

ФИЗИКА

УДК 535.42

ВРАЩАЮЩИЕСЯ СВЕТОВЫЕ ПОЛЯ
И СИНГУЛЯРНАЯ ОПТИКА¹© 2002 Е.Г.Абрамочкин² В.Г.Волостников³

Теоретически и экспериментально исследованы лазерные пучки, сохраняющие заданную структуру интенсивности при фокусировке и распространении. Найдено семейство лазерных пучков, структурно устойчивых с точностью до масштаба и вращения, которые названы спиральными, свойства которых представляют и практический интерес для лазерных технологий, медицины и микробиологии. Синтезирован класс структурно устойчивых пучков, распределение интенсивности которых имеет форму произвольной кривой. Результаты работы показывают принципиальную возможность создания лазеров, непосредственным результатом генерации которых без дополнительной нестандартной оптики будут пучки с заданными свойствами.

Введение

Термин "дислокация волнового фронта", ныне уже достаточно распространенный, появился в работе Дж.Ф. Ная и М. Берри [1], где было обращено внимание на принципиальное различие между нулями комплексной амплитуды волнового поля в одномерном и двумерном случаях. Смысл этого различия состоит в следующем. Если для одномерного поля геометрическое множество нулей вещественной и мнимой частей комплексной амплитуды поля — это набор точек, то для двумерного поля нули вещественной и мнимой частей — это линии. В связи с этим поведение изолированных нулей амплитуды становится различным при малых изменениях (шевелениях) поля: в одномерном случае нулевые точки вещественной и мнимой частей легко "теряют" друг друга и нуль амплитуды пропадает; в двумерном поле нулевые линии вещественной и мнимой частей деформируются, но точки их пересечения, т. е. изолированные нули амплитуды, остаются устойчивыми. Фаза поля не определена в нулях его амплитуды, имеет в окрестности каждого нуля винтовую структуру, а циркуляция градиента фазы вокруг них кратна 2π . Такие изолированные точки получили название дислокаций волнового фронта, или фазовых сингулярностей. Знак дислокации волнового фронта определяется знаком фазового набега при обходе вокруг нее.

¹ Представлена доктором физико-математических наук профессором Ю.Н. Радаевым.

² Абрамочкин Евгений Григорьевич (ega@fian.smr.ru), кафедра дифференциальных уравнений Самарского государственного университета, 443011, Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

³ Волостников Владимир Геннадиевич (coherent@fian.smr.ru), зав. лабораторией когерентной оптики Самарского филиала Физического института им. П.Н. Лебедева РАН, 443011, Самара, ул. Ново-Садовая, 221.

Из отечественных авторов внимание этим оптическим объектам было уделено Б.Я. Зельдовичем с соавторами [2, 3]. В их работах изучались плотность и знак дислокаций случайного светового поля (спекл-поля) и, в частности, было показано, что в спекл-поле количество дислокаций обоих знаков примерно одинаково, а плотность дислокаций составляет одну дислокацию на спекл (т. е. характерный средний размер неоднородности поля).

Исследования световых полей с фазовыми сингулярностями проводятся научной группой во главе с М.С. Соскиным [4, 5]. Ими исследованы топологические свойства таких полей [6], способы их синтеза с помощью специфических голограмм, а также вопросы нелинейной оптики полей с дислокациями волнового фронта. Из работ по этой тематике следует отметить [7–14]. В целом, в настоящее время направление исследований таких полей принято называть сингулярной оптикой. По этой тематике были организованы две международные конференции [15, 16].

Исходно дислокации волнового фронта были введены и рассмотрены из геометрических соображений. Иной аспект выявился в работах [17, 18], где исследовалась связь между энергетическими и структурными свойствами двумерного волнового поля в зоне Френеля. Известно, что волновое поле определяется либо своей комплексной амплитудой, либо интенсивностью и фазой. В силу специфики светового диапазона частот прямому измерению поддается только интенсивность. В связи с этим в [17, 18] решалась задача: сколько и каких дополнительных измерений интенсивности надо сделать, чтобы получить полную информацию о поле. Так как поле меняется при распространении, естественной постановкой задачи является его восстановление по интенсивности и производной интенсивности вдоль направления распространения. Сравнительный анализ этой задачи для двумерного и одномерного полей показал радикальное различие этих двух случаев. Оказалось, что для двумерного светового поля задача сводится к восстановлению векторного поля потока световой энергии по его дивергенции и ротору (известная задача Гельмгольца [19]). Таким образом, поле потока световой энергии имеет, в общем случае, вихревой характер, при этом наиболее ярко вихревая природа потока проявляется в окрестности дислокаций волнового фронта (или же нулей комплексной амплитуды). Характерно, что ротор вектора потока световой энергии, подобно самой энергии поля, подчиняется закону сохранения: интеграл от проекции ротора на направление распространения равен нулю в любой плоскости в зоне Френеля. В [17, 18] также показано, что вихревую составляющую не удастся найти из измерений интенсивности и ее производной, и, соответственно, восстановить исходное поле. На качественном уровне это, видимо, можно объяснить следующим образом. Если в одномерном случае ненулевой градиент фазы всегда вызывает локальные изменения интенсивности при распространении (энергия уходит либо вправо, либо влево), то в двумерном случае из-за вихревой составляющей возможна циркуляция энергии, и в виде локального изменения интенсивности это может и не проявиться. В пользу такого рассмотрения говорит и тот факт, что двумерное поле без вихревой составляющей, например поле радиально-симметричного вида, по измерениям интенсивности восстанавливается. Изменение таких полей при распространении можно ассоциировать в некотором смысле с деформациями растяжения-сжатия (без кручения).

Известными световыми полями, изменение интенсивности которых при распространении соответствует чистым деформациям растяжения-сжатия, являются пучки Эрмита–Гаусса и Лагерра–Гаусса. Принимая во внимание вихревую

компоненту вектора потока световой энергии, можно расширить понятие структурной устойчивости и исследовать вопрос существования световых полей, сохраняющих форму интенсивности при распространении с точностью до масштаба и вращения. Эта задача ставится и исследуется в разделе 1. Там же найден и полностью описан класс таких пучков, названных спиральными. Раздел 2 посвящен теоретическому и экспериментальному исследованию возможностей синтеза структурно устойчивых вращающихся полей с заданным распределением интенсивности. В этом же разделе показано применение полученных результатов по оптике спиральных пучков к задаче синтеза фазовых элементов, фокусирующих излучение в некоторую плоскую кривую.

1. Спиральные лазерные пучки

1.1. Световые поля, вращающиеся при распространении

Пусть когерентное световое поле с длиной волны λ задано своей комплексной амплитудой $F(x, y, l)$. Будем рассматривать задачу поиска структурно устойчивых световых полей в параксиальном приближении, т. е. в предположении, что при распространении изменение поля $F(x, y, l)$ вдоль x, y значительно слабее, чем вдоль l . В этом случае переменная l называется переменной распространения, и эволюция поля описывается параболическим уравнением:⁴

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial F}{\partial l} = 0, \quad (1.1)$$

где $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число. Например, для гелий-неонового лазера $\lambda = 0,63$ мкм и, следовательно, $k \sim 10^7$ м⁻¹.

Известно [20, 21], что фундаментальное решение уравнения (1.1) есть

$$G(x, y, l) = \frac{k}{2\pi il} \exp\left(\frac{ik}{2l}(x^2 + y^2)\right),$$

и, таким образом, решение параболического уравнения с начальным условием $F(x, y, 0) = F_0(x, y)$ имеет вид

$$F(x, y, l) = \frac{k}{2\pi il} \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(\frac{ik}{2l}[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]\right) F_0(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (1.2)$$

Интеграл в правой части называется преобразованием Френеля от функции $F_0(\xi, \eta)$. Обратное к преобразованию (1.2) преобразование также является френелевским:

$$F_0(\xi, \eta) = -\frac{k}{2\pi il} \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-\frac{ik}{2l}[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]\right) F(x, y, l) dx dy.$$

Если использовать интегральный оператор Френеля, то равенство (1.2) примет вид: $F(x, y, l) = \mathbf{FR}_l[F_0(\xi, \eta)]$, а обратное преобразование примет вид: $F_0(\xi, \eta) = \mathbf{FR}_{-l}[F(x, y, l)]$. Обе формулы являются частными случаями более общего равенства, связывающего комплекснозначные распределения светового поля F в плоскостях l_1 и l_2 :

$$F(x, y, l_2) = \mathbf{FR}_{l_2-l_1}[F(\xi, \eta, l_1)]. \quad (1.3)$$

⁴ Это название не соответствует математической классификации уравнений в частных производных второго порядка, но является устоявшимся в оптике [20].

Для функций $F_0(\xi, \eta) \in L_2(\mathbb{R}^2)$ равенство Парсевалия

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |F(x, y, l)|^2 dx dy = \iint_{\mathbb{R}^2} |F_0(\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta$$

выражает закон сохранения энергии световых полей: полная энергия светового поля постоянна и не зависит от выбора плоскости l .

В дальнейшем будет использоваться следующая терминология: $I(x, y, l) = F(x, y, l)\bar{F}(x, y, l)$ — интенсивность, $\varphi(x, y, l) = \arg F(x, y, l)$ — фаза функции F . (Здесь и далее черта сверху означает комплексное сопряжение.) Как следствие, представление $F(x, y, l)$ через интенсивность и фазу имеет вид:

$$F(x, y, l) = \sqrt{I(x, y, l)} \exp(i\varphi(x, y, l)).$$

Условие структурной устойчивости интенсивности светового поля, вращающегося при распространении, может быть задано следующим образом:

$$I(x, y, l) = D(l)I_0\left(\frac{x \cos \theta(l) - y \sin \theta(l)}{d(l)}, \frac{x \sin \theta(l) + y \cos \theta(l)}{d(l)}\right), \quad (1.4)$$

где $\theta(l)$ — зависимость угла поворота распределения интенсивности при распространении поля $F(x, y, l)$, $d(l) > 0$ — масштабное изменение интенсивности. Определим вещественные переменные X, Y равенством

$$X + iY = \frac{(x + iy) e^{i\theta(l)}}{d(l)}.$$

Использование переменных (X, Y, l) вместо (x, y, l) позволяет записать условие структурной устойчивости интенсивности в наиболее компактном виде: функция $I_0(X, Y)$ не зависит от l . Применение закона сохранения энергии дает возможность выразить $D(l)$ через $d(l)$:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} I(x, y, l) dx dy = D(l)d^2(l) \iint_{\mathbb{R}^2} I_0(X, Y) dX dY = \text{const.}$$

Следовательно, $D(l) = 1/d^2(l)$.

Таким образом, задача поиска структурно устойчивых световых полей $F(x, y, l)$, интенсивность которых при распространении может только вращаться или изменяться в масштабе, требует также нахождения функций $d(l)$ и $\theta(l)$, характеризующих поведение $I(x, y, l)$ при изменении l .

Отправной точкой при решении поставленной задачи будет вещественная форма записи уравнения (1.1). В терминах интенсивности $I(x, y, l)$ и фазы $\varphi(x, y, l)$ это уравнение эквивалентно системе:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(I \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(I \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + k \frac{\partial I}{\partial l} = 0, \\ 2I \left(\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial y^2} \right) - \left(\frac{\partial I}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial I}{\partial y} \right)^2 - 4I^2 \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + 2k \frac{\partial \varphi}{\partial l} \right) = 0. \end{cases} \quad (1.5)$$

Подставляя выражение для интенсивности (1.4) в первое уравнение этой системы, перепишем его в переменных X, Y, l :

$$\nabla(I_0 \nabla \left[\varphi - \frac{1}{2} k d(l) d'(l) (X^2 + Y^2) \right]) + k \theta'(l) d^2(l) \left(X \frac{\partial I_0}{\partial Y} - Y \frac{\partial I_0}{\partial X} \right) = 0,$$

где $\nabla = (\partial/\partial X, \partial/\partial Y)$. Если определить функцию $\varphi_0(X, Y, l)$ равенством

$$\varphi(x, y, l) = \frac{1}{2}k d(l)d'(l)(X^2 + Y^2) + \varphi_0(X, Y, l),$$

то структурно устойчивое световое поле $F(x, y, l)$ примет вид

$$F(x, y, l) = \frac{1}{d(l)} \sqrt{I_0(X, Y)} \exp\left(\frac{1}{2}ik d(l) d'(l)(X^2 + Y^2) + i\varphi_0(X, Y, l)\right), \quad (1.6)$$

а система (1.5) в переменных X, Y, l и функциях I_0, φ_0 будет следующей:

$$\begin{cases} \nabla(I_0 \nabla \varphi_0) + kd^2(l)\theta'(l)\left(X \frac{\partial I_0}{\partial Y} - Y \frac{\partial I_0}{\partial X}\right) = 0, \\ |\nabla \varphi_0|^2 + k^2 d^3(l) d''(l)(X^2 + Y^2) + 2kd^2(l) \frac{\partial \varphi_0}{\partial l} + \\ + 2kd^2(l)\theta'(l)\left(X \frac{\partial \varphi_0}{\partial Y} - Y \frac{\partial \varphi_0}{\partial X}\right) - \frac{1}{2I_0} \left(\nabla^2 I_0 - \frac{|\nabla I_0|^2}{2I_0}\right) = 0. \end{cases} \quad (1.7)$$

То обстоятельство, что фаза φ_0 , в отличие от интенсивности I_0 , зависит от всех трех переменных X, Y, l , не позволяет упростить нелинейную систему (1.7) и превращает поиск ее решений в чрезвычайно трудную задачу. Однако, если использовать дополнительное предположение об асимптотическом поведении интенсивности при больших $x^2 + y^2$, то применение комплексного анализа (а именно тех результатов, которые связывают свойства функций со свойствами их Фурье-преобразований) позволяет довести решение задачи до конкретных аналитических выражений.

1.2. Порядок роста и структурный вид решений

Для определения вида решений существенно следующее утверждение. Пусть $F(x, y, l)$ — решение параболического уравнения (1.1), структурно устойчивое в смысле (1.4). Пусть для всех $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ интенсивность на плоскости $l = 0$ удовлетворяет неравенству

$$I(x, y, 0) \leq C \exp(-A(|x|^\alpha + |y|^\alpha)) \quad (1.8)$$

при некоторых $A > 0, C > 0, \alpha \geq 2$. Тогда аналитическое продолжение по переменным x, y функции $F(x, y, l)$ есть целая функция второго порядка роста⁵ и $\alpha = 2$. В частности, не существует структурно устойчивых световых полей, интенсивность которых убывает быстрее гауссовой функции.

Для доказательства перепишем интегральное преобразование Френеля (1.3) следующим образом:

$$\begin{aligned} F(x, y, l_2) &= \frac{k}{2\pi i(l_2 - l_1)} \exp\left(\frac{ik(x^2 + y^2)}{2(l_2 - l_1)}\right) \times \\ &\times \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-\frac{ik(x\xi + y\eta)}{l_2 - l_1}\right) \exp\left(\frac{ik(\xi^2 + \eta^2)}{2(l_2 - l_1)}\right) F(\xi, \eta, l_1) d\xi d\eta. \end{aligned}$$

⁵ Порядок роста ρ_f целой аналитической функции $f(z, w)$ определяется равенством [22, 23]

$$\rho_f = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln \max_{|z|=|w|=R} |f(z, w)|}{\ln R}.$$

Как следствие, для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие положительные константы C_0 и A_0 , что для всех комплексных z, w будет выполняться неравенство $|f(z, w)| < C_0 \exp(A_0(|z|^{\rho_f + \varepsilon} + |w|^{\rho_f + \varepsilon}))$.

Это позволяет рассматривать функции $F(x, y, l_1)$, $F(x, y, l_2)$ для любых l_1, l_2 как исходное поле и его преобразование Фурье с некоторым чисто фазовым множителем и наоборот. Как показано в [24], если $f(z, w)$ — целая функция двух комплексных переменных, удовлетворяющая при некоторых $C > 0$, $A > 0$, $\alpha > 0$ неравенству

$$|f(x, y)| \leq C \exp(-A(|x|^\alpha + |y|^\alpha)) \quad (1.9)$$

для всех $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, то $\rho_f \geq \alpha$.

С другой стороны [25], если $f(x, y)$ — квадратично-интегрируемая функция, которая при некоторых $C > 0$, $A > 0$, $\alpha > 1$ удовлетворяет неравенству (1.9), то ее Фурье-преобразование

$$F(x, y) = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-i(x\xi + y\eta)} f(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

продолжается до целой функции $F(z, w)$ двух комплексных переменных z, w , и порядок роста этой функции не превышает $\alpha/(\alpha - 1)$.

Таким образом, условие структурной устойчивости решения $F(x, y, l)$ параболического уравнения приводит к тому, что порядок роста $F(x, y, l)$ должен одновременно удовлетворять условиям $\alpha \leq \rho_F \leq \max(2, \alpha/(\alpha - 1))$. Поскольку $\alpha \geq 2$, то $\alpha/(\alpha - 1) \leq 2$, и поле $F(x, y, l)$ есть функция второго порядка роста. Строгое неравенство $\alpha > 2$ приводит к противоречию $2 < \rho_F \leq 2$ и, таким образом, запрещает существование структурно устойчивых решений параболического уравнения, интенсивность которых убывает быстрее гауссовой функции.

Следует отметить, что вопрос существования структурно устойчивых полей, интенсивность которых убывает медленнее гауссовой функции $e^{-A(x^2 + y^2)}$, остается открытым⁶ и все дальнейшее изложение будет посвящено структурно устойчивым решениям параболического уравнения, которые описываются целыми функциями второго порядка роста.

Можно показать [27, 28], что если $F(x, y, l)$ — решение параболического уравнения (1.1), обладающее структурной устойчивостью и удовлетворяющее неравенству (1.8), то в представлении (1.6) переменные X, Y и l разделяются, и фаза $\varphi_0(X, Y, l)$ принимает вид

$$\varphi_0(X, Y, l) = \varphi_0(X, Y, 0) + \gamma(l), \quad (1.10)$$

где $\gamma(l)$ — некоторая функция.

Таким образом, экспоненциальное убывание интенсивности на бесконечности позволяет выявить структуру фазы $\varphi_0(X, Y, l)$ и конкретизировать вид представления (1.6):

$$F(x, y, l) = \frac{1}{d(l)} F_0(X, Y) \exp\left(\frac{1}{2} ikd(l) d'(l) (X^2 + Y^2) + i\gamma(l)\right), \quad (1.11)$$

где $F_0(X, Y) = \sqrt{I_0(X, Y)} \exp(i\varphi_0(X, Y, 0))$ — целая функция второго порядка роста. Тем самым структурная устойчивость интенсивности (1.4) влечет за собой структурную устойчивость фазы с точностью до дефокусировки.

