частного решения исходного полного СИУ-2К вида (1). Заключительный этап алгоритма этого метода известен: после решения той же "проблемы распознавания", состоящего в проверке частного решения (27) и приведении его к виду (19), остается общее решение исходного уравнения (1) выписать снова в виде (20).

В этом — суть метода непосредственного обращения справа полных СИУ-2К указанного класса. Он применим только к тем уравнениям вида (1) с индексом $\omega_1 \geqslant 0$, коэффициенты которых имеют однозначные аналитические продолжения $a_{+,1}(z)$ и $b_{+,1}(z)$, принадлежащие допустимому классу $C^{(\infty)}(D_L^+) \cap H^{(\lambda)}(D_L^+ \cup L)$ и удовлетворяющие условию

$$a_{+,1}(z) + b_{+,1}(z) \neq 0 \text{ при всех } z \in (D_L^+ \cup L). \tag{28}$$

Этот метод также "внутренне защищен от ошибок": если его применять к уравнениям, для которых условие (28) не выполняется, то получаемая в результате вспомогательная функция $k_2^*(t,\tau)$ оказывается не принадлежащей допустимому для нее функциональному классу (14), так как условие (15) в таких случаях не выполняется.

Пример 2. Решить в замкнутой форме уравнение

$$(K_1\phi)(t) = (t+\alpha)\phi(t) + \frac{1}{\pi i}\oint_L \left(\frac{\beta - t}{\tau - t} + \frac{1}{2t}e^{t\tau}\right)\phi(\tau)d\tau = f_+(t), \quad t \in L, \tag{29}$$

где L — та же единичная окружность, что и в примере 1, α и β — постоянные, причем $\beta \neq -\alpha$, $\beta \neq 1+\alpha$, $\beta \neq 2+\alpha$ и $f_+(t)$ — значение на контуре L произвольной функции класса $C^{(\infty)}(z : |z| < 1) \cap H^{(\lambda)}(z : |z| \leqslant 1)$.

Решение. Так как $a_{+,1}(z) - b_{+,1}(z) = (z+\alpha) - (\beta - z) = 2z + \alpha - \beta = 0$ при $z = (\beta - \alpha)/2$, то при $|\beta - \alpha| < 2$ условие (2) нарушено; так как $a_{+,1}(z) + b_{+,1}(z) = (\alpha + \beta)/2 \neq 0$ при всех $z \in (D^+{}_L) = \{z : |z| < 1\}$, то $\omega_1 = 1$ при $|\beta - \alpha| < 2$ и $\omega_1 = 0$ при $|\beta - \alpha| > 2$. Следовательно, для решения в замкнутой форме уравнения (29) целесообразно применить метод непосредственного обращения справа полных СИУ-2К.

Полагая в уравнении (29)

$$\phi(t) = (K_2\psi)(t), \quad t \in L \tag{30}$$

и определяя СИ-оператор K_2 формулой

$$(K_2\psi)(t) = a_2(t)\psi(t) + \oint_L \left[\frac{1}{\pi i}\frac{b_2(t)}{\tau - t} + \frac{1}{t}\,k_2^*(t,\tau)\right]\psi(\tau)d\tau, \quad t \in L, \tag{31}$$

мы приходим к уравнению (24) с коэффициентами

$$a_{1,2}(t) = (t+\alpha)a_2(t) + b_2(t)(\beta - t), \quad b_{1,2}(t) = (\beta - t)a_2(t) + b_2(t)(t+\alpha)$$

и с регулярной частью ядра

$$k_{1,2}(t,\tau) = \frac{t+\alpha}{t}k_2^*(t,\tau) + \frac{1}{2\pi i}\frac{a_2(\tau)}{t}e^{t\tau} + \frac{\beta - t}{\pi i}\frac{a_2(\tau) - a_2(t)}{\tau - t} +$$
$$+\frac{1}{\pi i}\oint_L \left(\frac{\beta - t}{s - t} + \frac{1}{2t}e^{ts}\right)\left[\frac{-1}{\pi i}\frac{b_2(s)}{s - \tau} + \frac{1}{s}k_2^*(s,\tau)\right]ds.$$