⁶ Более точно: не существует структурно устойчивых полей с порядком роста $\rho_F \leq 1$, поскольку преобразование Фурье таких полей имеет особые точки и, следовательно, не является целой аналитической функцией [26]. Таким образом, неисследованным остается интервал $\rho_F \in (1, 2)$.

1.3. Основные уравнения и параметры решений

В данном разделе будут найдены функции масштабирования $d(l)$, вращения $\theta(l)$ и фазового набега $\gamma(l)$, а также намечен путь для нахождения функции $F_0(X, Y)$, которая играет определяющую роль в представлении (1.11) структурно устойчивых решений параболического уравнения [27].

Использование равенства (1.10) в уравнениях (1.7) позволяет найти зависимости d , θ , γ от l . Легко показать, что эти три функции удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$d^3(l) d''(l) = \text{const}, \quad d^2(l) \theta'(l) = \text{const}, \quad d^2(l) \gamma'(l) = \text{const}.$$

Общее решение этой системы таково:

$$d(l) = d_0 \sqrt{1 + \frac{4(l-l_0)^2}{k^2 \rho^4}},$$

$$\theta(l) = \theta_0 \operatorname{arctg}\left(\frac{2(l-l_0)}{k\rho^2}\right) + \theta_1, \quad \gamma(l) = -\gamma_0 \operatorname{arctg}\left(\frac{2(l-l_0)}{k\rho^2}\right) + \gamma_1,$$

где d_0 , θ_0 , θ_1 , γ_0 , γ_1 , l_0 , ρ — произвольные константы. Не изменяя общности, можно считать, что $d_0 = 1$, $l_0 = \theta_1 = \gamma_1 = 0$. Тогда представление (1.11) примет вид

$$F(x, y, l) = \frac{1}{|\sigma|} F_0(X, Y) \exp\left(\frac{2il}{k\rho^2}(X^2 + Y^2) - i\gamma_0 \arg \sigma\right), \quad (1.12)$$

где $X + iY = (x + iy) \exp(i\theta_0 \arg \sigma) / \rho |\sigma|$ и $\sigma = 1 + 2il/k\rho^2$ — комплексный параметр, введенный для более компактной формы записи. Подставляя (1.12) в уравнение (1.1), получим уравнение для функции $F_0(X, Y)$:

$$\nabla^2 F_0 + 4i\theta_0 \left(X \frac{\partial F_0}{\partial Y} - Y \frac{\partial F_0}{\partial X} \right) - 4F_0(X^2 + Y^2 - \gamma_0) = 0. \quad (1.13)$$

При $\theta_0 = 0$ данное уравнение является стационарным уравнением Шредингера для гармонического осциллятора, и его решения хорошо известны [29, 30]. Это функции Эрмита—Гаусса $F_0(X, Y) = \mathcal{H}_{n,m}(X, Y)$, $\gamma_0 = n + m + 1$ и функции Лагерра—Гаусса $F_0(X, Y) = \mathcal{L}_{n,\pm m}(X, Y)$, $\gamma_0 = 2n + m + 1$. Здесь

$$\mathcal{H}_{n,m}(X, Y) \stackrel{\text{def}}{=} e^{-X^2 - Y^2} H_n(\sqrt{2}X) H_m(\sqrt{2}Y) \quad (n, m = 0, 1, \dots),$$

$$\mathcal{L}_{n,\pm m}(X, Y) \stackrel{\text{def}}{=} e^{-X^2 - Y^2} (X \pm iY)^m L_n^m(2X^2 + 2Y^2) \quad (n, m = 0, 1, \dots)$$

и

$$H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n} (e^{-t^2}), \quad L_n^m(t) = \frac{1}{n!} t^{-m} e^t \frac{d^n}{dt^n} (t^{n+m} e^{-t})$$

— полиномы Эрмита и Лагерра соответственно.

Будем искать решения уравнения (1.13) в виде разложения

$$F_0(X, Y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{nm} \mathcal{L}_{n,m}(X, Y), \quad (1.14)$$

которое всегда возможно благодаря неравенству (1.8) и полноте системы функций $\{\mathcal{L}_{n,m}(X, Y), n, \pm m = 0, 1, \dots\}$ в пространстве $L_2(\mathbb{R}^2)$. Подставляя (1.14) в уравнение (1.13), получим тождество

$$\sum_{n,m} c_{nm} \mathcal{L}_{n,m}(X, Y) (2n + |m| + \theta_0 m - \gamma_0 + 1) = 0,$$

или, в силу полноты системы функций Лагерра—Гаусса, бесконечный набор условий на коэффициенты c_{nm} и числа n, m :

$$c_{nm}(2n + |m| + \theta_0 m - \gamma_0 + 1) = 0.$$

Если зафиксировать некоторую пару (n_0, m_0) , то проблема поиска $F_0(X, Y)$ сводится к определению целых чисел n, m из уравнения

$$2n + |m| + \theta_0 m = 2n_0 + |m_0| + \theta_0 m_0. \quad (1.15)$$

В данной формуле n, n_0 — неотрицательные целые числа, m, m_0 — целые числа, θ_0 — вещественное число. При этом $\gamma_0 = 2n_0 + |m_0| + \theta_0 m_0 + 1$ и коэффициенты c_{nm} выбираются произвольным образом для тех пар (n, m) , которые удовлетворяют уравнению (1.15), и обязаны быть равны нулю в противном случае.

Далее будет показана разрешимость уравнения (1.15) для любого θ_0 и найдены соответствующие решения уравнения (1.13).

1.4. Спиральные пучки и их квантово-механические аналоги

Обозначим через $\mathcal{N}(\theta_0)$ множество всех пар (n, m) , удовлетворяющих уравнению (1.15). Полное описание множества $\mathcal{N}(\theta_0)$ при различных θ_0 и определение функций $F_0(X, Y)$ сводится к следующим пяти случаям.

1. Если θ_0 — иррациональное число, то множество $\mathcal{N}(\theta_0)$ состоит из единственной пары (n_0, m_0) . Используя определение функций Лагерра—Гаусса, легко показать, что структурно устойчивое поле $F(x, y, l)$ не имеет зависимости от θ_0 и представимо в виде

$$F(x, y, l) = \frac{1}{|\sigma|} \exp\left(\frac{2il(x^2 + y^2)}{k\rho^4|\sigma|^2} - i(2n_0 + |m_0| + 1) \arg \sigma\right) \mathcal{L}_{n_0, m_0}\left(\frac{x}{\rho|\sigma|}, \frac{y}{\rho|\sigma|}\right). \quad (1.16)$$

Отсутствие зависимости от θ_0 есть, конечно же, обратная сторона радиально-симметричной формы интенсивности поля (1.16), поскольку в данном случае все равно, какое вращение ему приписывать.

2. Если $\theta_0 = 0$, то $\theta(l) \equiv 0$, и соответствующее поле $F(x, y, l)$ распространяется вдоль l без вращения. При этом $\mathcal{N}(0) = \{(n, m); 2n + |m| = N\}$, где $N = 0, 1, \dots$, $\gamma_0 = N + 1$ и

$$F(x, y, l) = \frac{1}{|\sigma|} \exp\left(\frac{2il(x^2 + y^2)}{k\rho^4|\sigma|^2} - i(N + 1) \arg \sigma\right) \times \sum_{n=0}^N c_n \mathcal{L}_{\min(n, N-n), N-2n}\left(\frac{x}{\rho|\sigma|}, \frac{y}{\rho|\sigma|}\right), \quad (1.17)$$

где c_n — произвольные константы. Полученное выражение показывает, что без вращения в параксиальном приближении могут распространяться, сохраняя свою структуру, только поля, которые в перетяжке имеют вид произведения гауссовой функции на некоторый полином специального вида. Более того,

$$|F(x, y, l)| = |F(-x, -y, l)|,$$

т. е. интенсивность любого невращающегося структурно устойчивого поля обладает центральной симметрией. На рис. 1 показаны примеры таких полей. Мода

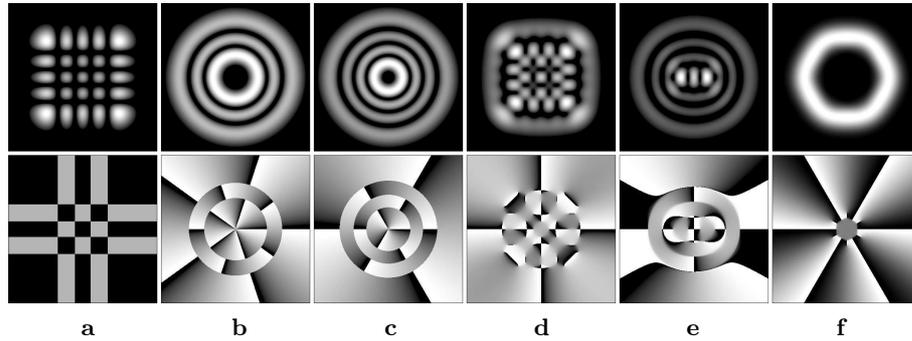


Рис. 1. Интенсивности (верхний ряд) и фазы (нижний ряд) структурно устойчивых полей без вращения: (а) — мода Эрмита–Гаусса $\mathcal{H}_{4,4}(x, y)$; (б), (с) — моды Лагерра–Гаусса $\mathcal{L}_{2,5}(x, y)$ и $\mathcal{L}_{3,-3}(x, y)$; (д), (е) — моды Эрмита–Лагерра–Гаусса $\mathcal{G}_{4,4}(x, y|\pi/10)$ и $\mathcal{G}_{5,3}(x, y|\pi/5)$ (см. [31]); (ф) — поле вида (1.17) при $N = 8$ со специальным подбором коэффициентов c_n , чтобы его интенсивность выглядела как правильный шестиугольник. На всех рисунках черный цвет соответствует нулевой интенсивности и нулевой фазе, белый цвет — максимальной интенсивности и фазе 2π

Эрмита–Гаусса, изображенная на рис. 1 а, является вещественной функцией, поэтому ее фаза принимает только значения 0 и π . Горизонтальные и вертикальные прямые на фазовом распределении моды Эрмита–Гаусса показывают местоположение нулевых линий: при пересечении такой линии происходит скачок фазы на π . Моды Лагерра–Гаусса имеют и нулевые линии — окружности, и изолированный нуль в центре координат.

Изолированные нули (точки фазовой сингулярности) удобно классифицировать по величине набега, который приобретает фаза при обходе вокруг такого нуля против часовой стрелки. Если набег фазы положителен, то будем называть такой нуль “нулем типа z ”, если отрицателен — “нулем типа \bar{z} ”. Несмотря на то, что такая классификация не отражает всего многообразия возможностей (нулевые линии вещественной и мнимой частей комплексной амплитуды могут пересекаться и не под прямым углом, и быть весьма далеки по виду от линейных функций даже в малой окрестности нуля), она позволяет дать простейшую характеристику поведения фазы в окрестности каждого изолированного нуля.

Для моды $\mathcal{L}_{2,5}(x, y)$ точка фазовой сингулярности — это нуль типа z пятого порядка: при обходе вокруг него против часовой стрелки фаза меняется от 0 до 2π пять раз. Для моды $\mathcal{L}_{3,-3}(x, y)$ аналогичная точка в центре координат — изолированный нуль типа \bar{z} третьего порядка. Структурно устойчивые поля, показанные на рис. 1 д, е, ф, обладают изолированными нулями и типа z , и типа \bar{z} . Контрастные черно-белые переходы на фазовых распределениях соответствуют склейке фаз $\varphi = 0$ и $\varphi = 2\pi$.

3. Пусть $\theta_0 = -1$. Тогда $2n + |m| - m$ есть четное неотрицательное число. Обозначая его через $2N$, находим множество $\mathcal{N}(-1) = \{(N, m); m = 0, 1, 2, \dots\} \cup \{(N + m, m); m = -1, -2, \dots, -N\}$, параметр фазового набега $\gamma_0 = 2N + 1$ и световое поле

$$F(x, y, l) = \frac{1}{|\sigma|} \exp\left(\frac{2il(x^2 + y^2)}{k\rho^4|\sigma|^2} - i(2N + 1) \arg \sigma\right) \times \left(\sum_{m=0}^{\infty} c_m \mathcal{L}_{N,m}(X, Y) + \sum_{m=1}^N c_{-m} \mathcal{L}_{N-m,-m}(X, Y) \right), \quad (1.18)$$

где $X + iY = (x + iy)/\rho\sigma$. При $N = 0$ простой вид функций Лагерра—Гаусса

$$\mathcal{L}_{0,m}(X, Y) = e^{-X^2 - Y^2} (X + iY)^m$$

позволяет представить решение в более компактной форме:

$$\begin{aligned} F(x, y, l) &= \frac{1}{\sigma} \exp\left(\frac{2il(x^2 + y^2)}{k\rho^4|\sigma|^2}\right) \sum_{m=0}^{\infty} c_m e^{-X^2 - Y^2} (X + iY)^m = \\ &= \frac{1}{\sigma} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{\rho^2\sigma}\right) f\left(\frac{x + iy}{\rho\sigma}\right). \end{aligned} \quad (1.19)$$

Здесь $f(z)$ — такая целая аналитическая функция, что $F(x, y, 0) \in L_2(\mathbb{R}^2)$. В силу формулы $\theta(l) = -\operatorname{arctg}(2l/k\rho^2)$, эволюция интенсивности поля $F(x, y, l)$ при распространении выглядит как замедляющееся вращение — максимальное в области перетяжки и практически нулевое в дальней зоне. При этом полный угол поворота поля при распространении составляет $\theta(\infty) - \theta(0) = -\pi/2$.

Общему выражению (1.18) также можно придать более наглядную форму, если воспользоваться дифференциальным представлением функций Лагерра—Гаусса из [34]:

$$\mathcal{L}_{n,\pm m}(X, Y) = \frac{(-1)^{n+m}}{2^{n+m}n!} e^{X^2 + Y^2} \frac{\partial^n}{\partial(X \pm iY)^n} \frac{\partial^{n+m}}{\partial(X \mp iY)^{n+m}} e^{-2X^2 - 2Y^2}.$$

Окончательный ответ будет следующим:

$$\begin{aligned} F(x, y, l) &= \frac{1}{|\sigma|} \exp\left(\frac{2il(x^2 + y^2)}{k\rho^4|\sigma|^2} - i(2N + 1) \arg \sigma\right) e^{ZZ} \frac{\partial^N}{\partial Z^N} (e^{-2ZZ} f(Z)) = \\ &= \frac{1}{\sigma} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{\rho^2\sigma} - 2iN \arg \sigma\right) \left(\frac{\partial}{\partial Z} - 2Z\right)^N f(Z), \end{aligned} \quad (1.20)$$

где $Z = (x + iy)/\rho\sigma$ и $\bar{Z} = (x - iy)/\rho\bar{\sigma}$.

4. Случай $\theta_0 = 1$ полностью аналогичен предыдущему. Полагая $2n + |m| + m = 2N$, находим $\mathcal{N}(1) = \{(N, m); m = 0, -1, -2, \dots\} \cup \{(N - m, m); m = 1, 2, \dots, N\}$, $\gamma_0 = 2N + 1$ и

$$F(x, y, l) = \frac{1}{|\sigma|} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{\rho^2\sigma} - i(2N + 1) \arg \sigma\right) \left(\frac{\partial}{\partial \bar{Z}} - 2\bar{Z}\right)^N f(\bar{Z}), \quad (1.21)$$

где $Z = (x + iy)/\rho\sigma$, $\bar{Z} = (x - iy)/\rho\bar{\sigma}$. В частности, при $N = 0$ получаем

$$F(x, y, l) = \frac{1}{\sigma} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{\rho^2\sigma}\right) f\left(\frac{x - iy}{\rho\sigma}\right), \quad (1.22)$$

где, как и в (1.19), $f(z)$ — произвольная целая функция, не нарушающая квадратичной интегрируемости функции $F(x, y, 0)$. Это условие выполняется, например, для любой целой функции $f(z)$ с порядком роста $\rho_f < 2$. В частности, в качестве $f(z)$ можно выбрать некоторый полином. Структурно устойчивые поля такого рода одновременно и независимо были получены в [27, 32].

5. И наконец, если θ_0 является рациональным числом, отличным от 0 и ± 1 , то множество $\mathcal{N}(\theta_0)$ наряду с парой (n_0, m_0) содержит некоторую пару $(n_1, m_1 \neq m_0)$. В этом случае

$$\theta_0 = \frac{2n_0 + |m_0| - 2n_1 - |m_1|}{m_1 - m_0},$$

и структурно устойчивое решение имеет вид

$$F(x, y, l) = \frac{1}{|\sigma|} \exp\left(\frac{2il(x^2 + y^2)}{k\rho^4|\sigma|^2} - i(2n_0 + |m_0| + \theta_0 m_0 + 1) \arg \sigma\right) \times \sum_{\mathcal{N}(\theta_0)} c_{nm} \mathcal{L}_{n,m}(X, Y), \quad (1.23)$$

где $X + iY = (x + iy) \exp(i\theta_0 \arg \sigma) / \rho|\sigma|$, и множество $\mathcal{N}(\theta_0)$ всех пар (n, m) , по которым идет суммирование, определяется следующим образом. Будем считать, что $\operatorname{sgn} m_0 = 1$ для $m_0 \geq 0$ и $\operatorname{sgn} m_0 = -1$ для $m_0 < 0$. Представим θ_0 в виде дроби P/Q , где P и Q — взаимно простые числа и $Q > 0$. Возможны варианты: 1) одно из чисел P, Q четно; 2) оба числа P и Q нечетны. В первом случае

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\theta_0) = & \{(n_0 + (P + Q \operatorname{sgn} m_0)k, m_0 - 2Qk); k \in \mathbb{Z}, n \geq 0, m \operatorname{sgn} m_0 \geq 0\} \cup \\ & \cup \{(n_0 + |m_0| + (P - Q \operatorname{sgn} m_0)k, m_0 - 2Qk); k \in \mathbb{Z}, n \geq 0, m \operatorname{sgn} m_0 < 0\}; \end{aligned}$$

во втором случае

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\theta_0) = & \{(n_0 + \frac{1}{2}(P + Q \operatorname{sgn} m_0)k, m_0 - Qk); k \in \mathbb{Z}, n \geq 0, m \operatorname{sgn} m_0 \geq 0\} \cup \\ & \cup \{(n_0 + |m_0| + \frac{1}{2}(P - Q \operatorname{sgn} m_0)k, m_0 - Qk); k \in \mathbb{Z}, n \geq 0, m \operatorname{sgn} m_0 < 0\}. \end{aligned}$$

Проиллюстрируем использование этих формул на двух примерах.

Пусть $\theta_0 = -0,4 = -\frac{2}{5}$. Тогда $P = -2, Q = 5$, и построение множества $\mathcal{N}(\theta_0)$ производится по варианту 1). Если выбрать начальную пару (n_0, m_0) таким образом, что $m_0 > 0$, то

$$\begin{aligned} \mathcal{N}\left(-\frac{2}{5}\right) = & \{(n_0 + 3k, m_0 - 10k), k \in \mathbb{Z}, -\frac{n_0}{3} \leq k \leq \frac{m_0}{10}\} \cup \\ & \cup \{(n_0 + m_0 - 7k, m_0 - 10k), k \in \mathbb{Z}, \frac{m_0}{10} < k \leq \frac{n_0 + m_0}{7}\}. \end{aligned}$$

В частности, при $n_0 = 0, m_0 = 9$ получаем $\mathcal{N}\left(-\frac{2}{5}\right) = \{(0, 9), (2, -1)\}$ и

$$F(x, y, l) = \frac{1}{|\sigma|} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{\rho^2 \sigma} - 6,4i \arg \sigma\right) \times \left[c_1 \left(\frac{x + iy}{\rho|\sigma|} e^{-0,4i \arg \sigma}\right)^9 + c_2 \frac{x - iy}{\rho|\sigma|} e^{0,4i \arg \sigma} L_2^1\left(\frac{2x^2 + 2y^2}{\rho^2|\sigma|^2}\right) \right].$$

Здесь c_1, c_2 — произвольные комплексные константы и $\sigma = 1 + 2il/k\rho^2$. Спиральный пучок, соответствующий значениям $c_1 = 1$ и $c_2 = -49i$, показан на рис. 2. При распространении из области перетяжки в дальнюю зону пучок поворачивается на угол $\theta(\infty) - \theta(0) = \pi\theta_0/2 = -2\pi/10$. Интенсивность не меняется от такого поворота, поэтому данный спиральный пучок представляет собой пример поля, инвариантного к двумерному преобразованию Фурье.

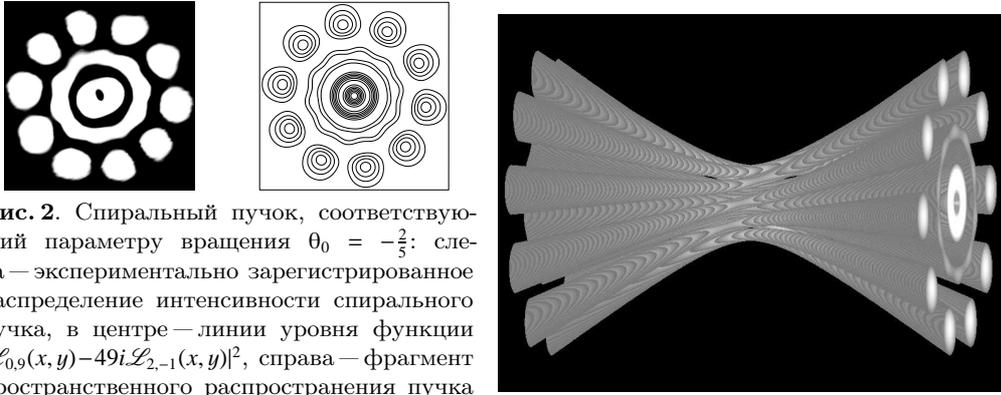


Рис. 2. Спиральный пучок, соответствующий параметру вращения $\theta_0 = -\frac{2}{5}$: слева — экспериментально зарегистрированное распределение интенсивности спирального пучка, в центре — линии уровня функции $|\mathcal{L}_{0,9}(x,y) - 49i\mathcal{L}_{2,-1}(x,y)|^2$, справа — фрагмент пространственного распространения пучка в области перетяжки

Пусть теперь $\theta_0 = -3$. Тогда $P = -3$, $Q = 1$ и для построения $\mathcal{N}(\theta_0)$ используется вариант 2). Если выбрать начальную пару $n_0 = m_0 = 0$, то получается множество $\mathcal{N}(-3) = \{(k, k), k = 0, 1, 2, \dots\}$ и спиральный пучок

$$F(x, y, l) = \frac{1}{\sigma} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{\rho^2 \sigma}\right) \sum_{k=0}^{\infty} c_k \left(\frac{x + iy}{\rho|\sigma|} e^{-3i \arg \sigma}\right)^k L_k^k\left(\frac{2x^2 + 2y^2}{\rho^2|\sigma|^2}\right).$$

В данном случае, в отличие от предыдущего, имеется бесконечное число степеней свободы, т. е. констант c_k , для построения поля F . Соответственно, число сингулярностей фазы у такого пучка может быть не только конечным, но и бесконечным. Одним из примеров подобного рода является спиральный пучок, построенный на основе модифицированной функции Бесселя и имеющий в плоскости перетяжки следующий вид:

$$F(x, y, 0) = e^{-z^*z + az} \frac{I_\nu(2z \sqrt{a^2 - 2a\bar{z}})}{(2z \sqrt{a^2 - 2a\bar{z}})^\nu}.$$

Здесь a и ν — произвольные параметры, $z = (x + iy)/\rho$ и $\bar{z} = (x - iy)/\rho$ — комплексные переменные. На рис. 3 показан пучок $F(x, y, 0) + F(y, -x, 0) + F(-x, -y, 0) + F(-y, x, 0)$ при $a = 1,3$ и $\nu = 1$.

Таким образом, полностью завершено описание структурно устойчивых решений⁷ параболического уравнения, удовлетворяющих структурному представлению (1.4) и неравенству (1.8). Световые поля, соответствующие найденным решени-

⁷ Можно еще рассмотреть вопрос о возможности представления спиральных пучков не в виде разложения в ряд по модам Лагерра—Гаусса, а в более компактной форме, подобно тому, как для случая $\theta_0 = \pm 1$ были найдены формулы (1.20) и (1.21). Такие представления действительно существуют, но они достаточно громоздки. Например, для $\theta_0 = -3$ в простейшем варианте

$$F(x, y, l) = \frac{1}{\sigma} \exp\left(\frac{2il(x^2 + y^2)}{k\rho^4|\sigma|^2}\right) e^{X^2 + Y^2} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{i\sqrt{2}(X\xi + Y\eta) - \xi^2 - \eta^2} f((\xi + i\eta)^2(\xi - i\eta)) d\xi d\eta,$$

где $X + iY = (x + iy) \exp(-3i \arg \sigma)/\rho|\sigma|$ и $f(z)$ — произвольная целая функция, не нарушающая квадратичной интегрируемости функции $F(x, y, 0)$. Построение $F(x, y, l)$ в общем случае добавляет данной задаче некоторый теоретико-числовой аспект: если при описании спиральных пучков с параметром вращения $\theta_0 = \pm 1$ возникает лишь один дифференциальный оператор, то для случая $\theta_0 = -3$ их три, а для случая $\theta_0 = -2$ таких операторов семь.

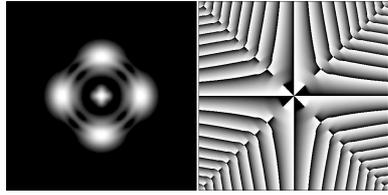


Рис. 3. Интенсивность и фаза спирального пучка, соответствующего параметру вращения $\theta_0 = -3$

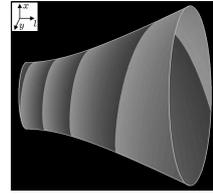


Рис. 4. Траектория движения точки (x_0, y_0) при распространении спирального пучка $F(x, y, l)$ с $\theta_0 = -15$

ям (1.16)–(1.23), при распространении вдоль оси l вращаются по закону $\theta(l) = \theta_0 \operatorname{arctg}(2l/k\rho^2)$ и увеличиваются в масштабе по закону $d(l) = \sqrt{1 + 4l^2/k^2\rho^4}$.

Если в исходной плоскости $l=0$ зафиксировать некоторую точку (x_0, y_0) , то ее путь при распространении поля $F(x, y, l)$ опишет некоторую спираль $x + iy = (x_0 + iy_0)|\sigma|e^{-i\theta_0 \operatorname{arg} \sigma}$. При малых $|\theta_0|$ название "спираль" довольно условно и указывает лишь на некоторую тенденцию к повороту, но при больших $|\theta_0|$ точка (x_0, y_0) при распространении поля F совершает $\frac{1}{4}|\theta_0|$ оборотов вокруг оси l по часовой или против часовой стрелки в зависимости от знака θ_0 (см. рис. 4). Завершается такое неравномерное вращение асимптотическим приближением к прямой

$$x + iy = (x_0 + iy_0) \left(1 + \frac{2il}{k\rho^2} \right) \exp\left(-\frac{\pi i(\theta_0 + 1)}{2} \right).$$

Отметим также, что линии постоянной фазы найденных решений вне перетяжки имеют спиралевидную форму. Эти два обстоятельства позволили предложить название "спиральные пучки света" для найденных световых полей [27].

Связь между параксиальной оптикой и квантовой механикой рассматривалась различными авторами (см., например, [29, 52]). Какая конкретная квантово-механическая ситуация соответствует спиральным пучкам? Уравнение для спиральных пучков (1.13) можно представить через нормированные полярные координаты:

$$\nabla^2 F + 4i\theta_0 \frac{\partial F}{\partial \phi} - 4F(R^2 - \gamma_0) = 0.$$

Здесь R и ϕ определяются из соотношения $Re^{i\phi} = (x + iy) \exp(i\theta_0 \operatorname{arg} \sigma) / \rho |\sigma|$.

С другой стороны, в обычных полярных координатах R, ϕ уравнение Шредингера для волновой функции ψ заряженной частицы массы M и заряда e в однородном магнитном поле напряженности H имеет вид [33]:

$$\nabla^2 \psi + 4i \operatorname{sgn}(eH) \frac{\partial \psi}{\partial \phi} - 4\psi \left(R^2 - \frac{2cME_1}{\hbar|eH|} \right) = 0,$$

где $E_1 = E - p_z^2/2M$, E — энергия частицы, p_z — значение импульса частицы вдоль направления поля. Видна эквивалентность этих уравнений при $\theta_0 = \operatorname{sgn}(eH)$, $\gamma_0 = 2cME_1/\hbar|eH|$. Таким образом, при $\theta_0 = \pm 1$, $\gamma_0 = 1$ спиральным пучкам соответствуют волновые функции частицы в постоянном магнитном поле с основным состоянием $E_1 = \hbar|eH|/2cM$. Необходимо отметить, что вид приведенных выше дифференциальных уравнений совпадает в различных системах координат.

1.5. Экспериментальная реализация спиральных пучков

1.5.1. Метод астигматического преобразования

Известно [35], что в устойчивом двухзеркальном резонаторе частоты генерации определяются выражением

$$\omega_q = \frac{2c}{L_0} (\gamma \arccos \sqrt{g_1 g_2} + \pi q), \quad (1.24)$$

где c — скорость света, L_0 — длина полного обхода резонатора, $g_{1,2} = (1 - L_0/2R_{1,2})$ — конфигурационные параметры, $R_{1,2}$ — радиусы кривизны зеркал, q — аксиальный индекс и параметр γ равен $\gamma = n + m + 1$ для мод Эрмита—Гаусса $\mathcal{H}_{n,m}(x, y)$ и $\gamma = 2n + |m| + 1$ для мод Лагерра—Гаусса $\mathcal{L}_{n,m}(x, y)$. Легко видеть, что моды, для которых $\gamma = \text{const}$, являются вырожденными по частоте. Если резонатор таков, что $\arccos \sqrt{g_1 g_2} = \pi M/N$, где M и N — взаимно простые числа, то условие вырождения по частоте оказывается справедливым также и для мод, удовлетворяющих условию

$$\gamma M + qN = \text{const}. \quad (1.25)$$

В связи с этим у суммы таких мод отсутствуют биения, и она также является стационарным, не зависящим от времени в каждом своем сечении распределением. Однако, как легко видеть, параметры γ слагаемых суммы различны, поэтому распределение интенсивности такой суперпозиции будет меняться при распространении. Пусть, например, генерируемое поле есть сумма таких мод Лагерра—Гаусса $\mathcal{L}_{n_1, m_1}(x, y)$ и $\mathcal{L}_{n_2, m_2}(x, y)$, что $\gamma_1 \neq \gamma_2$, и выполняется условие (1.25). Тогда легко видеть из (1.23), что эта сумма представляет собой спиральный пучок с параметром вращения $\theta_0 = (\gamma_1 - \gamma_2)/(m_2 - m_1)$. Однако в реальных резонаторах из-за наличия анизотропии (например, астигматизма окон Брюстера), если не принимаются специальные меры, обычно генерируются моды Эрмита—Гаусса, поэтому непосредственное получение спирального пучка довольно затруднительно. Выправить ситуацию можно, если воспользоваться результатами работы [36], где теоретически и экспериментально показано, что с помощью астигматической оптики можно преобразовать любой пучок Эрмита—Гаусса в соответствующий пучок Лагерра—Гаусса и обратно. Преобразование имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} & \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-i(x\xi + y\eta) + \frac{2i\xi\eta}{\rho^2}\right) \mathcal{H}_{n,m}\left(\frac{\xi}{\rho}, \frac{\eta}{\rho}\right) d\xi d\eta = \\ & = \frac{\pi\rho^2}{\sqrt{2}} (-1)^{n+m} \exp\left(-\frac{i\rho^2 xy}{4}\right) \begin{cases} (2i)^n m! \mathcal{L}_{m, n-m}\left(\frac{\rho x}{2\sqrt{2}}, \frac{\rho y}{2\sqrt{2}}\right) & (n \geq m), \\ (2i)^m n! \mathcal{L}_{n, m-n}\left(\frac{\rho y}{2\sqrt{2}}, \frac{\rho x}{2\sqrt{2}}\right) & (n \leq m). \end{cases} \end{aligned} \quad (1.26)$$

Его можно реализовать различными способами посредством цилиндрической и сферической оптики. Примеры оптических схем и результаты экспериментов по конкретным реализациям преобразования (1.26), которое далее будем называть астигматическим, приведены в [27, 36].

Пусть пучок, генерируемый лазером, представляет собой сумму двух мод Эрмита—Гаусса с индексами (n_1, m_1) , (n_2, m_2) и $n_1 + m_1 \neq n_2 + m_2$. Посредством астигматического преобразования его можно трансформировать в сумму двух мод Лагерра—Гаусса с индексами $(\min(n_j, m_j), n_j - m_j)$, $j = 1, 2$. И, таким образом, в результате

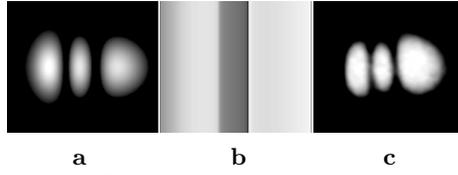


Рис. 5. Интенсивность (а) и фаза (б) кодировочного поля $\exp(-\frac{1}{8}\rho^2 x^2)h(y|\Delta_2)$ и экспериментальное распределение интенсивности (с) пучка, выходящего из гелий-неонового лазера. Определение кодировочного поля будет дано в разделе 2.3

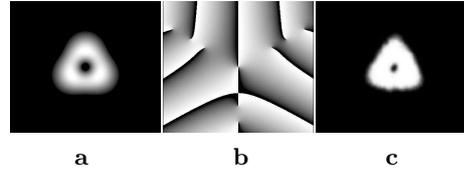


Рис. 6. Интенсивность (а) и фаза (б) спирального пучка $\mathcal{S}(z, \bar{z}|\Delta)$ и его экспериментальная реализация (с). Распределение интенсивности (с) получено в результате астigmaticского преобразования пучка, интенсивность которого показана на рис.5,с

будет получен уже спиральный пучок с параметром вращения $\theta_0 = (n_1 + m_1 - n_2 - m_2)/(n_2 + m_2 - n_1 - m_1)$.

Рассмотрим в качестве примера случай $M/N = 1/3$ (резонатор: $R_1 = 2 \text{ м}$, $R_2 = \infty$, $L_0 = 3 \text{ м}$). В нем будут вырождена по частоте, например, сумма мод Эрмита–Гаусса вида $\sum_k c_k \mathcal{H}_{0,3k+2}(x, y)$ (см. рис. 5). Подобная комбинация может быть реализована посредством внесения тонких проволочек ($\sim 15 \text{ мкм}$) в поле резонатора. Легко видеть, что результатом астigmaticского преобразования такого поля будет спиральный пучком с $2\pi/3$ -симметрией (см. рис. 6).

1.5.2. Внутррезонаторный синтез спиральных пучков

Для определения конфигурации резонаторов, позволяющих обеспечивать непосредственную генерацию спиральных пучков, рассмотрим поведение такого пучка в устойчивом резонаторе, описываемом матрицей полного обхода $ABCD$.

Как было показано в разделе 1.4, произвольный спиральный пучок F , параметр вращения которого равен θ_0 , на расстоянии l от области перетяжки выражается через моды Лагерра–Гаусса следующим образом:

$$\begin{aligned} F(r, \phi) &= \frac{w_0}{w} \exp\left(\frac{ikr^2}{2R} - i\gamma_0\Phi_0\right) \sum_{\mathcal{N}(\theta_0)} c_{nm} \mathcal{L}_{n,m}\left(\frac{r}{w}, \phi\right) = \\ &= \frac{w_0}{w} \exp\left(\frac{ikr^2}{2Q}\right) \sum_{\mathcal{N}(\theta_0)} c_{nm} \left(\frac{r}{w}\right)^{|m|} e^{im\phi} L_n^{|m|}\left(\frac{2r^2}{w^2}\right), \end{aligned} \quad (1.27)$$

где $\mathcal{L}_{n,m}(r, \phi) = e^{-r^2/w^2} r^{|m|} e^{im\phi} L_n^{|m|}(2r^2/w^2)$ — мода Лагерра–Гаусса в полярных координатах; Φ_0 — фазовый набег нулевой моды из плоскости перетяжки; w_0, w — гауссовы параметры пучка в плоскости перетяжки и на расстоянии l от нее соответственно; $1/Q = 1/R + 2i/kw^2$ — комплексный параметр пучка; k — волновое число и $\mathcal{N}(\theta_0)$ — множество таких целочисленных пар (n, m) , что $2n + |m| + \theta_0 m + 1 = \gamma_0 = \text{const}$.

Здесь и далее в этом параграфе вместо $\rho, \rho|\sigma|, \arg \sigma$ используются соответственно w_0, w, Φ_0 , поскольку вычисления с матрицей $ABCD$ обычно описываются в таких обозначениях. Кроме того, вместо декартовой используется полярная система координат, что позволяет более наглядно представлять зависимости, связанные с углами поворота.