Учитывая следующие результаты вычисления интегралов :

$$5) \quad \frac{t-\beta}{\pi i}\oint_L \frac{1}{\pi i}\frac{b_2(s)}{s-\tau}\frac{ds}{s-t} = \frac{t-\beta}{\pi i}\frac{b_2(\tau) - b_2(t)}{\tau - t};$$

$$6) \quad \frac{\beta - t}{\pi i}\oint_L \frac{1}{s}k_2^*(s,\tau)\frac{ds}{s-t} = \frac{\beta - t}{t}\left[k_2^*(t,\tau) - 2k_{+,2}^*(0,\tau)\right];$$

$$7) \quad \frac{-1}{2\pi i}\oint_L \frac{1}{\pi i}\frac{b_2(s)}{t}e^{ts}\frac{ds}{s-\tau} = \frac{-1}{2\pi i}\frac{b_2(\tau)}{t}e^{t\tau};$$

$$8) \quad \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{k_2^*(s,\tau)}{t}e^{st}\frac{ds}{s} = \frac{1}{t}\ \operatorname{res}_{\,z=0}\left[e^{zt}\frac{1}{z}\,k_{+,2}^*(z,\tau)\right] = \frac{1}{t}\,k_{+,2}^*(0,\tau)$$

и требуя выполнения тождеств (25) и (26), мы приходим к значениям коэффициентов $a_2(t) = u(t)(t+\alpha)$, $b_2(t) = u(t)(t-\beta)$ при всех $t \in L$ и к соотношению

$$\frac{\alpha+\beta}{t}\left[k_2^*(t,\tau) + \frac{u(\tau)}{2\pi i}e^{t\tau} + t\,\frac{\beta - t}{\pi i}\,\frac{u(\tau) - u(t)}{\tau - t}\right] +$$
$$+\frac{1 - 2(\beta - t)}{t}k_{+,2}^*(0,\tau) = 0, \quad t \in L, \ \tau \in L, \ t \neq \tau, \tag{32}$$

которое связывает значение вспомогательной искомой функции $k_{+,2}^*(t,\tau)$ со значением еще одной вспомогательной неизвестной $k_{+,2}^*(0,\tau)$. Так как для однозначного вычисления значений двух неизвестных

одного связывающего их соотношения (32) явно недостаточно, а неизвестная $k^*_{+,2}(0,\tau)$ является значением в точке $z = 0 \in D^+{}_L$ функции $k^*_{+,2}(z,\tau)$, то это и наводит на мысль использовать однозначные аналитические продолжения по переменной t с контура $L = \{t : |t| = 1\}$ в замкнутый круг $(D^+{}_L \cup L) = \{z : |z| \leqslant 1\}$ обеих частей равенства (32), умноженных предварительно на t. Выполнив это однозначное аналитическое продолжение, выписываем "продолженное правое сингулярное тождество":

$$k^*_{+,2}(z,\tau) + \frac{u(\tau)}{2\pi i}e^{z\tau} + z\,\frac{\beta - z}{\pi i}\,\frac{u(\tau) - u(z)}{\tau - z} + \frac{1 - 2(\beta - z)}{\alpha + \beta}k^*_{+,2}(0,\tau) = 0,$$

$$z \in (D^+{}_L \cup L) = \{z : |z| \leqslant 1\}, \quad \tau \in L = \{t : |t| = 1\}, \;\; t \neq \tau.$$

Переходя здесь к пределу при $z \to 0$, получаем единственное (так как $\beta \neq 1 + \alpha$) значение второй вспомогательной неизвестной:

$$k^*_{+,2}(0,\tau) = -\frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha - \beta}\,\frac{u(\tau)}{2\pi i}, \quad \tau \in L \tag{33}$$

Подставляя значение (33) второй вспомогательной неизвестной $k^*_{+,2}(0,\tau)$ в левую часть тождества (32), получаем единственное (так как $\beta \neq -\alpha$) значение вспомогательной функции

$$k^*_2(t,\tau) = t\frac{u(t)}{\pi i}\,\frac{\beta - t}{\tau - t} - \frac{u(\tau)}{2\pi i}\left[e^{\tau t} + 2t\frac{\beta - t}{\tau - t} + \frac{1 - 2(\beta - t)}{1 + \alpha - \beta}\right], \;\; t \in L,\, \tau \in L,\, t \neq \tau,$$

принадлежащее допустимому функциональному классу (14)–(16) и удовлетворяющее тождеству (26). Таким образом, СИ-оператор K_2 вида (31) в этом примере определяется формулой

$$(K_2\psi)(t) = u(t)(t + \alpha)\psi(t) -$$

$$-\oint_L \frac{u(\tau)}{\pi i}\left\{\frac{1}{2t}\left[e^{t\tau} + + \frac{1 - 2(\beta - t)}{1 + \alpha - \beta}\right] + \frac{\beta - t}{\tau - t}\right\}\psi(\tau)d\tau, \quad t \in L, \tag{34}$$

а уравнение (24) принимает вид:

$$u(t)(\alpha + \beta)(2t + \alpha - \beta)\,\psi(t) = f_+(t), \quad t \in L.$$

Если единственное решение $\psi(t)$ этого уравнения подставить в обе части равенства (31), то по формулам (30) и (34) получаем значение

$$\overline{\phi}(t) = \frac{t + \alpha}{\alpha + \beta}\frac{f_+(t)}{2t + \alpha - \beta} -$$

$$-\frac{(\alpha + \beta)^{-1}}{\pi i}\oint_L \left\{\frac{\beta - t}{\tau - t} + \frac{1}{2t}\left[e^{t\tau} + \frac{1 - 2(\beta - t)}{1 + \alpha - \beta}\right]\right\}\frac{f_+(\tau)}{2\tau + \alpha - \beta}d\tau,$$

не зависящее от произвольной функции $u(t)$. Вычисление входящих сюда интегралов приводит к следующему результату:

1) если $|\beta-\alpha|<2, \quad \beta\neq 1+\alpha$ и $\beta\neq -\alpha$, то

$$\overline{\phi}(t)=\frac{f_+(t)}{\alpha+\beta}+\frac{1}{\alpha+\beta}f_+\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)\left\{2\frac{\beta-t}{2t+\alpha-\beta}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2t}\left[\frac{1-2(\beta-t)}{1+\alpha-\beta}-e^{t(\beta-\alpha)/2}\right]\right\}, \quad t\in L;$$

2) если $|\beta-\alpha|>2, \quad \beta\neq 1+\alpha$ и $\beta\neq -\alpha$, то

$$\overline{\phi}(t)=\phi_*(t)=\frac{f_+(t)}{\alpha+\beta}, \quad t\in L. \tag{35}$$

"Проблема распознавания" в данном примере решается просто:

1) так как при $\beta\neq -\alpha$ имеем $(K_1\overline{\phi})(t)=f_+(t)$ при всех $t\in L$, то $\overline{\phi}(t)$ вида (35) и есть частное решение исходного неоднородного уравнения (29) при $|\beta-\alpha|>2, \quad \beta\neq 1+\alpha$ и $\beta\neq -\alpha$;

2) так как при $|\beta-\alpha|<2, \quad \beta\neq 1+\alpha$ и $\beta\neq -\alpha$ имеем $(K_1\phi_{0,1})(t)=0$ при всех $t\in L$, то

$$\phi_{0,1}(t)=2\frac{\beta-t}{2t+\alpha-\beta}+\frac{1}{2t}\left[\frac{1-2(\beta-t)}{1+\alpha-\beta}-e^{t(\beta-\alpha)/2}\right], \quad t\in L \tag{36}$$