Преобразование поля (1.27) оптической системой с матрицей $ABCD$ имеет вид [38]:

$$F_1(r, \phi) = \frac{w}{w_1} \exp\left(ikL_0 + \frac{ikr^2}{2Q_1}\right) \sum_{\mathcal{N}(\theta_0)} c_{nm} e^{-i(2n+|m|+1)\Phi} \left(\frac{r}{w_1}\right)^{|m|} e^{im\phi} L_n^{|m|}\left(\frac{2r^2}{w_1^2}\right), \quad (1.28)$$

где L_0 — оптическая длина пути вдоль оси системы, $w_1^2 = w^2|A + B/Q|^2$, $\Phi = \arg(A + B/Q)$, $Q_1 = (AQ + B)/(CQ + D)$ и $AD - BC = 1$. Пусть теперь $ABCD$ — матрица полного обхода некоторого устойчивого резонатора. Из условия самовоспроизведения каждого слагаемого поля (1.27) при полном обходе резонатора $Q_1 = Q$ получим:

$$w_1 = w, \quad \frac{kw^2}{2} = \frac{B}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}(A + D)^2}}, \quad \Phi = \arccos\left(\frac{A + D}{2}\right).$$

Тогда, учитывая, что $2n + |m| + 1 = \gamma_0 - \theta_0 m$, эволюция спирального пучка (1.27) при обходе резонатора будет следующей:

$$F_1(r, \phi) = \exp\left(ikL_0 - i\gamma_0 \arccos\left(\frac{A + D}{2}\right)\right) F\left(r, \phi + \theta_0 \arccos\left(\frac{A + D}{2}\right)\right). \quad (1.29)$$

Здесь L_0 — длина полного обхода резонатора. Из последнего выражения видно, что при обходе резонатора пучок поворачивается на угол $\theta_N = \theta_0 \arccos(\frac{1}{2}(A + D))$ и приобретает набег фазы $\phi_N = kL_0 - \gamma_0 \arccos(\frac{1}{2}(A + D))$. Отсюда видно, что для выполнения условия саморепродукции такого пучка достаточно осуществить его поворот либо на угол $-\theta_N$, либо на угол $2\pi - \theta_N$. Известно, что такие повороты осуществимы в кольцевых резонаторах, например, с помощью призмы Довэ (т. н. "резонаторы с вращением поля") [35]. Резонаторы такого типа использовались для улучшения однородности поперечного распределения лазерного излучения. Однако, в отличие от настоящей работы, угол поворота пучка в упомянутых резонаторах выбирался без связи с конфигурационными параметрами резонатора (обычно 90° или 180°). Если в таком резонаторе осуществляется поворот поля на угол $-\theta_N$ или $2\pi - \theta_N$ и имеет место равенство

$$kL_0 - \gamma_0 \arccos\left(\frac{A + D}{2}\right) = 2\pi q,$$

то выполняется условие саморепродукции пучка $F_1(r, \phi) = F(r, \phi)$ и поле (1.27) будет являться собственной модой этого резонатора с частотой генерации

$$\omega_q = \frac{c}{L_0} \left(\gamma_0 \arccos\left(\frac{A + D}{2}\right) + 2\pi q \right). \quad (1.30)$$

Видно, что, в отличие от обычного резонатора без вращения пучка ($\theta_0 = 0$), вырожденными по частоте будут моды Лагерра—Гаусса, удовлетворяющие условию $2n + |m| + \theta_0 m = \text{const}$, и условие вырождения зависит от угла поворота пучка в резонаторе. Это легко понять, если обратить внимание на то, что поворот распределения комплексной амплитуды пучка Лагерра—Гаусса $\mathcal{L}_{n,m}(r, \phi)$ на угол θ эквивалентен приобретению им дополнительного набег фазы $m\theta$:

$$\mathcal{L}_{n,m}(r, \phi + \theta) = \mathcal{L}_{n,m}(r, \phi) e^{im\theta}.$$

На рис. 7 показана установка, созданная для экспериментальной апробации внутрирезонаторного синтеза спиральных пучков. Кольцевой лазер реализован на

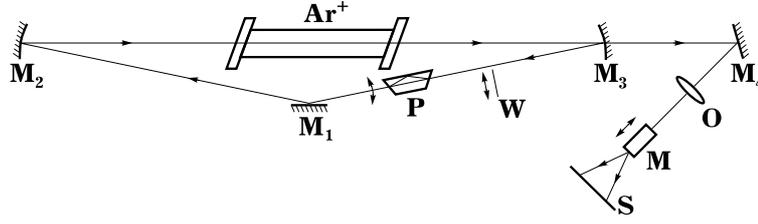


Рис. 7. Экспериментальная установка кольцевого лазера на базе аргон-ионного лазера

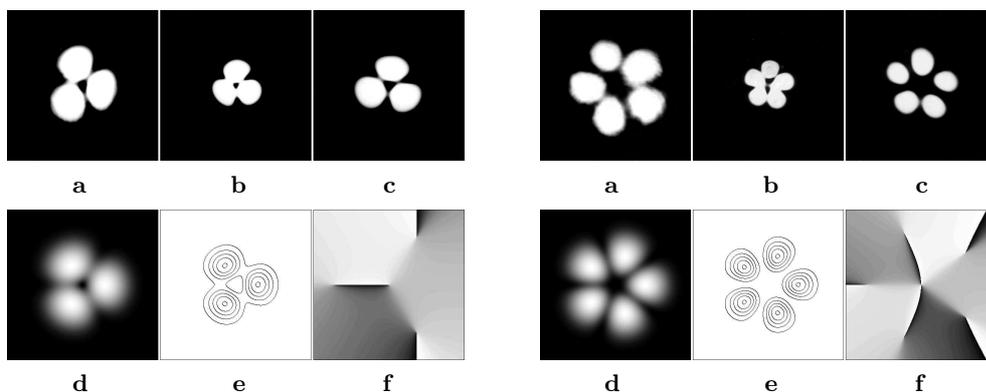
базе аргон-ионного лазера с длиной волны $\lambda=0,488$ мкм, плоским зеркалом M_1 (отражение 0,94) и сферическими зеркалами M_2, M_3 ($R_2 = R_3 = R = 3$ м, отражение 0,995 и 0,98 соответственно). Расстояния между зеркалами $M_1M_2 = M_1M_3 = l = 1,27$ м, $M_2M_3 = l_0 = 2,4$ м. Такая геометрия резонатора в виде тупого треугольника была выбрана для снижения влияния астигматизма зеркал M_2, M_3 . Поворот поля осуществляется посредством призмы Довэ P (при повороте призмы на угол α пучок поворачивается на угол 2α). Следует отметить, что призма P осуществляет поворот распределения комплексной амплитуды пучка, но относительно слабо влияет на состояние поляризации пучка. Действие призмы сводится к тому, что пучок становится слегка эллиптически поляризованным. Интенсивность компоненты поля, перпендикулярной плоскости резонатора, зависит от угла поворота призмы P и составляет $0 \div 4\%$ от интенсивности компоненты, лежащей в плоскости резонатора. Эллиптичность поляризации пучка имеет место лишь на участке резонатора $P-M_1-M_2$ —активный элемент. В остальной части резонатора направление поляризации определяется ориентацией окон Брюстера активного элемента и лежит в плоскости резонатора. Генерируемый лазером пучок наблюдался и регистрировался за частично пропускающим зеркалом M_3 с помощью объектива O и микроскопа M в плоскости экрана S . Матрица полного обхода резонатора, начиная с M_1 , имеет вид

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{4l}{R} - \frac{2l_0}{R} + \frac{4ll_0}{R^2} & 2l + l_0 - \frac{4l^2}{R} - \frac{4ll_0}{R} + \frac{4l^2l_0}{R^2} \\ -\frac{4}{R} + \frac{4l_0}{R^2} & 1 - \frac{4l}{R} - \frac{2l_0}{R} + \frac{4ll_0}{R^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,939 & 0,446 \\ -0,267 & -0,939 \end{pmatrix}. \quad (1.31)$$

Перетяжка пучка находится в окрестности зеркала M_1 , длина Рэлея для данного пучка составляет $l_R = B/\sqrt{1 - (A + D)^2/4} \approx 1300$ мм, что соответствует гауссову параметру $w_0 = 0,45$ мм. Набег фазы для основной моды в пустом резонаторе составляет $\phi_0 = \arccos(-0,94) \approx 160^\circ$ и, таким образом, частоты генерации двух соседних поперечных мод при нулевом угле поворота призмы различаются на 27 МГц, соответственно для двух соседних продольных мод частотный интервал равен 60 МГц. Изменение состава поперечных мод осуществляется введением в пучок тонкой проволоочки W диаметром ~ 15 мкм.

Угол поворота призмы P для саморепродукции спирального пучка с параметром вращения θ_0 составляет

$$\alpha = -\frac{\theta_0}{2} \arccos\left(\frac{A + D}{2}\right) = -\frac{\theta_0}{2} \cdot 2 \arccos\sqrt{\left(1 - \frac{2l}{R}\right)\left(1 - \frac{l_0}{R}\right)} = -\theta_0 \cdot 79,9^\circ.$$

Рис. 8. $\alpha = -26^\circ$, $\theta_0 = \frac{1}{3}$.Рис. 9. $\alpha \approx -15,5^\circ$, $\theta_0 = \frac{1}{5}$.

Верхний ряд: экспериментально зарегистрированные интенсивности спиральных пучков до (а), в (b) и после (c) области перетяжки при угле поворота призмы α . Нижний ряд: интенсивность (d), ее линии уровня (e) и фаза (f) спирального пучка с параметром вращения θ_0

При выполнении экспериментов выявлено, что спиральные пучки при различных параметрах вращения реализуются при несколько ином значении поворота призмы, в частности $\alpha = -\theta_0 \cdot 78^\circ$. Данное отклонение оказалось сходным для всех экспериментов и обусловлено, видимо, наличием активной среды.

На рис. 8 представлены результаты эксперимента по формированию спирального пучка с параметром вращения $\theta_0 = \frac{1}{3}$, $\alpha = -26^\circ$ и результаты численных расчетов для поля $F(r, \phi) = \mathcal{L}_{0,-2}(r, \phi) + 2\mathcal{L}_{0,1}(r, \phi)$. Фаза пучка имеет четыре сингулярности, или дислокации волнового фронта, причем сингулярность в центре и сингулярности на периферии имеют противоположные знаки.

На рис. 9 представлены аналогичные результаты для спирального пучка с параметром вращения $\theta_0 = \frac{1}{5}$, $\alpha \approx -15,5^\circ$ и численные расчеты для поля $F(r, \phi) = \mathcal{L}_{0,-3}(r, \phi) + 2\mathcal{L}_{0,2}(r, \phi)$. В этом случае фаза пучка содержит семь сингулярных точек: в центре — сингулярность типа z второго порядка (в эксперименте эта вырожденность слегка нарушена) и пять сингулярностей типа \bar{z} на периферии.

Возможности реализации различных спиральных пучков в данном эксперименте ограничивались потерями на отражение и дифракционными потерями. Во-первых, при больших углах поворота призмы (например, для пучков с $\theta_0 = 1$, $\alpha = -78^\circ$) угол падения пучка на призму Довэ далек от угла Брюстера, и потери в резонаторе становятся слишком велики. С другой стороны, реализация пучков, например, с $\theta_0 = \frac{1}{4}$ требует присутствия мод Лагерра—Гаусса $\mathcal{L}_{m_1, m_1}(r, \phi)$ и $\mathcal{L}_{m_2, m_2}(r, \phi)$, с разницей индексов $|m_1 - m_2|$ по крайней мере 8, для которых становятся большими дифракционные потери в резонаторе. Изменение параметра резонатора $A + D$ в нашем эксперименте было затруднено по конструктивным причинам.

Таким образом, спиральные пучки — это моды кольцевого лазера с вращением поля, что подтверждено экспериментально внутрирезонаторной генерацией спиральных пучков с различными параметрами вращения и хорошим согласием с результатами численных экспериментов [37]. Полученные результаты показывают принципиальную возможность генерации спиральных пучков с весьма различными пространственными характеристиками и параметрами вращения в лазере с соответствующим резонатором и коэффициентом усиления активной среды.

2. Спиральные пучки с заданным распределением интенсивности

2.1. Пучки в форме плоских кривых

Как отмечено во введении, связь между интенсивностью и фазой в одномерном и двумерном случаях радикально различается. Ненулевой ротор вектора потока световой энергии значительно осложняет связь между интенсивностью и фазой в этом случае. С другой стороны, эта сложность порождает и новые возможности.

Так, в разделе 1.4 было показано, что в двумерном случае существует класс когерентных световых полей, названных спиральными пучками, вида

$$F(x, y, l) = \frac{1}{\sigma} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{\rho^2 \sigma}\right) f\left(\frac{x \pm iy}{\rho \sigma}\right), \quad (2.1)$$

сохраняющих свою структуру с точностью до масштаба и вращения. Здесь $f(z)$ — произвольная целая аналитическая функция, $\sigma = 1 + 2il/k\rho^2$, l — расстояние вдоль направления распространения пучка, k — волновое число, $\rho = \text{const}$, знак в аргументе $f(z)$ определяет направление вращения пучка при распространении.

Из данного представления видно, что класс полей достаточно широк, однако доказательство существования пучка такого рода с предопределенной интенсивностью и конструктивный способ его построения является нетривиальной задачей. Исследованию возможностей целенаправленного синтеза пучков (2.1) посвящен данный раздел (см. также [39]).

Структурная устойчивость интенсивности спиральных пучков (2.1) при всех l позволяет, не изменяя общности, ограничиться рассмотрением пучка в плоскости перетяжки $l = 0$ (что соответствует $\sigma = 1$) и знаком "+" в аргументе функции f . Введем обозначение

$$\mathcal{S}(z, \bar{z}) = \exp\left(-\frac{z\bar{z}}{\rho^2}\right) f\left(\frac{z}{\rho}\right), \quad (2.2)$$

где $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ — комплексные переменные. Тогда $\mathcal{S}(z, \bar{z})$ задает спиральный пучок $F(x, y, l)$ в плоскости $l = 0$ и его эволюцию при распространении. Поэтому далее будем ссылаться на $\mathcal{S}(z, \bar{z})$ как на спиральный пучок (2.1).

Рассмотрим некоторые свойства данного класса спиральных пучков, вытекающие из представления (2.2) и используемые в дальнейшем.

Свойство А. Если $\mathcal{S}_n(z, \bar{z}) = \exp(-z\bar{z}/\rho^2) f_n(z/\rho)$ — некоторая совокупность спиральных пучков, то их линейная комбинация $\mathcal{S}(z, \bar{z}) = \sum_n c_n \mathcal{S}_n(z, \bar{z})$ также есть спиральный пучок. Вообще, если $\mathcal{S}_n(z, \bar{z}, a) = \exp(-z\bar{z}/\rho^2) f_n(z/\rho, a)$ — параметрическое семейство спиральных пучков, то $\mathcal{S}(z, \bar{z}) = \int \mathcal{S}(z, \bar{z}, a) da$ также спиральный пучок.

Свойство В. Если $\mathcal{S}_0(z, \bar{z}) = \exp(-z\bar{z}/\rho^2) f(z/\rho)$ — некоторый спиральный пучок, то $\mathcal{S}(z, \bar{z}) = \exp(-z\bar{z}/\rho^2) f(ze^{-i\alpha}/\rho)$ есть спиральный пучок, обладающий тем же распределением интенсивности, что и $\mathcal{S}_0(z, \bar{z})$, но повернутым на угол α .

Свойство С. Если $\mathcal{S}_0(z, \bar{z}) = \exp(-z\bar{z}/\rho^2) f(z/\rho)$ — некоторый спиральный пучок, то

$$\mathcal{S}(z, \bar{z}) = \exp\left(-\frac{z\bar{z} - 2z\bar{z}_0 + z_0\bar{z}_0}{\rho^2}\right) f\left(\frac{z - z_0}{\rho}\right) \quad (2.3)$$

есть спиральный пучок, обладающий тем же распределением интенсивности, что и $\mathcal{S}_0(z, \bar{z})$, но смещенным в точку z_0 . В данном случае, в отличие от свойства В,

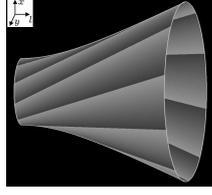


Рис. 10. Траектории точек максимума гауссовых пучков (2.4) — прямые линии — при $|z_0| = \text{const}$ лежат на поверхности однополостного гиперболоида

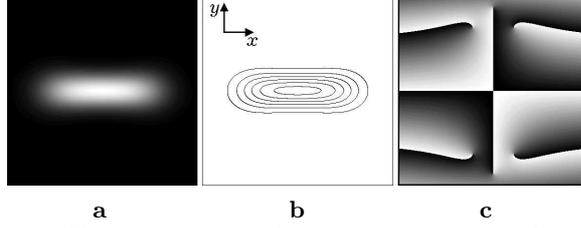


Рис. 11. Интенсивность (а), ее линии уровня (б) и фаза (с) спирального пучка в форме отрезка $[-T, T]$. На фазовом распределении видно наличие шести сингулярностей; точка в центре не является нулем: присутствие лишь черного и белого цветов в ее окрестности говорит о том, что там происходит склейка фаз $\varphi = 0$ и $\varphi = 2\pi$

замена переменной $z \rightarrow z - z_0$ не приводит сразу же к желаемому результату. Легко видеть, что

$$\exp\left(-\frac{(z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0)}{\rho^2}\right) f\left(\frac{z - z_0}{\rho}\right) = \exp\left(-\frac{z\bar{z} - \bar{z}z_0 - z\bar{z}_0 + z_0\bar{z}_0}{\rho^2}\right) f\left(\frac{z - z_0}{\rho}\right)$$

не является спиральным пучком, т. к. содержит множитель $\exp(-z_0\bar{z}/\rho^2)$. Умножение на линейную фазовую функцию $\exp(-(\bar{z}z_0 - z\bar{z}_0)/\rho^2)$ не влияет на распределение интенсивности и приводит к спиральному пучку (2.3).

Из (2.3) при $f(z) \equiv 1$ получается "элементарный спиральный пучок"

$$\mathcal{S}_{z_0}(z, \bar{z}) = \exp\left(-\frac{z\bar{z} - 2z\bar{z}_0 + z_0\bar{z}_0}{\rho^2}\right), \quad (2.4)$$

который имеет гауссово распределение интенсивности, смещенное в точку z_0 . Фаза пучка является линейной функцией координат и, конечно, пучок распространяется вдоль некоторой прямой. В связи с этим поучительно рассмотреть, как реализуется его "вращение" при распространении. Используя представление (2.1), легко получить, что траектория максимума интенсивности пучка (2.4) в пространстве (x, y, l) имеет следующее выражение:

$$x + iy = z_0 |\sigma| e^{i \arg \sigma} = (x_0 + iy_0) \left(1 + \frac{2il}{k\rho^2}\right), \quad (2.5)$$

где x_0, y_0 — координаты точки максимума z_0 интенсивности при $l = 0$.