является единственной отличной от тождественного нуля собственной функцией СИ-оператора K_1 вида (29) при указанных ограничениях на параметры α и β. Отсюда и заключаем, что если $|\beta-\alpha|\neq 2$, $\beta\neq 1+\alpha$ и $\beta\neq -\alpha$, то исходное полное СИУ-2К вида (29) разрешимо и его общее решение дается формулой

$$\left.\begin{array}{c}\phi(t)=\overline{\phi}(t), \quad t\in L, \ \text{если} \ |\beta-\alpha|>2;\\ \phi(t)=\overline{\phi}(t)+c_1\,\phi_{0,1}(t), \quad t\in L, \ \text{если} \ |\beta-\alpha|<2\end{array}\right\}, \tag{37}$$

где $\overline{\phi}(t)$ и $\phi_{0,1}(t)$ — функции вида (35) и (36) соответственно, а c_1 — произвольная постоянная. На этом решение примера 2 закончено.

Если же коэффициенты уравнения (1) таковы, что нарушены оба требования (2) и (28), так что описанные выше методы непосредственного обращения слева или справа полных СИУ-2К рассматриваемого типа к уравнению (1) неприменимы, то приходится выполнять одно техническое действие, так называемое "предварительное опосредование" уравнения (1). Это техническое действие заключается в переходе от такого исходного уравнения (1) к эквивалентному новому полному СИУ-2К того же указанного типа, к которому применим хотя бы один из методов непосредственного обращения слева или справа полных СИУ-2К рассматриваемого класса.

Суть этого технического действия состоит в следующем. Пусть коэффициенты исходного уравнения (1) удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} a_1(t) - b_1(t) &= \rho_1(t) \prod_{j=1}^{p} (t - z^-{}_j)^{\mu_j} = \rho_1(t) \prod_{j=1}^{m} (t - z^-{}_j), \\ a_1(t) + b_1(t) &= \sigma_1(t) \prod_{j=1}^{q} (t - z^+{}_j)^{\nu_j} = \sigma_1(t) \prod_{j=1}^{n} (t - z^+{}_j), \end{aligned} \tag{38}$$

где p и q, μ_j и ν_j, $m = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_p$ и $n = \nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_q$ — натуральные числа, $z^-{}_j$ (при $1 \leqslant j \leqslant p$) и $z^+{}_j$ (при $1 \leqslant j \leqslant q$) — известные точки области $D^+{}_L$, а $\rho_1(t)$ и $\sigma_1(t)$ — значения на контуре L функций $\rho_{+,1}(z)$ и $\sigma_{+,1}(z)$ допустимого класса $C^{(\infty)}(D^+{}_L) \cap H^{(\lambda)}(D^+{}_L \cup L)$, не обращающихся в нуль при всех $z \in (D^+{}_L \cup L)$.

Пусть для определенности $m \leqslant n$; тогда

$$a_1(t) + b_1(t) = \sigma_1(t) \prod_{j=1}^{m} (t - z^+{}_j) \prod_{j=m+1}^{n} (t - z^+{}_j); \tag{39}$$

очевидно, при $m = n$ последнее произведение равно единице. Применяя в этом случае к обеим частям исходного уравнения (1) характеристический и с нулевым индексом СИ-оператор M_3^0, определяемый формулой

$$(M_3^0 \phi)(t) = a_3(t)\phi(t) + \frac{b_3(t)}{\pi i} \oint_L \frac{\phi(\tau)}{\tau - t} d\tau, \quad t \in L, \tag{40}$$

в которой коэффициенты выбраны из соотношений

$$a_3(t) - b_3(t) = \rho_3(t) \prod_{j=1}^{m} (t - z^+{}_j) \quad \text{и} \quad a_3(t) + b_3(t) = \sigma_3(t) \prod_{j=1}^{m} (t - z^-{}_j) \ ,$$

где $\rho_3(t)$ и $\sigma_3(t)$ — значения на контуре L произвольных функций $\rho_{+,3}(z)$ и $\sigma_{+,3}(z)$ допустимого класса $C^{(\infty)}(D^+{}_L) \cap H^{(\lambda)}(D^+{}_L \cup L)$, не обращающихся в нуль при всех $z \in (D^+{}_L \cup L)$, мы приходим к новому полному СИУ-2К того же указанного класса

$$(M_3^0 K_1 \phi)(t) = a_{3,1}(t)\phi(t) + \oint_L \left[\frac{1}{\pi i} \frac{b_{3,1}(t)}{\tau - t} + k_{3,1}(t, \tau) \right] \phi(\tau) d\tau = (M_3^0 f_1)(t), \quad t \in L \tag{41}$$

с коэффициентами

$$a_{3,1}(t, \tau) = \prod_{j=1}^{m} (t - z^-{}_j) \prod_{j=1}^{m} (t - z^+{}_j) \frac{1}{2} \left\{ \rho_3(t)\rho_1(t) + \sigma_3(t)\sigma_1(t) \prod_{j=m+1}^{n} (t - z^+{}_j) \right\},$$

$$b_{3,1}(t, \tau) = \prod_{j=1}^{m} (t - z^-{}_j) \prod_{j=1}^{m} (t - z^+{}_j) \frac{1}{2} \left\{ -\rho_3(t)\rho_1(t) + \sigma_3(t)\sigma_1(t) \prod_{j=m+1}^{n} (t - z^+{}_j) \right\}$$

и с регулярной частью ядра

$$k_{3,1}(t,\tau) = \sigma_3(t)k_1(t,\tau)\prod_{j=1}^{m}(t-z^-{}_j) + \frac{1}{2\pi i}\left[\sigma_3(t)\prod_{j=1}^{m}(t-z^-{}_j) - \rho_3(t)\times\right.$$

$$\left.\times\prod_{j=1}^{m}(t-z^+{}_j)\right]\frac{1}{\tau-t}\left[\rho_1(\tau)\prod_{j=1}^{m}(\tau-z^-{}_j) - \rho_1(t)\prod_{j=1}^{m}(t-z^-{}_j)\right].$$

Поэтому, разделив обе части уравнения (41) на произведение

$$\prod_{j=1}^{m}(t-z^-{}_j)\prod_{j=1}^{m}(t-z^+{}_j),$$

мы и приходим к тому полному СИУ-2К указанного класса

$$(K_4\phi)(t) \equiv a_4(t)\phi(t) + \oint_L\left[\frac{1}{\pi i}\frac{b_4(t)}{\tau-t} + k_4(t,\tau)\right]\phi(\tau)d\tau = f_4(t), \quad t\in L, \tag{42}$$

коэффициенты которого

$$a_4(t) = \frac{1}{2}\left\{\rho_3(t)\rho_1(t) + \sigma_3(t)\sigma_1(t)\prod_{j=m+1}^{n}(t-z^+{}_j)\right\},$$

$$b_4(t) = \frac{1}{2}\left\{-\rho_3(t)\rho_1(t) + \sigma_3(t)\sigma_1(t)\prod_{j=m+1}^{n}(t-z^+{}_j)\right\}$$

удовлетворяют при $m<n$ условию (2), а при $m=n$ — условиям (2) и (28). Следовательно, уравнение (42) можно решить в замкнутой форме методом непосредственного обращения слева (если $m<n$) или справа (если $m=n$) полных СИУ-2К указанного класса.

Если же в представлении (38) имеем $m>n$, так что

$$a_1(t) - b_1(t) = \rho_1(t)\prod_{j=1}^{n}(t-z^-{}_j)\prod_{j=n+1}^{m}(t-z^-{}_j), \quad t\in L, \tag{43}$$

то к обеим частям (1) применяем характеристический и с нулевым индексом СИ-оператор M_5^0, определяемый формулой

$$(M_5^0\phi)(t) = a_5(t)\phi(t) + \frac{b_5(t)}{\pi i}\oint_L\frac{\phi(\tau)}{\tau-t}d\tau, \quad t\in L, \tag{44}$$