Рассмотрим несколько "элементарных спиральных пучков" при $|z_0| = \text{const}$. Из (2.4) видно, что траектории максимумов пучков — прямые линии — образуют в пространстве (x, y, l) поверхность однополостного гиперболоида вращения

$$x^2 + y^2 - \frac{4|z_0|^2}{k^2\rho^4} l^2 = |z_0|^2.$$

Траектории максимумов отдельных пучков и их положение на поверхности гиперболоида показаны на рис. 10. Для спиральных пучков общего вида, рассмотренных в разделе 1.4, траектории движения точек, исходящих при $l = 0$ из точки z_0 , при распространении пучка также лежат на этой же поверхности гиперболоида и представляют из себя в общем случае спирали.

Спиральные пучки интересно сопоставить с когерентными состояниями $|\alpha\rangle$ в квантовой механике и оптике [41]. Например, в пространстве $L_2(\mathbb{R}^2)$ скалярное произведение "элементарных" спиральных пучков

$$(\mathcal{S}_{z_0}, \mathcal{S}_{z_1}) = \frac{1}{2}\pi\rho^2 \exp\left(-(|z_0|^2 - 2\bar{z}_0 z_1 + |z_1|^2)/\rho^2\right)$$

подобно скалярному произведению когерентных состояний

$$\langle\alpha|\beta\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 - 2\bar{\alpha}\beta + |\beta|^2)\right).$$

В более общем случае, если $\mathcal{S}(z, \bar{z}) = \exp(-z\bar{z}/\rho^2)f(z/\rho)$ — некоторый спиральный пучок, то $(\mathcal{S}, \mathcal{S}_{z_0}) = \frac{1}{2}\pi\rho^2 \mathcal{S}(z_0)$. Для когерентных состояний это аналогично равенству $\langle\alpha|\psi\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right)\psi(\bar{\alpha})$, где $|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n|n\rangle$. Существует также связь между астигматическим преобразованием спирального пучка и когерентными состояниями в координатном представлении и представлении Фока—Баргмана, которая будет рассмотрена ниже.

Теперь, используя свойство **A** для суммирования смещенных в разные точки гауссовых пучков вида (2.4), уже можно формировать структурно устойчивые световые поля с новыми свойствами. Простейшим примером такого рода может служить пучок

$$\mathcal{S}(z, \bar{z}|[-T, T]) = \exp\left(-\frac{z\bar{z}}{\rho^2}\right) \int_{-T}^T \exp\left(-\frac{t^2}{\rho^2} + \frac{2zt}{\rho^2}\right) dt, \quad (2.6)$$

который соответствует всюду плотному заполнению пучками вида (2.4) вещественного отрезка $[-T, T]$ на комплексной плоскости (см. рис. 11). Пучок обладает гауссовым убыванием в любом направлении вне отрезка $[-T, T]$, и при $\rho \ll T$ почти вся энергия пучка сосредоточена в небольшой окрестности этого отрезка.

Из (2.6) с помощью свойств **B** и **C** легко получить спиральный пучок с распределением интенсивности, имеющим форму произвольного отрезка $[z_1, z_2]$ на комплексной плоскости. Пусть $z_0 = \frac{1}{2}(z_1 + z_2)$, $T = \frac{1}{2}|z_2 - z_1|$ и $\alpha = \arg(z_2 - z_1)$. Тогда отображение $z \rightarrow z_0 + ze^{i\alpha}$ переводит отрезок $[-T, T]$ в отрезок $[z_1, z_2]$. Поэтому пучок, соответствующий отрезку $[z_1, z_2]$, имеет вид

$$\mathcal{S}(z, \bar{z}|[z_1, z_2]) = \exp\left(-\frac{z\bar{z} - 2z\bar{z}_0 + z_0\bar{z}_0}{\rho^2}\right) \int_{-T}^T \exp\left(-\frac{t^2}{\rho^2} + \frac{2(z - z_0)e^{-i\alpha}t}{\rho^2}\right) dt. \quad (2.7)$$

Будем называть отрезок $[z_1, z_2]$ порождающим отрезком для спирального пучка (2.7). На прямой, содержащей отрезок $[z_1, z_2]$, комплексная амплитуда пучка в точке $z_c = cz_1 + (1 - c)z_2$ равна

$$\mathcal{S}(z_c, \bar{z}_c|[z_1, z_2]) = \exp\left(i\frac{(2c - 1)\text{Im}(z_1\bar{z}_2)}{\rho^2}\right) \int_{-c|z_2 - z_1|}^{(1-c)|z_2 - z_1|} \exp\left(-\frac{t^2}{\rho^2}\right) dt.$$

Таким образом, в точках прямой $z_c = cz_1 + (1 - c)z_2$, симметричных относительно точки $\frac{1}{2}(z_1 + z_2)$, спиральный пучок $\mathcal{S}(z, \bar{z}|[z_1, z_2])$ принимает комплексно-сопряженные значения. В частности, на концах отрезка $[z_1, z_2]$

$$\mathcal{S}(z_1, \bar{z}_1|[z_1, z_2]) = \overline{\mathcal{S}(z_2, \bar{z}_2|[z_1, z_2])} = \exp\left(i\frac{\text{Im}(z_1\bar{z}_2)}{\rho^2}\right) \int_0^{|z_2 - z_1|} \exp\left(-\frac{t^2}{\rho^2}\right) dt. \quad (2.8)$$

Благодаря сильной локализации пучков (2.7) при $\rho \ll T$ в окрестности реализуемых отрезков, интерференция таких пучков при сложении проявляется слабо,

если отрезки достаточно удалены друг от друга. В связи с этим распределение интенсивности поля, представляющее из себя совокупность таких пучков, близко к сумме их распределений интенсивности.

Рассмотрим теперь соприкасающиеся отрезки $[a, b]$ и $[b, c]$, расположенные на вещественной оси. Тогда соответствующие спиральные пучки сливаются в один "без шва":

$$\mathcal{S}(z, \bar{z}[a, c]) = \mathcal{S}(z, \bar{z}[a, b]) + \mathcal{S}(z, \bar{z}[b, c]).$$

В общем случае, когда два отрезка $[z_1, z_2]$, $[z_2, z_3]$ лежат на одной прямой, из представления (2.7) следует, что аналогичная стыковка пучков $\mathcal{S}(z, \bar{z}[z_1, z_2])$ и $\mathcal{S}(z, \bar{z}[z_2, z_3])$ имеет вид

$$\mathcal{S}(z, \bar{z}[z_1, z_3]) = \exp\left(-i\frac{\text{Im}(\bar{z}_2 z_3)}{\rho^2}\right) \mathcal{S}(z, \bar{z}[z_1, z_2]) + \exp\left(-i\frac{\text{Im}(\bar{z}_2 z_1)}{\rho^2}\right) \mathcal{S}(z, \bar{z}[z_2, z_3]), \quad (2.9)$$

т. е. для обеспечения гладкой стыковки необходимо согласование фаз между пучками-слагаемыми. Из (2.8)–(2.9) следует, что фазы слагаемых в точке стыковки z_2 равны:

$$\arg\left[\exp\left(-i\frac{\text{Im}(\bar{z}_2 z_3)}{\rho^2}\right) \mathcal{S}(z_2, \bar{z}_2[z_1, z_2])\right] = \arg\left[\exp\left(-i\frac{\text{Im}(\bar{z}_2 z_1)}{\rho^2}\right) \mathcal{S}(z_2, \bar{z}_2[z_2, z_3])\right].$$

Поэтому, если рассмотреть пучок $\mathcal{S}(z, \bar{z}[z_1, z_2]) + e^{i\phi} \mathcal{S}(z, \bar{z}[z_2, z_3])$ при $\phi \in [0, 2\pi)$, то однородность суммарной интенсивности вдоль отрезка $[z_1, z_3]$ будет наилучшей при

$$\phi = \arg \mathcal{S}(z_2, \bar{z}_2[z_1, z_2]) - \arg \mathcal{S}(z_2, \bar{z}_2[z_2, z_3]) = \frac{\text{Im}(\bar{z}_2(z_3 - z_1))}{\rho^2}, \quad (2.10)$$

и равенство (2.10) можно рассматривать как условие для оптимального с точки зрения однородности интенсивности объединения двух пучков—"отрезков", когда точки z_1 , z_2 и z_3 лежат на одной прямой. Следует отметить, что равенство (2.10) может выполняться с точностью до $2\pi N$ (N — целое число), поскольку выражает связь между показателями комплексных экспонент.

Пусть теперь точки z_1 , z_2 и z_3 не лежат на одной прямой. Применим соображения по согласованию фаз для построения спирального пучка, имеющего форму ломаной $[z_1, z_2] \cup [z_2, z_3]$. Численные эксперименты показали, что распределение интенсивности пучка

$$\mathcal{S}(z, \bar{z}[z_1, z_2] \cup [z_2, z_3]) = \mathcal{S}(z, \bar{z}[z_1, z_2]) + \exp\left(i\frac{\text{Im}(\bar{z}_2(z_3 - z_1))}{\rho^2}\right) \mathcal{S}(z, \bar{z}[z_2, z_3]) \quad (2.11)$$

вдоль формируемой ломаной достаточно однородно при различных углах между звеньями $[z_1, z_2]$ и $[z_2, z_3]$. Таким образом, согласование фаз является полезным принципом для конструирования спиральных пучков, реализующих различные ломаные. Формула (2.11) легко обобщается на многозвенные ломаные.

Используя описанные выше пучки как базисные, можно строить весьма разнообразные поля, структурно устойчивые к фокусировке и распространению. Пример поля, где использованы все виды таких базисных пучков, приведен на рис. 12. Согласно свойству **C**, при смещении спиральный пучок приобретает дополнительную линейную фазу, поэтому базисные пучки на данном рисунке, обладающие одинаковой интенсивностью, имеют разные фазовые распределения.

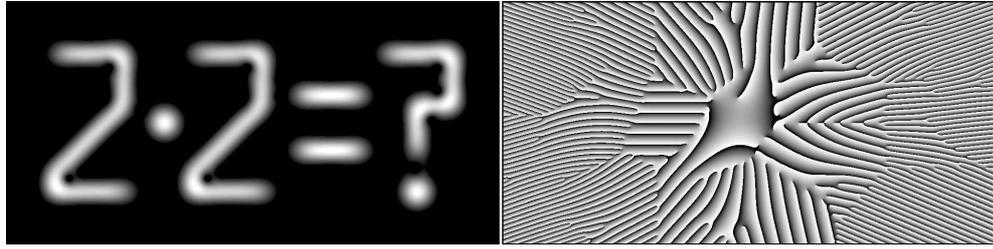


Рис. 12. Интенсивность и фаза пучка, построенного из базисных спиральных пучков

Из полученных результатов естественно возникает следующий вопрос. Пусть имеется некоторая кривая на плоскости, заданная в комплексной параметрической форме $\zeta = \zeta(t)$, где параметр t пробегает некоторый интервал $[0, T]$. Существует ли спиральный пучок $\mathcal{S}(z, \bar{z}|\zeta(t), t \in [0, T])$, имеющий форму этой кривой? Конечно, выражение "пучок в форме кривой $\zeta(t)$ " предполагает наличие некоторого критерия отбора, однако не будем пока останавливаться на строгой математической формулировке, полагая, что желаемым результатом будет чисто визуальное сходство. А именно: в точках z , лежащих на кривой $\zeta(t)$, интенсивность желаемого пучка должна быть как можно больше, а в остальных точках плоскости как можно меньше.

Будем строить спиральный пучок $\mathcal{S}(z, \bar{z}|\zeta(t), t \in [0, T])$ как предельный случай пучков, реализующих ломаные, аппроксимирующие кривую $\zeta(t)$. Пусть параметр t кривой $\zeta(t)$ меняется от 0 до T , $\{kT/n, k = 0, 1, \dots, n\}$ — разбиение отрезка $[0, T]$ и $\{\zeta_k = \zeta(kT/n), k = 0, 1, \dots, n\}$ — соответствующее ему разбиение кривой $\zeta(t)$ (см. рис. 13). Рассмотрим в качестве аппроксимации кривой $\zeta(t)$ ломаную

$$\bigcup_{k=0}^{n-1} [\zeta_k, \zeta_{k+1}] = [\zeta_0, \zeta_1] \cup [\zeta_1, \zeta_2] \cup \dots \cup [\zeta_{n-1}, \zeta_n]$$

и набор пучков-"отрезков" $\mathcal{S}(z, \bar{z}|\zeta_k, \zeta_{k+1})$, реализующих отдельные звенья этой ломаной.

Используя представление (2.11) для двузвенной ломаной, запишем спиральный пучок для многозвенной аппроксимирующей ломаной:

$$\mathcal{S}\left(z, \bar{z} \left| \bigcup_{k=0}^{n-1} [\zeta_k, \zeta_{k+1}] \right. \right) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{i\phi_k} \mathcal{S}(z, \bar{z}|\zeta_k, \zeta_{k+1}). \quad (2.12)$$

Здесь $\phi_0 = 0$, а остальные константы ϕ_k служат для согласования фаз в точках ζ_k . Условие согласования фаз для каждой пары пучков, реализующих отрезки, имеющие общую точку, выглядит следующим образом:

$$\phi_{k-1} + \arg \mathcal{S}(\zeta_k, \bar{\zeta}_k|\zeta_{k-1}, \zeta_k) = \phi_k + \arg \mathcal{S}(\zeta_k, \bar{\zeta}_k|\zeta_k, \zeta_{k+1}), \quad k = 1, \dots, n-1.$$

Решая эту систему и используя равенство (2.8), получим

$$\begin{aligned} \phi_k &= \sum_{j=1}^k \left(\arg \mathcal{S}(\zeta_j, \bar{\zeta}_j|\zeta_{j-1}, \zeta_j) - \arg \mathcal{S}(\zeta_j, \bar{\zeta}_j|\zeta_j, \zeta_{j+1}) \right) = \\ &= \frac{1}{2ip^2} \sum_{j=1}^k (\bar{\zeta}_j(\zeta_{j+1} - \zeta_{j-1}) - \zeta_j(\bar{\zeta}_{j+1} - \bar{\zeta}_{j-1})), \quad k = 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

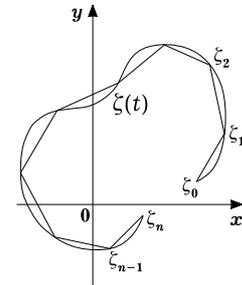


Рис. 13. Кривая $\zeta(t)$ и ее аппроксимирующая ломаная

Подставляя эти выражения в (2.12) и устремляя к нулю длину каждого звена ломаной, получим

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}(z, \bar{z} | \zeta(t), t \in [0, T]) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{S} \left(z, \bar{z} \left| \bigcup_{k=0}^{n-1} [\zeta_k, \zeta_{k+1}] \right. \right) = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \exp \left[\frac{T}{\rho^2 n} \sum_{j=1}^k \left(\bar{\zeta}_j \frac{\zeta_{j+1} - \zeta_{j-1}}{2T/n} - \zeta_j \frac{\bar{\zeta}_{j+1} - \bar{\zeta}_{j-1}}{2T/n} \right) \right] \times \\
&\quad \times \exp \left(-\frac{z\bar{z}}{\rho^2} + \frac{z(\bar{\zeta}_k + \bar{\zeta}_{k+1})}{\rho^2} - \frac{|\zeta_k + \zeta_{k+1}|^2}{4\rho^2} \right) \times \\
&\quad \times \int_{-\frac{1}{2}|\zeta_{k+1} - \zeta_k|}^{\frac{1}{2}|\zeta_{k+1} - \zeta_k|} \exp \left(-\frac{t^2}{\rho^2} + \frac{t(2z - \zeta_k - \zeta_{k+1}) e^{-i \arg(\zeta_{k+1} - \zeta_k)}}{\rho^2} \right) dt = \\
&= \exp \left(-\frac{z\bar{z}}{\rho^2} \right) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \exp \left(-\frac{\zeta_k \bar{\zeta}_k}{\rho^2} + \frac{2z\bar{\zeta}_k}{\rho^2} \right) \times \\
&\quad \times \exp \left[\frac{T}{\rho^2 n} \sum_{j=1}^k \left(\bar{\zeta}_j \frac{\zeta_{j+1} - \zeta_{j-1}}{2T/n} - \zeta_j \frac{\bar{\zeta}_{j+1} - \bar{\zeta}_{j-1}}{2T/n} \right) \right] \frac{|\zeta_{k+1} - \zeta_k|}{T/n}.
\end{aligned}$$

Рассматривая данное выражение как предел интегральной суммы, приходим к окончательной формуле:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}(z, \bar{z} | \zeta(t), t \in [0, T]) &= \exp \left(-\frac{z\bar{z}}{\rho^2} \right) \times \\
&\quad \times \int_0^T \exp \left(-\frac{\zeta(t)\bar{\zeta}(t)}{\rho^2} + \frac{2z\bar{\zeta}(t)}{\rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \int_0^t (\bar{\zeta}(\tau)\zeta'(\tau) - \zeta(\tau)\bar{\zeta}'(\tau)) d\tau \right) |\zeta'(t)| dt. \quad (2.13)
\end{aligned}$$

Итак, спиральный пучок для кривой $\zeta(t)$ построен. Насколько форма его распределения интенсивности соответствует кривой $\zeta(t)$?

Как видно из (2.13), пучок оказался представлен через инварианты кривой: дифференциал длины дуги, $|\zeta'(t)| dt$, и ориентированную площадь сектора, заметаемого при движении вдоль кривой, $\frac{1}{4i} \int_0^t (\bar{\zeta}\zeta' - \zeta\bar{\zeta}') d\tau$. Поэтому пучок определяется кривой как геометрическим объектом на плоскости, в частности, не зависит от ее параметризации.

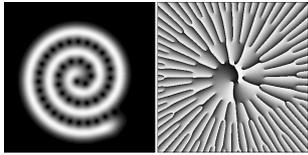


Рис. 14. Интенсивность и фаза спирального пучка в форме спирали Архимеда. Между витками видны изолированные нули интенсивности

С другой стороны, при построении пучка (2.13) принцип согласования фаз использовался для двух и только для двух соприкасающихся звеньев ломаной и не учитывалось влияние остальных. Очевидно, что при уменьшении длины ломаной протяженность соответствующих им спиральных пучков не стремится к нулю и их взаимовлияние усиливается. Кроме того, существенную роль играет форма кривой. В качестве примера на рис. 14 приведены интенсивность и фаза пучка для спирали Архимеда $\zeta(t) = te^{ict}$. Шаг спирали был подобран так, чтобы показать интерференцию между ее витками. Взаимное влияние витков увеличивается при уменьшении шага, поскольку он становится сравним с гауссовым параметром пучка ρ .