в которой коэффициенты выбраны из соотношений

$$a_5(t) - b_5(t) = \rho_5(t)\prod_{j=1}^{n}(t-z^+{}_j) \quad \text{и} \quad a_5(t) + b_5(t) = \sigma_5(t)\prod_{j=1}^{n}(t-z^-{}_j),$$

где $\rho_5(t)$ и $\sigma_5(t)$ — значения на контуре L произвольных функций $\rho_{+,5}(z)$ и $\sigma_{+,5}(z)$ допустимого класса $C^{(\infty)}(D^+_L)\cap H^{(\lambda)}(D^+_L\cup L)$, не обращающихся в нуль при всех $z\in(D^+_L\cup L)$. В результате мы и приходим (указанным выше способом) к тому новому полному СИУ-2К рассматриваемого класса

$$(K_6\phi)(t)\equiv a_6(t)\phi(t)+\oint\limits_L\left[\frac{1}{\pi i}\,\frac{b_6(t)}{\tau-t}+k_6(t,\tau)\right]\phi(\tau)d\tau=f_6(t),\quad t\in L,\qquad(45)$$

коэффициенты которого

$$a_6(t)=\frac{1}{2}\left\{\sigma_5(t)\sigma_1(t)+\rho_5(t)\rho_1(t)\prod_{j=n+1}^{m}(t-z^-_j)\right\},$$

$$b_6(t)=\frac{1}{2}\left\{\sigma_5(t)\sigma_1(t)-\rho_5(t)\rho_1(t)\prod_{j=n+1}^{m}(t-z^-_j)\right\}$$

удовлетворяют условию (28). Следовательно, уравнение (45) можно решить в замкнутой форме методом непосредственного обращения справа полных СИУ-2К указанного класса.

В заключение отметим следующее:

1) поскольку в представлениях (39) и (43) левое и правое произведения можно образовывать произвольно, меняя взаимно местами их скобки с различными биномами, то таких операторов M^0_3 вида (40) и M^0_5 вида (44) существует достаточно много;

2) эквивалентность уравнений (1) и (42) или, что то же самое, уравнений (1) и (41) следует из того, что характеристический и с нулевым индексом СИ-оператор M^0_3 вида (40) не имеет [1, с. 180] собственных функций, отличных от тождественного нуля;

3) эквивалентность уравнений (1) и (45) устанавливается аналогично;

4) результат решения в замкнутой форме исходного уравнения (1) методами его опосредованного обращения слева или справа не зависит от того, с помощью какого именно СИ-оператора M^0_3 (при $\omega_1\leqslant 0$) или СИ-оператора M^0_5 (при $\omega_1>0$) осуществлено "предварительное опосредование" исходного уравнения (1).

В качестве *примера 3* приведем результат предварительного опосредования уравнения

$$(K\phi)(t)=(4t^3-5t^2+\frac{t}{2}-2)\phi(t)+\oint\limits_L\left[\frac{1}{\pi i}\,\frac{-4t^3+7t^2-\frac{t}{2}-1}{\tau-t}+\right.$$

$$\left.+\cos(4t\tau^2-1)\right]\phi(\tau)d(\tau)=At^2+Bt+C,\quad t\in L,\qquad(46)$$

где L — та же единичная окружность, что и в примерах 1 и 2, и A, B, C — постоянные, с помощью характеристического СИ-оператора, определяемого формулой

$$(M^0\psi)(t) = 2t\psi(t) - \frac{1}{\pi i}\oint\limits_L \frac{\psi(\tau)}{\tau - t}d(\tau), \quad t \in L.$$

Получающееся в результате уравнение

$$(M^0K\phi)(t) = (2t^2 - \frac{3}{2}t - 1)\phi(t) + \oint\limits_L \left[\frac{-2t^2 + \frac{5}{2}t - 1}{\pi i(\tau - t)} + \frac{\cos(4t\tau^2 - 1)}{2t + 1} - \right.$$

$$\left. - \frac{8(\tau^2 + t\tau + t^2) - 12(t + \tau) + 6}{\pi i(4t^2 - 1)}\right]\phi(\tau)d\tau = \frac{At^2 + Bt + C}{2t + 1}, \quad t \in L$$