Для замкнутых кривых $\zeta(t)$, $t \in [0, T]$ взаимовлияние проявляется в том, что при построении спиральных пучков, соответствующих вписанным ломаным, требуется согласование фаз первого и последнего звеньев в точке $\zeta_0 = \zeta_n$.

Таким образом, связь между кривой $\zeta(t)$ и спиральным пучком (2.13) в общем случае не является очевидной. Некоторые аспекты этого вопроса рассмотрены в следующем параграфе.

2.2. Свойства пучков в форме замкнутых кривых

2.2.1. Условие квантования

Пучки для замкнутых кривых занимают особое место и заслуживают отдельного рассмотрения. Пусть функция $\zeta(t)$, $t \in [0, T]$ описывает замкнутую кривую без самопересечений. Не изменяя общности, можно считать, что с ростом t кривая обходитсся в направлении против часовой стрелки. Определим $\zeta(t)$ для всех вещественных t , продолжая ее периодически за пределы отрезка $[0, T]$. Тогда функции $\zeta(t+a)$, $t \in [0, T]$ при различных a описывают одну кривую. Совпадают ли спиральные пучки для кривых $\zeta(t+a)$ при различных a ? Покажем, что пучки, построенные для замкнутых кривых, проявляют характерные свойства квантования. Это выражается в том, что, во-первых, распределение интенсивности таких пучков претерпевает радикальные изменения при преобразовании подобия $\zeta(t) \rightarrow v\zeta(t)$ и обладает топологией кривой $v\zeta(t)$ лишь при определенных дискретных значениях v . Во-вторых, только для этих же значений v интенсивности пучков, построенных по кривым $v\zeta(t+a)$ при различных a , одинаковы.

Найдем условие, при котором интенсивности спиральных пучков, построенные для кривых $\zeta(t)$ и $\zeta(t+a)$, совпадают:

$$|\mathcal{S}(z, \bar{z} | \zeta(t), t \in [a, a+T])|^2 \equiv |\mathcal{S}(z, \bar{z} | \zeta(t), t \in [0, T])|^2.$$

Перепишем данное тождество в виде

$$e^{i\Psi(a)} \mathcal{S}(z, \bar{z} | \zeta(t), t \in [a, a+T]) \equiv \mathcal{S}(z, \bar{z} | \zeta(t), t \in [0, T]), \quad (2.14)$$

где $\Psi(a)$ — некоторая вещественная функция, не зависящая от z (иначе, сокращая обе части (2.14) на гауссову функцию, получаем, что Ψ есть аналитическая функция от z и, следовательно, не может быть вещественной функцией при всех z). Дифференцируя (2.14) по a и используя периодичность $\zeta(t)$, получим

$$e^{i\Psi(a)} \mathcal{S}(z, \bar{z} | \zeta(t), t \in [a, a+T]) \left(i\Psi'(a) - \frac{\bar{\zeta}(a)\zeta'(a) - \zeta(a)\bar{\zeta}'(a)}{\rho^2} \right) + \exp\left(i\Psi(a) - \frac{z\bar{z} - 2z\bar{\zeta}(a) + \zeta(a)\bar{\zeta}(a)}{\rho^2} \right) \left(\exp\left(\frac{1}{\rho^2} \int_0^T (\bar{\zeta}\zeta' - \zeta\bar{\zeta}') d\tau \right) - 1 \right) |\zeta'(a)| = 0.$$

Заменяя спиральный пучок в первом слагаемом в соответствии с (2.14) и сокращая на гауссову функцию, перепишем это уравнение в символическом виде

$$f(z)F_1(a) + \exp(2z\bar{\zeta}(a)/\rho^2)F_2(a) = 0,$$

где $f(z)$ — целая аналитическая функция и $F_1(a)$, $F_2(a)$ — некоторые функции от a . Данное равенство справедливо для всех комплексных z и вещественных a только

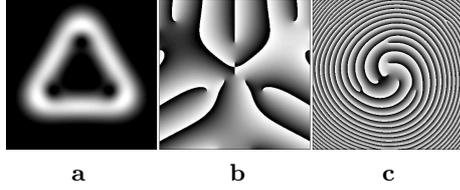


Рис. 15. Интенсивность (а), фаза (б) и фаза вне перетяжки (с) спирального пучка в форме границы правильного треугольника. При вычислении (2.13) в качестве кривой $\zeta(t)$ была использована гипоциклоида $i\nu\rho(2e^{it} + \frac{1}{2}e^{-2it})$, $t \in [0, 2\pi]$. Для N -квантованной кривой $\nu = \sqrt{N/7}$. Данный пучок соответствует $N = 7$

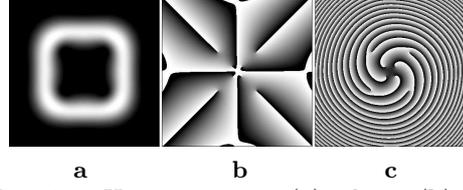


Рис. 16. Интенсивность (а), фаза (б) и фаза вне перетяжки (с) спирального пучка в форме границы квадрата. В качестве порождающей кривой была использована эпициклоида $\zeta(t) = i\nu\rho(3e^{it} - \frac{7}{20}e^{-3it})$, $t \in [0, 2\pi]$. Значение $\nu = \sqrt{200N/3453}$ соответствует N -квантованной эпициклоиде. В данном случае $N = 8$

при $F_1(a) = F_2(a) \equiv 0$ (если $f(z)$ имеет нуль, это следует немедленно. Случай, когда $f(z)$ не имеет нулей, также прост). Поэтому

$$\Psi(a) = \frac{1}{i\rho^2} \int_0^a (\bar{\zeta}\zeta' - \zeta\bar{\zeta}') d\tau, \quad \exp\left(\frac{1}{\rho^2} \int_0^T (\bar{\zeta}\zeta' - \zeta\bar{\zeta}') d\tau\right) = 1$$

и, следовательно, [39]

$$\frac{1}{\rho^2} \int_0^T (\bar{\zeta}(\tau)\zeta'(\tau) - \zeta(\tau)\bar{\zeta}'(\tau)) d\tau = \frac{4iS}{\rho^2} = 2\pi iN,$$

где S — площадь, ограниченная контуром $\zeta(t)$.

Таким образом, интенсивность пучка не зависит от начальной точки интегрирования a лишь для кривых, площадь которых удовлетворяет условию квантования:

$$S = \frac{1}{2}\pi\rho^2 N \quad (N = 1, 2, \dots). \quad (2.15)$$

Будем называть замкнутые кривые, которые удовлетворяют равенству (2.15), N -квантованными кривыми, а спиральные пучки для таких кривых N -квантованными пучками. Если обратиться к квантово-механической аналогии, отмеченной в предыдущем разделе, то спиральным пучкам с $\theta_0 = \pm 1$, $\gamma_0 = 1$ соответствуют волновые функции частицы в постоянном магнитном поле в основном состоянии. При этом условие (2.15) соответствует квантованному магнитному потоку через контур $\zeta(t)$: $\Phi = (2\pi\hbar c/|e|)N$ (см. также [33]).

Условие квантования (2.15) естественно получается из рассмотрения замкнутых аппроксимирующих ломаных как предельный случай дополнительного условия согласования фаз первого и последнего звеньев $\phi_{n-1} = \phi_0 + 2\pi N$ (см. замечание после формулы (2.10)).

На рис. 15, 16 представлены интенсивности и фазы спиральных пучков в виде границ правильного треугольника и квадрата. Площади областей, ограниченных этими кривыми, равны соответственно $\frac{7}{2}\pi\rho^2$ и $4\pi\rho^2$. На фазовых распределениях видно наличие сингулярностей (изолированных нулей интенсивности), количество которых внутри соответствующих областей равно 7 и 8.

2.2.2. Интенсивность и фаза спирального пучка на порождающей кривой

Пучки, построенные для квантованных кривых, обладают характерным свойством. Пусть $\zeta(t)$, $t \in [0, T]$ — замкнутая кривая, удовлетворяющая условию (2.15). Тогда $\mathcal{S}(\zeta(t_0), \bar{\zeta}(t_0) | \zeta(t), t \in [0, T]) \neq 0$ для всех $t_0 \in [0, T]$. Иными словами, целая функция

$$f(z) = \int_0^T \exp\left(-\frac{\zeta(t)\bar{\zeta}(t)}{\rho^2} + \frac{2z\bar{\zeta}(t)}{\rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \int_0^t (\bar{\zeta}_1\zeta'_1 - \zeta_1\bar{\zeta}'_1) d\tau\right) |\zeta'(t)| dt$$

не имеет нулей на квантованной кривой $z \in \zeta(t)$, $t \in [0, T]$.

Для анализа этого утверждения рассмотрим с помощью метода перевала [25] асимптотическое поведение пучков $\mathcal{S}(z, \bar{z} | v\zeta_1)$ при больших значениях параметра v , где ζ_1 — произвольная 1-квантованная кривая без самопересечений. Здесь и далее будет использоваться упрощенная запись $\mathcal{S}(z, \bar{z} | \zeta)$ для спирального пучка, если кривая ζ не требует детализации.

Сделаем замену $z \rightarrow vz$. Тогда

$$\mathcal{S}(vz, v\bar{z} | v\zeta_1) = v \int_0^T \exp\left(-\frac{v^2}{\rho^2} P(t)\right) |\zeta'_1(t)| dt, \quad (2.16)$$

где комплексная функция $P(t)$ имеет вид

$$P(t) = z\bar{z} - 2z\bar{\zeta}_1(t) + \zeta_1(t)\bar{\zeta}_1(t) - \int_0^t (\bar{\zeta}_1(\tau)\zeta'_1(\tau) - \zeta_1(\tau)\bar{\zeta}'_1(\tau)) d\tau.$$

Уравнение на точки перевала $P'(t) = 2\bar{\zeta}'_1(t)(\zeta_1(t) - z) = 0$ в силу отсутствия особых точек ($\bar{\zeta}'_1(t) \neq 0$ для всех t) и самопересечений ($\zeta_1(t_1) \neq \zeta_1(t_2)$ при $t_1 \neq t_2$ и $t_1, t_2 \in [0, T]$) имеет решения лишь для $z \in \zeta_1(t)$, $t \in [0, T]$. Пусть $z = \zeta_1(t_0)$ при некотором $t_0 \in [0, T]$ и пусть $v = \sqrt{n} \gg \rho$. Тогда $\sqrt{n}\zeta_1(t)$ есть n -квантованная кривая, подынтегральная функция в (2.16) T -периодична и равенство (2.16) можно переписать в виде

$$\mathcal{S}(\sqrt{nz}, \sqrt{n\bar{z}} | \sqrt{n}\zeta_1) = \sqrt{n} \int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2} \exp\left(-\frac{n}{\rho^2} P(t)\right) |\zeta'_1(t)| dt.$$

Здесь использовано равенство $\int_0^T f(t) dt = \int_a^{a+T} f(t) dt$, справедливое для любой T -периодической функции f и любого a . Поскольку $t = t_0$ является единственной (и невырожденной) точкой перевала, то

$$\mathcal{S}(\sqrt{n}\zeta_1(t_0), \sqrt{n}\bar{\zeta}_1(t_0) | \sqrt{n}\zeta_1) = \sqrt{\pi\rho} \exp\left(\frac{n}{\rho^2} \int_0^{t_0} (\bar{\zeta}_1\zeta'_1 - \zeta_1\bar{\zeta}'_1) d\tau\right) + O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (2.17)$$

Из (2.17) видно, что в пределе при $n \rightarrow \infty$ интенсивность стремится к $\pi\rho^2$, и, следовательно, начиная с некоторого n (зависящего, конечно, от вида кривой ζ_1), справедливо неравенство $\mathcal{S}(\sqrt{n}\zeta_1(t_0), \sqrt{n}\bar{\zeta}_1(t_0) | \sqrt{n}\zeta_1) \neq 0$. Заметим, что с ростом n распределение интенсивности на кривой $\sqrt{n}\zeta_1(t)$ становится все более однородным, а отсутствие седловых точек для $z \notin \{\zeta_1(t), t \in [0, T]\}$ приводит к падению интенсивности спирального пучка вне кривой $\sqrt{n}\zeta_1(t)$. Таким образом, асимптотическое поведение интенсивности спирального пучка придает математическую основу выражению "пучок в форме кривой $\zeta(t)$ ".

Для $\nu \neq \sqrt{n}$ (т. е. для неквантованной кривой $\nu\zeta_1(t)$) асимптотическая оценка подобна формуле (2.17), если точка t_0 не расположена в непосредственной близости от граничных точек. Однако, если $t_0 = T$ (или $t_0 = 0$), то подынтегральная функция в (2.16) не является T -периодической и заменять отрезок интегрирования $[0, T]$ на $[t_0 - T/2, t_0 + T/2]$ нельзя. В связи с этим следует рассматривать точки $t = 0$ и $t = T$ как два различных решения уравнения на точки перевала, и асимптотическая оценка примет вид

$$\mathcal{S}(\nu\zeta_1(T), \nu\bar{\zeta}_1(T)|\nu\zeta_1) = \sqrt{\pi\rho} \frac{1 + e^{2\pi i\nu^2}}{2} + O\left(\frac{1}{\nu^2}\right). \quad (2.18)$$

Из данного выражения следует, что для $\nu \neq \sqrt{n}$ интенсивность на кривой $\nu\zeta_1(t)$ не стремится при $\nu \rightarrow \infty$ к константе $\pi\rho^2$ и, кроме того, место неоднородности интенсивности на кривой $\nu\zeta_1(t)$ определяется начальной точкой интегрирования. На рис. 17 показаны варианты изменения распределения интенсивности неквантованного спирального пучка треугольной формы в зависимости от выбора начальной точки интервала интегрирования.

Отметим еще раз асимптотический характер полученных выражений. Более детальный анализ формулы (2.17) позволяет усилить утверждение относительно порядка остаточного члена, однако вопрос строгого доказательства неравенства $\mathcal{S}(\sqrt{n}\bar{\zeta}_1(t_0), \sqrt{n}\bar{\zeta}_1(t_0)|\sqrt{n}\zeta_1) \neq 0$ для всех $n \geq 1$ все еще остается открытым.

Можно привести несколько эквивалентных формулировок этого неравенства, например, следующую, в которой отсутствует явное упоминание о спиральных пучках.

Пусть $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [0, T]$ — замкнутая гладкая кривая на плоскости, заданная в параметрическом виде. Пусть:

- 1) кривая начинается и заканчивается в центре координат: $x(0) = x(T) = 0$, $y(0) = y(T) = 0$;
- 2) кривая не имеет точек самопересечения: $x(t_1) + iy(t_1) \neq x(t_2) + iy(t_2)$ при $t_1 \neq t_2$ и $t_1, t_2 \in [0, T]$;
- 3) площадь области, ограниченной данной кривой, удовлетворяет условию квантования:

$$S = \frac{1}{2} \int_0^T (x(t)y'(t) - x'(t)y(t)) dt = \frac{\pi n}{2} \quad (n \geq 1).$$

Тогда справедливо следующее неравенство

$$\int_0^T e^{-x^2(t)-y^2(t)} \cos\left(4 \int_0^t (x(\tau)y'(\tau) - x'(\tau)y(\tau)) d\tau\right) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt > 0. \quad (2.19)$$

Все три условия существенны для данного утверждения, а выражение в левой части последнего неравенства не отделимо от нуля (т.е. нулевая константа не может быть заменена на чуть большую). Основная проблема заключается в эффективном использовании второго условия.⁸ На рис. 18 показан пример спирального

⁸ Простоту его формулировки нельзя недооценивать. В [40] рассматривалась следующая задача: какой формы должна быть прямоугольная полоска бумаги, чтобы из нее можно было сделать ленту Мебиуса? Ясно, что полоска должна быть узкой и длинной (из квадратного листа, например, ленту Мебиуса не сделаешь). Поиск минимально возможного отношения длины полоски к ее ширине привел к следующему результату:

$$\frac{\pi}{2} \leq \inf \frac{\text{длина}}{\text{ширина}} \leq \sqrt{3},$$

однако точное равенство не было найдено, поскольку не удалось ответить на все тот же вопрос: "Как использовать условие отсутствия самопересечений?"

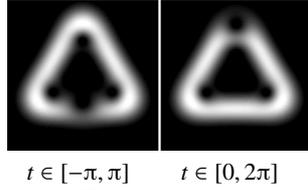


Рис. 17. Интенсивности спиральных пучков (2.13), построенных для гипоциклоиды $\zeta(t) = 1,0425i\rho(2e^{it} + \frac{1}{2}e^{-2it})$ и различных интервалах интегрирования. Параметр 1,0425 находится между 1 и $\sqrt{8/7}$, что соответствует промежуточному положению между 7- и 8-квантованной кривыми

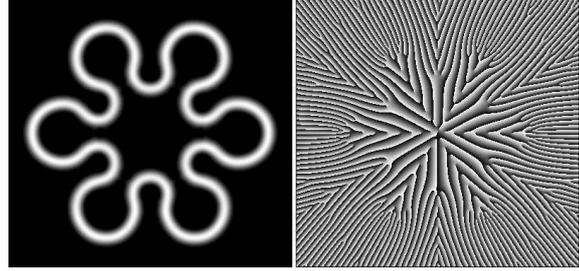


Рис. 18. Интенсивность и фаза спирального пучка, построенного по 97-квантованной кривой в форме снежинки

пучка, иллюстрирующий эту трудность. В тех местах, где участки кривой почти касаются друг друга, присутствующие нули подходят очень близко к порождающей кривой, и только условие 2 мешает им расположиться на самой кривой и, тем самым, превратить неравенство (2.19) в равенство.

2.2.3. Число нулей спирального пучка внутри области, ограниченной порождающей кривой

Рассмотрим циркуляцию градиента фазы квантованного пучка $\mathcal{S}(z, \bar{z} | \sqrt{N}\zeta_1) = \sqrt{I(x, y)}e^{i\varphi(x, y)}$ вдоль своего порождающего контура. Как следует из [18, 28] и отмечено во введении,

$$\oint_{\sqrt{N}\zeta_1} \nabla\varphi \cdot d\mathbf{r} = 2\pi \sum_n \text{sgn rot}_0 \mathbf{j}(z_n), \quad (2.20)$$

где скалярная функция

$$\text{rot}_0 \mathbf{j} = \frac{1}{k} \left(\frac{\partial I}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial I}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)$$

есть продольная составляющая ротора вектора потока световой энергии \mathbf{j} , и суммирование производится по всем нулям z_n спирального пучка, находящимся внутри контура $\sqrt{N}\zeta_1(t)$ с учетом кратности.⁹

Для спиральных пучков (2.13), как и для общих пучков (2.2), имеет место $\text{rot}_0 \mathbf{j}(z_n) = -\text{sgn } \theta_0 = 1$, поэтому

$$\oint_{\sqrt{N}\zeta_1} \nabla\varphi \cdot d\mathbf{r} = 2\pi N_0,$$

где N_0 — количество нулей пучка $\mathcal{S}(z, \bar{z} | \sqrt{N}\zeta_1)$ внутри контура $\sqrt{N}\zeta_1(t)$ с учетом их кратности.

Покажем, что

$$N_0 = N. \quad (2.21)$$

⁹ Если z_n — вырожденный нуль, то $\text{rot}_0 \mathbf{j}(z_n) = 0$ и формула (2.20) нуждается в уточнении. Можно показать, что для спиральных пучков (2.1) функция $\text{rot}_0 \mathbf{j}(z)$ знакопостоянна в малой окрестности точки z_n . Поэтому $\text{sgn rot}_0 \mathbf{j}(z_n)$ в данном случае понимается как $\lim_{z \rightarrow z_n} \text{sgn rot}_0 \mathbf{j}(z)$.

Поскольку $N = 2S/\pi\rho^2$, то равенство (2.21) связывает число нулей квантованного пучка в области, ограниченной порождающей кривой, с площадью самой области.

Предваряя доказательство, рассмотрим построение спиральных пучков в форме окружности. Используя представление (2.13) и отбрасывая несущественный постоянный множитель, получающийся в результате интегрирования, найдем следующее выражение:

$$\mathcal{S}(z, \bar{z} | Re^{it}, t \in [0, 2\pi]) = \exp\left(-\frac{z\bar{z}}{\rho^2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2R^2/\rho^2 - n)\pi}{2R^2/\rho^2 - n} \frac{(-2zR/\rho^2)^n}{n!}.$$

Из условия квантования для окружности $S = \pi R^2 = \frac{1}{2}\pi\rho^2 N$ следует $2R^2/\rho^2 = N$ и ряд сводится к одному N -му члену:

$$\mathcal{S}\left(z, \bar{z} \left| \rho \sqrt{\frac{1}{2}N} e^{it}, t \in [0, 2\pi] \right.\right) = \exp\left(-\frac{z\bar{z}}{\rho^2}\right) \left(\frac{z}{\rho}\right)^N. \quad (2.22)$$

Таким образом, квантованными спиральными пучками для окружности являются известные пучки Лагерра—Гаусса. Справедливость равенства (2.21) в этом случае очевидна.

Предположим теперь, что существует некоторая N -квантованная кривая $\hat{\zeta}(t)$, для которой не выполняется равенство (2.21). Тогда построим семейство замкнутых кривых $\zeta(t, c)$, зависящее от параметра $c \in [0, 1]$, которое начинается с N -квантованной окружности $\zeta(t, 0) = \rho \sqrt{\frac{1}{2}N} e^{it}$, заканчивается кривой $\zeta(t, 1) = \hat{\zeta}(t)$ и имеет фиксированную площадь ограничиваемой области $S = \frac{1}{2}\pi\rho^2 N$ для каждой кривой $\zeta(t, c)$. Это гарантирует выполнение условия квантования (2.15) для всех $c \in [0, 1]$ при непрерывной деформации окружности. С другой стороны, спиральный пучок для окружности удовлетворяет условию (2.21), а спиральный пучок для кривой $\hat{\zeta}(t)$ нет. Поэтому при некотором c число нулей N -квантованного спирального пучка $\mathcal{S}(z, \bar{z} | \zeta(t, c))$ в области, ограничиваемой контуром $\zeta(t, c)$, должно измениться. Относительно механизма изменения количества нулей спирального пучка при изменении порождающей кривой справедливы следующие рассуждения. Нули спирального пучка есть нули соответствующей аналитической функции. Из принципа максимума модуля [22] следует, что модуль аналитической функции не имеет минимума внутри области, если только этот минимум не есть нуль функции. Следовательно, никакой нуль не может возникнуть из минимума модуля функции или трансформироваться в минимум внутри области при изменении параметра c , поскольку никакого такого минимума для аналитической функции не существует. Поэтому изменение числа нулей есть результат проникновения нуля снаружи области, ограниченной контуром $\zeta(t, c)$, вовнутрь или наоборот. Но в таком случае существует такое значение параметра $c = c_0$, при котором спиральный пучок $\mathcal{S}(z, \bar{z} | \zeta(t, c_0))$ имеет нуль на контуре $\zeta(t, c_0)$, что, как уже отмечалось, невозможно.

Таким образом, квантованному пучку соответствует строго определенное количество фазовых сингулярностей внутри области, ограниченной порождающей кривой, которое зависит от площади области, но не от ее формы [39]. Отсюда следует, что при изменении площади области, например, от $S = \frac{1}{2}\pi\rho^2 N$ до $S = \frac{1}{2}\pi\rho^2(N + 1)$ происходит увеличение числа нулей внутри области посредством прихода одного нуля извне. На рис. 19 показана эволюция спирального пучка для

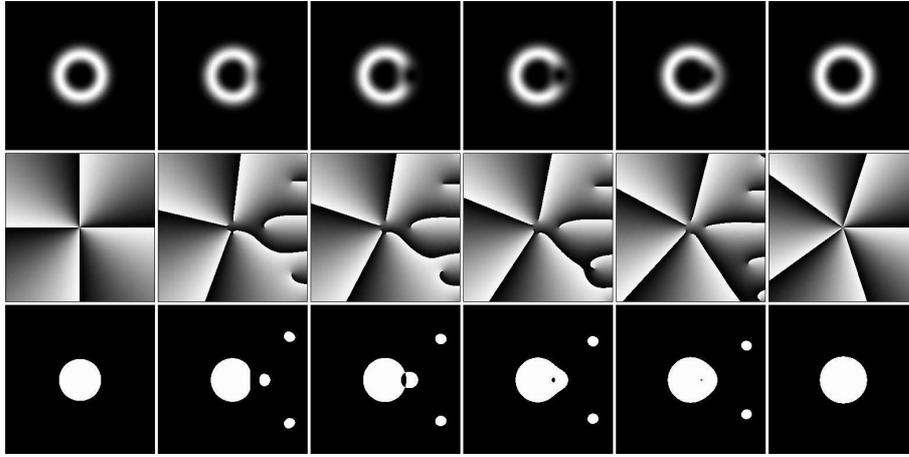


Рис. 19. Эволюция спирального пучка при изменении радиуса порождающей окружности: интенсивность (верхний ряд), фаза (средний ряд) и знак ротора $\text{rot}_0 \mathbf{j}$ вектора потока световой энергии (нижний ряд). Черный цвет соответствует отрицательным значениям ротора, белый — положительным

окружности $\zeta(t) = Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ при $2R^2/\rho^2 \in [4, 0; 5, 0]$ и виден процесс проникновения нуля внутрь контура. Ограниченные размеры графических изображений не позволяют вместе с изменениями в центре кольца увидеть, что происходит в это время на периферии. С увеличением радиуса R порождающей окружности, когда спиральный пучок перестает быть квантованным и вырожденный нуль в центре распадается на четыре простых, на бесконечности образуется клин нулей, который по мере роста R все ближе и ближе подходит к этой четверке. Нуль, находящийся на острие клина, внедряется внутрь круга, ограниченного порождающей окружностью, остальные нули остаются снаружи. После этого начинается одновременное сближение внутренней пятерки нулей и удаление от них клина нулей, потерявшего одного своего представителя. Когда спиральный пучок вновь становится квантованным, нули в центре сливаются в нуль пятого порядка, а клин исчезает на бесконечности. Зона проникновения нуля, как было сказано выше, определяется точкой начала интегрирования.

2.2.4. Спиральные пучки для симметричных кривых

Симметрия замкнутых кривых проявляется в свойствах соответствующих спиральных пучков. Пусть кривая $\zeta(t)$, $t \in [0, 2\pi]$ переходит в себя при повороте на угол $2\pi/M$, т. е. $\zeta(t+2\pi/M) = \zeta(t) \exp(2\pi i/M)$. Тогда квантованные спиральные пучки $\mathcal{S}(z, \bar{z} | \zeta_n)$, построенные по соответствующим квантованным кривым $\zeta_n(t)$, обладают следующими свойствами:

а) $\mathcal{S}(ze^{2\pi i/M}, \bar{z}e^{-2\pi i/M} | \zeta_n) = \mathcal{S}(z, \bar{z} | \zeta_n) e^{2\pi i n/M}$;

б) $\mathcal{S}(z, \bar{z} | \zeta_n)$ имеет в точке $z = 0$ нуль кратности $n - [n/M]M$. Если $n \geq M$, то остальные нули, находящиеся внутри контура $\zeta_n(t)$, расположены в вершинах правильных M -угольников (одного или нескольких). Например, $M = 3$ для гипциклоиды Δ_7 : $\zeta(t) = i\rho(2e^{it} + \frac{1}{2}e^{-2it})$, $t \in [0, 2\pi]$. Поэтому пучок $\mathcal{S}(z, \bar{z} | \Delta_7)$ содержит простой нуль в точке $z = 0$ и шесть других в вершинах двух правильных треугольников (см. рис. 15);

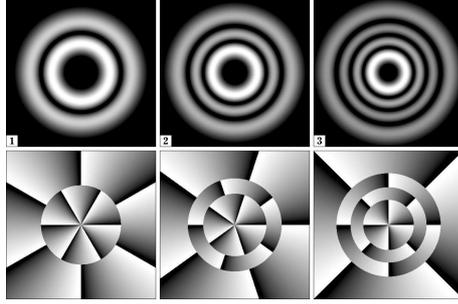


Рис. 20. Интенсивности и фазы пучков Лагерра–Гаусса $\mathcal{L}_{m,7-m}(x, y)$ при $m = 1, 2, 3$

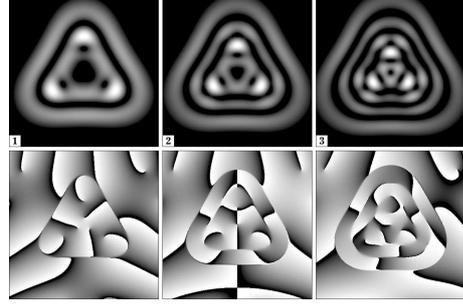


Рис. 21. Интенсивности и фазы спиральных пучков $\mathcal{S}_m(z, \bar{z} | \Delta)$ при $m = 1, 2, 3$

в) Если $n - m$ не делится на M , то пучки $\mathcal{S}(z, \bar{z} | \zeta_n)$ и $\mathcal{S}(z, \bar{z} | \zeta_m)$ ортогональны в пространстве $L_2(\mathbb{R}^2)$. Для доказательства достаточно заметить, что

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}(z, \bar{z} | \zeta_n), \mathcal{S}(z, \bar{z} | \zeta_m))_{L_2(\mathbb{R}^2)} &= \iint_{\mathbb{R}^2} \mathcal{S}(x + iy, x - iy | \zeta_n) \overline{\mathcal{S}(x + iy, x - iy | \zeta_m)} dx dy = \\ &= \int_0^{2\pi} \mathcal{S}(\zeta_m, \bar{\zeta}_m | \zeta_n) \exp\left(-\frac{1}{\rho^2} \int_0^t (\bar{\zeta}_m \zeta'_m - \zeta_m \bar{\zeta}'_m) d\tau\right) |\zeta'_m(t)| dt = \\ &= \int_0^{2\pi/M} \mathcal{S}(\zeta_m, \bar{\zeta}_m | \zeta_n) \exp\left(-\frac{1}{\rho^2} \int_0^t (\bar{\zeta}_m \zeta'_m - \zeta_m \bar{\zeta}'_m) d\tau\right) |\zeta'_m(t)| dt \sum_{k=0}^{M-1} e^{2\pi i(n-m)k/M} = 0. \end{aligned}$$

Например, для окружности в качестве M можно взять сколь угодно большое натуральное число. Поэтому $(\mathcal{S}(z, \bar{z} | \zeta_n), \mathcal{S}(z, \bar{z} | \zeta_m))_{L_2(\mathbb{R}^2)} = 0$ для всех $n \neq m$. Этот результат хорошо известен, поскольку является частным случаем ортогональности мод Лагерра–Гаусса.

2.2.5. Спиральные пучки как обобщения мод Лагерра–Гаусса

Согласно (2.22), моды Лагерра–Гаусса $\mathcal{L}_{0,n}(x, y) = e^{-x^2 - y^2} (x + iy)^n$ есть частный случай квантованных спиральных пучков, когда в качестве порождающей кривой выбирается окружность. Можно получить все семейство мод Лагерра–Гаусса в терминах порождающих кривых. Для этого перепишем выражение (1.20) при $l = 0$ в следующем виде:

$$\mathcal{S}_m(z, \bar{z}) = e^{z\bar{z}} \frac{\partial^m}{\partial Z^m} \left(e^{-2Z\bar{Z}} f(Z) \right) = \left(\rho \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\bar{z}}{\rho} \right)^m \mathcal{S}(z, \bar{z}). \quad (2.23)$$

Здесь $z = x + iy$, $Z = z/\rho$, $\mathcal{S}(z, \bar{z}) = \exp(-z\bar{z}/\rho^2) f(z/\rho)$ и вместо N используется обозначение m . Отметим, что оператор, действующий на $\mathcal{S}(z, \bar{z})$, есть оператор рождения для гамильтониана, описывающего движение частицы в однородном магнитном поле [42].

Подставляя вместо $\mathcal{S}(z, \bar{z})$ спиральный пучок для n -квантованной окружности $\mathcal{S}(z, \bar{z} | \zeta_n) = \exp(-z\bar{z}/\rho^2) (z/\rho)^n$, получим с точностью до постоянного множителя моды Лагерра–Гаусса общего вида (см. рис. 20):

$$\mathcal{S}_m(z, \bar{z} | \zeta_n) = \mathcal{L}_{\min(m,n), n-m} \left(\frac{x}{\rho}, \frac{y}{\rho} \right).$$

Таким образом, спиральные пучки в виде замкнутых кривых можно рассматривать как обобщение пучков Лагерра—Гаусса $\mathcal{L}_{0,n}(x, y)$. Эту аналогию можно продолжить и построить для каждой порождающей кривой семейство спиральных пучков, соответствующее полному семейству пучков Лагерра—Гаусса. Для этого в представлении (2.23) в качестве поля $\mathcal{S}(z, \bar{z})$ выберем n -квантованный спиральный пучок в форме произвольной порождающей кривой $\zeta(t)$. Тогда полученное поле будет иметь вид:

$$\mathcal{S}_m(z, \bar{z} | \sqrt{n}\zeta_1) = \left(\rho \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\bar{z}}{\rho} \right)^m \mathcal{S}(z, \bar{z} | \sqrt{n}\zeta_1). \quad (2.24)$$

Здесь, как и ранее, $\zeta_1(t)$ — 1-квантованная кривая. Пучки (2.24) поворачиваются при распространении, как и исходный пучок $\mathcal{S}(z, \bar{z} | \sqrt{n}\zeta_1)$, т. к. имеют тот же параметр вращения $\theta_0 = -1$. Кроме того, они наследуют черты порождающей кривой. Примеры пучков для 7-квантованной гипоциклоиды треугольной формы, аналогичные пучкам Лагерра—Гаусса, приведены на рис. 21. Интересно отметить, что, в отличие от пучков Лагерра—Гаусса, линии пониженной интенсивности уже не являются нулевыми линиями и данная структура интенсивности обеспечивается лишь изолированными нулями, имеющими достаточно сложный вид и имитирующими нулевые линии интенсивности.

2.3. Методы синтеза структурно устойчивых пучков с заданным распределением интенсивности

2.3.1. Метод амплитудно-фазовой маски

Экспериментальная реализация спиральных пучков (2.13) осуществлялась следующим образом [39]. Рассчитанные на компьютере амплитудные полутонные маски для амплитуды и фазы были сделаны на фотоплоттере (разрешение 1024×1024 элементов, размер 10×10 мм²). Амплитудная маска фазы использовалась для изготовления фазового элемента на бихромированной желатине. Комбинация амплитудной A и фазовой P масок дает требуемое амплитудно-фазовое распределение. Для реализации спирального пучка треугольного вида (см. рис. 15 а,с) было использовано фазовое распределение, показанное на рис. 15 с, поскольку его пространственная частота выше, чем у распределения на рис. 15 б. Кроме того, на фазовое распределение в перетяжке пучка налагалась квадратичная фазовая добавка с кривизной волнового фронта $0,002$ мм⁻¹ для увеличения дифракционной эффективности фазового элемента.

Схема эксперимента приведена на рис. 22. Пучок от лазера L расширяется и освещает амплитудно-фазовый элемент AP (элемент был повернут на 90° по сравнению с распределением, показанным на рис. 15). Линза 3 ($f = 250$ мм) осуществляет фокусировку $+1, 0, -1$ порядков дифракции в плоскости $+1, 0, -1$ соответственно. Дифракционная эффективность в этих порядках была следующей: $\eta_1 : \eta_2 : \eta_3 \approx 10 : 7 : 3$, $\eta_1 \approx 40\%$. Схематично картина распределений интенсивности в плоскостях $0, \pm 1$ показана в нижней части рисунка. В порядках $+1$ и -1 реализуются спиральные пучки, вращающиеся в противоположные стороны: $\mathcal{S}_{+1} = \exp(-z\bar{z})f(z)$, $\mathcal{S}_{-1} = \exp(-z\bar{z})\overline{f(z)}$. В нулевом порядке наблюдается обычная картина дифракции на амплитудном транспаранте A . Это поле не является спиральным пучком и при фокусировке в плоскости 0 не сохраняет свою структуру. На рис. 23 представлено экспериментальное распределение интенсивности в порядке дифракции $+1$ на плоскости $+1$.