имеет тот же индекс $\omega = 2$, что и уравнение (46), но уже решается в замкнутой форме методом непосредственного обращения справа полных СИУ-2К указанного класса. Именно так и получено общее решение рассматриваемого здесь уравнения (46):

$$\phi(t) = \phi_*(t) + c_1\,\phi_{0,1}(t) + c_2\,\phi_{0,2}(t), \quad t \in L, \tag{47}$$

где

$$\phi_*(t) = \frac{1}{2t^2 - 5t - 3}\left[At^2 + Bt + C - \frac{A - 2B + 4C}{4 + \pi i\,\cos(3/2)}\,G(t)\right] \tag{48}$$

есть частное решение неоднородного уравнения (46), c_1 и c_2 — произвольные постоянные, а

$$\phi_{0,1}(t) = \frac{1}{2t^2 - 5t - 3}\left[\frac{P_3(t)}{(2t - 1)^2} - \pi i\,t\,\sin(t - 1) + \frac{2 + \pi i\,\sin(3/2)}{4 + \pi i\,\cos(3/2)}G(t)\right] \tag{49}$$

и

$$\phi_{0,2}(t) = \frac{1}{2t^2 - 5t - 3}\left\{\frac{P_3(t)}{(2t - 1)^2} - \pi i\,t\left[\frac{1}{2}\sin(t - 1) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{-2 + \pi i\,(\sin(3/2) + \cos(3/2))}{4 + \pi i\,\cos(3/2)}G(t)\right]\right\} \tag{50}$$

— линейно независимые на контуре L собственные функции исходного СИ-оператора K вида (46) с индексом $\omega = 2$, причем

$$P_3(t) = 4t^3 - 7t^2 + \frac{11}{2}t + 1 \quad \text{и} \quad G(t) = \frac{\pi i}{4}\cos(t - 1) + \frac{P_3(t)}{4t - 2}.$$

В отличие от уравнения (21), легко решаемого и другими методами (в [3] изложено пять способов решения этого полного СИУ-2К с вырожденной регулярной частью ядра, приводящих к результату (22) данной работы), уравнения (29) и (46) являются примерами полных

СИУ-2К, не решаемых в замкнутой форме (то есть точно и в результате вычисления *конечного* числа интегралов от известных и заданных функций) никакими "старыми", "классическими" методами, так как:

1) регулярные части ядер этих уравнений не являются вырожденными функциями;

2) ядра этих уравнений не являются автоморфными функциями и не обладают никакими групповыми свойствами.

Полученные здесь результаты (35)–(37) и (47)–(50) свидетельствуют о том, что изложенные в данной работе методы являются эффективным средством исследования и решения полных СИУ-2К указанного класса.

Литература

[1] Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.

[2] Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1962. 600 с.

[3] Бабурин Ю.С. Методы сингуляризации полных сингулярных интегральных уравнений второго рода с ядром Коши. Куйбышев: Изд-во КГУ, 1987. Деп. в ВИНИТИ 25.02.87. №1333-В87. 44 с.

[4] Бабурин Ю.С. Методы решения в замкнутой форме полных сингулярных интегральных уравнений второго рода с ядром Гильберта, с промежутком интегрирования $[0, 2\pi]$ и с аналитически продолжаемыми заданными функциями. Куйбышев: Изд-во КГУ, 1989. Деп. в ВИНИТИ 12.07.89. №4638-В89. 195 с.

[5] Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. М.: Наука, 1970. 304 с.

INVERSION METHODS FOR SINGULAR INTEGRAL EQUATIONS[3]

© 2003 Y.S. Baburin[4]

In the paper inversion methods for complete singular integral equation of the second kind with Caushy's kernel and closed contour of integration are given.

Поступила в редакцию 23/*IV*/2003;
в окончательном варианте — 8/*V*/2003.

[3] Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. Y.N. Radaev.

[4] Baburin Yuriy Stepanovich, Dept. of High Mathematics and Informatics, Samara State University, Samara, 443011, Russia.