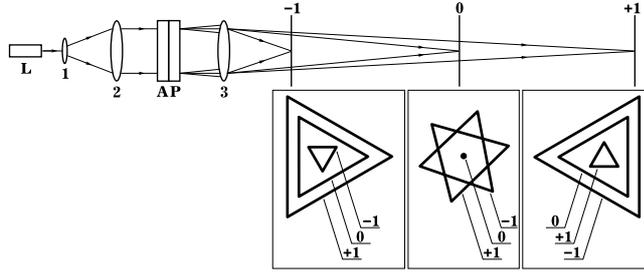


Рис. 22. Схема эксперимента для синтеза спирального пучка в форме границы правильного треугольника



Рис. 23. Экспериментальное распределение интенсивности спирального пучка в форме треугольника (+1 порядок дифракции)

2.3.2. Метод астигматического преобразования

Рассмотрим теперь другой способ реализации спиральных пучков в виде кривых, основанный на использовании астигматического преобразования (1.26) пучков Эрмита—Гаусса в пучки Лагерра—Гаусса. Его частный вариант

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-i(x\xi + y\eta) + \frac{2i\xi\eta}{\rho^2}\right) \mathcal{H}_{n,0}\left(\frac{\xi}{\rho}, \frac{\eta}{\rho}\right) d\xi d\eta = \\ = \frac{\pi\rho^2}{\sqrt{2}} (-2i)^n \exp\left(-\frac{i\rho^2 xy}{4}\right) \mathcal{L}_{0,n}\left(\frac{\rho x}{2\sqrt{2}}, \frac{\rho y}{2\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

дает возможность синтеза спиральных пучков $e^{-z\bar{z}^n}$ и может быть обобщен следующим образом:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-i(x\xi + y\eta) + \frac{2i\xi\eta}{\rho^2} - \frac{\eta^2}{\rho^2}\right) g\left(\frac{\xi}{\rho}\right) d\xi d\eta = \\ = \sqrt{\pi}\rho^2 \exp\left(-\frac{i\rho^2 xy}{4}\right) \mathcal{S}(\rho(x + iy), \rho(x - iy)) \end{aligned} \quad (2.25)$$

Здесь $g(\xi) \in L_2(\mathbb{R})$ и спиральный пучок $\mathcal{S}(z, \bar{z})$ имеет вид

$$\mathcal{S}(z, \bar{z}) = \exp\left(-\frac{1}{8}z\bar{z} + \frac{1}{8}z^2\right) \int_{\mathbb{R}} \exp(-\xi^2 - iz\xi) g(\xi) d\xi.$$

Используя преобразование (2.25), можно предложить следующую последовательность действий для экспериментального синтеза спиральных пучков:

- для некоторой функции $g(\xi)$ сформировать световое поле $\exp(-\eta^2/\rho^2)g(\xi/\rho)$;
- выполнить астигматическое преобразование данного поля;
- скомпенсировать астигматизм после преобразования.

Например, для $g(\xi) = \text{rect}(\xi/a)$ реализуется спиральный пучок—"отрезок", подобный изображенному на рис. 11. Тогда для

$$g(\xi) = \text{rect}\left(\frac{\xi}{a}\right) \sum_{n=-N}^N e^{in\omega\xi}$$

полученный спиральный пучок будет иметь вид $2N + 1$ параллельных вертикальных пучков—"отрезков":

$$\mathcal{S}_N(z, \bar{z}) = \sum_{n=-N}^N \exp\left(-\frac{1}{8}z\bar{z} + \frac{1}{8}z^2\right) \int_{-a}^a \exp(-\xi^2 - i\xi(z - n\omega)) d\xi. \quad (2.26)$$

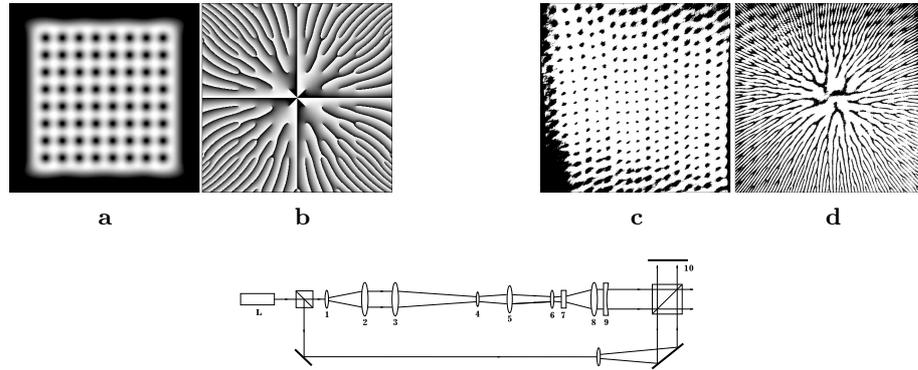


Рис. 24. Теоретические расчеты и экспериментальная реализация спиральных пучков в форме решетки нулей, а также оптическая схема для синтеза таких пучков. Интенсивность (a) и фаза (b) спирального пучка $\mathcal{S}(z, \bar{z} | \mathbb{H}_{\times 8})$ (теория); интенсивность (c) и результат интерференции между спиральным и опорным пучками (d) (эксперимент)

При $\omega \sim \omega_0 = 2\sqrt{\pi}$ отдельные пучки ”слипаются”, и пучок (2.26) принимает форму симметричной по x, y решетки нулей (см. рис. 24 a,b). Частота ω_0 получается из следующих соображений. При $a \gg 1$ и $N \rightarrow \infty$ пучок (2.26) может быть представлен в виде

$$\mathcal{S}_{\infty}(z, \bar{z}) = \sqrt{\pi} \exp\left(-\frac{1}{8}z\bar{z} - \frac{1}{8}z^2\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{4}\omega^2 n^2 + \frac{1}{2}\omega z n\right).$$

Здесь последний ряд есть тэта-функция ϑ_3 . Полагая $\omega = \omega_0$ и используя формулу Пуассона для данной тэта-функции [43]

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-\pi n^2 + 2inz) = \exp\left(-\frac{z^2}{\pi}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-\pi n^2 + 2nz),$$

получаем симметричность и периодичность интенсивности:

$$|\mathcal{S}_{\infty}(z, \bar{z})|^2 = |\mathcal{S}_{\infty}(iz, -i\bar{z})|^2 = |\mathcal{S}_{\infty}(z + \omega_0, \bar{z} + \omega_0)|^2 = |\mathcal{S}_{\infty}(z + i\omega_0, \bar{z} - i\omega_0)|^2.$$

Пучок (2.26) был реализован при помощи решетки Даммана с пространственной частотой ω_0 в качестве мультиплицирующего элемента. Схема эксперимента показана на рис. 24. Пучок, выходящий из лазера L , расширяется и коллимируется сферическими объективами 1, 2. Цилиндрические объективы 3, 4 сжимают пучок в одном направлении и вместе с астигматическим преобразователем, состоящим из сферического 5 и цилиндрического 6 объективов, формируют поле вида $\exp(-\eta^2/\rho^2) \text{rect}(\xi/a) \exp(2i\xi\eta/\rho^2)$. Непосредственно за цилиндрическим объективом 6 располагалась дифракционная решетка 7, дающая 17 порядков одинаковой интенсивности. За решеткой астигматическое преобразование (2.25) реализовывалось в зоне Фраунгофера, и распределение интенсивности выходного пучка выглядело как решетка нулей. Компенсация астигматизма на выходе из преобразователя осуществлялась комбинацией из длиннофокусных цилиндрических собирающей 8 и рассеивающей 9 линз. Второе плечо схемы использовалось для интерферометрической визуализации фазы спирального пучка на экране 10. При этом кривизна

опорного фронта подбиралась равной кривизне пучка из преобразователя. Результаты эксперимента представлены на рис. 24, с, d. Как видно из рис. 24, d, в каждом изолированном нуле происходит ветвление интерференционной полосы, что соответствует особенности фазы в этой точке. Во всех нулях интенсивности значения ротора вектора потока световой энергии имеют одинаковый знак (одинаковый топологический заряд). Искажение структуры вихревой решетки в эксперименте по сравнению с теоретическим распределением обусловлено наличием некоторых остаточных аберраций.

На основе астигматического преобразования возможен еще один, родственный предыдущему, способ формирования спиральных пучков. Пусть $\mathcal{S}_m(z, \bar{z})$ — пучок вида (2.23). Тогда справедливо следующее равенство:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-i(x\xi + y\eta) + \frac{2i\xi\eta}{\rho^2}\right) \mathcal{S}_m(\xi + i\eta, \xi - i\eta) d\xi d\eta = \\ = \frac{\pi\rho^2}{\sqrt{2}} \left(\frac{i}{\rho}\right)^m \exp\left(-\frac{i\rho^2 xy}{4} - \frac{\rho^2 x^2}{8}\right) H_m\left(\frac{\rho x}{2}\right) h(y), \end{aligned} \quad (2.27)$$

где $H_m(t)$ — полином Эрмита и

$$h(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\rho^2 y^2}{8}\right) \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} f\left(\frac{\rho y}{2} + it\right) dt. \quad (2.28)$$

Легко видеть, что вся информация о структуре спирального пучка заложена в $h(y)$, которая является функцией одной переменной. Таким образом, эта функция осуществляет своеобразное одномерное кодирование двумерного спирального пучка.

Если в формуле (2.27) положить $m = 0$ и в качестве спирального пучка взять пучок $\mathcal{S}(z, \bar{z} | \zeta)$ в форме кривой $\zeta(t)$, то функция h примет вид

$$\begin{aligned} h(y | \zeta) = \exp\left(-\frac{\rho^2 y^2}{8}\right) \times \\ \times \int_0^T \exp\left(-\frac{\bar{\zeta}^2(t)}{\rho^2} - \frac{\zeta(t)\bar{\zeta}(t)}{\rho^2} + y\bar{\zeta}(t) + \frac{1}{\rho^2} \int_0^t (\bar{\zeta}\zeta' - \zeta\bar{\zeta}') d\tau\right) |\zeta'(t)| dt. \end{aligned}$$

В частности, для квантованной окружности получается одномерная мода Эрмита–Гаусса:¹⁰

$$h(y | \mathcal{O}_n) = \exp\left(-\frac{\rho^2 y^2}{8}\right) H_n\left(\frac{\rho y}{2}\right).$$

Для синтеза спиральных пучков с помощью кодировочных функций можно предложить следующий метод:

- а) синтезировать одномерный амплитудно-фазовый элемент $h(y)$;
- б) осуществить "восстановление" интенсивности спирального пучка астигматическим одномерным пучком Эрмита–Гаусса $\exp\left(-\frac{1}{8}\rho^2(x^2 + 2ixy)\right) H_m\left(\frac{1}{2}\rho x\right)$ в дальней зоне дифракции либо в Фурье-плоскости.

На рис. 25, 26 показаны амплитудно-фазовые элементы, соответствующие спиральным пучкам треугольной формы. Аналогичный амплитудно-фазовый элемент для спирального пучка в форме решетки нулей показан на рис. 27. Одномерная структура таких элементов позволяет в полной мере использовать возможности микролитографии, поэтому данный способ может быть технологически более предпочтителен, чем метод амплитудно-фазовой маски.

¹⁰ Интересно отметить появление этой функции в формуле (2.27).

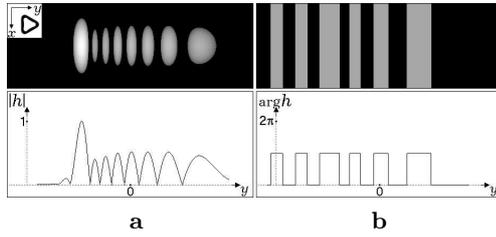


Рис. 25. Амплитудно-фазовый элемент для спирального пучка треугольной формы (см. рис. 15). Полутонные изображения представляют собой амплитуду (а) и фазу (b) распределения $\exp(-\frac{1}{8}\rho^2 x^2)h(y|\triangleright_7)$; графики соответствуют амплитуде (а) и фазе (b) одномерной функции $h(y|\triangleright_7)$

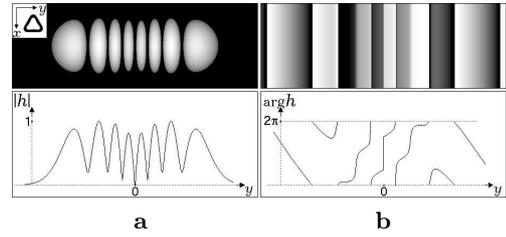


Рис. 26. Амплитудно-фазовый элемент, аналогичный изображенному на предыдущем рисунке и построенный для той же 7-квантованной гипоциклоиды, но повернутой на 90° . В отличие от $h(y|\triangleright_7)$, которая была вещественной, функция $h(y|\Delta_7)$ уже является комплекснозначной

В заключение данного раздела рассмотрим связь полученных пучков с некоторыми известными преобразованиями.

1. Обратимся к астигматическому преобразованию (2.25) и перепишем полученный спиральный пучок $\mathcal{S}(z, \bar{z})$ в виде

$$\mathcal{S}(2iz, -2i\bar{z}) = \exp(-\frac{1}{2}z\bar{z}) \int_{\mathbb{R}} \exp(-\frac{1}{2}z^2 + 2z\xi - \xi^2) g(\xi) d\xi = \exp(-\frac{1}{2}z\bar{z}) f(z).$$

Тогда получаем преобразование Габора [46] функции $g(\xi)$, в котором аналитическая функция $f(z)$ связана с $g(\xi)$ посредством интегрального преобразования с ядром $\exp(-\frac{1}{2}z^2 + 2z\xi - \xi^2)$. С другой стороны, в квантовой механике [41] связь между координатным представлением состояния $|q\rangle$ и представлением Фока–Баргмана $\langle z|$ осуществляется интегральным преобразованием с ядром

$$\langle z|q\rangle = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi\hbar}} \exp\left(-\frac{z^2}{2} + \frac{2zq}{\sqrt{2\hbar}} - \frac{q^2}{2\hbar}\right).$$

Таким образом, астигматическое преобразование (2.25) реализует оптическим путем связь двух квантово-механических представлений.

2. Из (2.25) следует также возможность оптической реализации аналитического продолжения Фурье-образа поля $g(\xi)$ с помощью астигматического преобразования. Например, для финитного поля $g(\xi)$ с носителем $[-a, a]$ последовательность

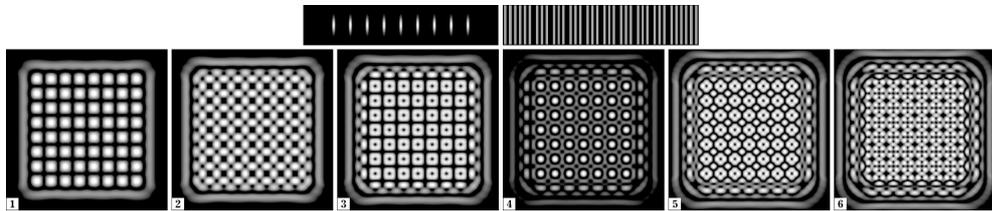


Рис. 27. Верхний ряд: амплитуда и фаза кодировочного элемента для спирального пучка $\mathcal{S}(z, \bar{z}|\mathbb{M}_{\times 8})$ (см. рис. 24 а,б). Нижний ряд: интенсивности спиральных пучков $\mathcal{S}_m(z, \bar{z}|\mathbb{M}_{\times 8})$, построенных по формуле (2.23) при $1 \leq m \leq 6$. Как видно из рисунка, кодировочная функция для решетки нулей вещественна. Поскольку кодировочная функция для квантованной окружности также вещественна, то любой пучок в форме решетки нулей может быть получен с помощью астигматического преобразования произведения одномерных вещественных функций

действий следующая. Сначала поле $g(\xi)$ пропускается через амплитудную маску $\exp(-a^2 + \xi^2 - \eta^2)$ и астигматический фазовый элемент $\exp(2i\xi\eta)$. Затем осуществляется оптическое преобразование Фурье. Нули выходного поля есть нули аналитического продолжения Фурье-образа поля $g(\xi)$. Полученное аналитическое продолжение может быть использовано в качестве основы нового метода восстановления фазы [47].

3. Эволюция поля $F(x, y, 0) = \exp(-\frac{1}{8}\rho^2 y^2) h(\rho x|\zeta)$ из (2.28) при распространении имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} F(x, y, l) &= \frac{k}{2i\pi l} \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(\frac{ik}{2l}[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]\right) F(\xi, \eta, 0) d\xi d\eta = \\ &= \frac{1}{\sigma} \exp\left(\frac{i l \rho^4 (x^2 + y^2)}{32k|\sigma|^2}\right) \exp\left(-\frac{\rho^2 y^2}{8|\sigma|^2}\right) h\left(\frac{\rho x}{|\sigma|} \left| \zeta e^{i \arg \sigma} \right. \right). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Здесь $\sigma = 1 + il\rho^2/4k$. Сравнивая (2.28) и (2.29), находим, что для каждого l вышеприведенное поле $F(x, y, l)$ с точностью до масштаба и фазового множителя совпадает с астигматическим преобразованием спирального пучка $\mathcal{S}(ze^{-i \arg \sigma}, \bar{z}e^{i \arg \sigma}|\zeta)$, который получается из исходного спирального пучка поворотом на угол $\arg \sigma$.

Преобразованию (2.29) и соответствующему астигматическому преобразованию можно дать геометрическую интерпретацию. Рассмотрим трехмерное комплексное распределение (см. также [36, 39])

$$W(x, y, l) = \exp\left(-\frac{2ixu}{\rho^2} - \frac{2y^2}{\rho^2}\right) \mathcal{S}(x + iu, x - iu|\zeta).$$

Проекция этого распределения на плоскость $u = 0$ есть

$$W_{\text{PR}}(x, y) = \int_{\mathbb{R}} W(x, u, y) du = \sqrt{\pi} \exp\left(-\frac{2y^2}{\rho^2}\right) h\left(\frac{4x}{\rho} \left| \zeta \right. \right).$$

Эта проекция с точностью до масштаба совпадает с $F(x, y, 0)$. Соответственно, при повороте распределения $W(x, u, y)$ на угол $\arg \sigma$ вокруг оси y его проекция на плоскость $u = 0$ с точностью до масштаба и фазового множителя совпадает с $F(x, y, l)$. Таким образом, эволюция поля $F(x, y, l)$ при распространении выглядит как изменение проекции $W(x, u, y)$ при его вращении вокруг оси y .

2.4. Синтез фазовых элементов для фокусировки в кривые

Спиральные пучки, в силу своей структурной устойчивости, всегда являются амплитудно-фазовыми, но не чисто фазовыми световыми полями. В связи с этим, внрезонаторные методы синтеза световых полей как преобразование некоторого исходного поля посредством амплитудно-фазовых оптических элементов неизбежно связаны с потерей существенной доли энергии преобразованного поля. Это делает такие методы неоптимальными для прикладных задач. С другой стороны, структурная устойчивость поля при распространении и фокусировке не всегда является необходимой: вполне достаточно добиться эффективного преобразования исходного светового поля в поле с заданным распределением интенсивности в некоторой плоскости. Поэтому естественна постановка задачи: "обменять" структурную устойчивость спирального пучка на возможность формирования заданного распределения интенсивности в определенной плоскости чисто фазовым оптическим элементом.

Задача синтеза фазовых элементов для формирования световых полей с заданным распределением интенсивности (фокусаторов) известна и имеет уже свою историю и библиографию (см., например, [48]). В математическом плане задача фокусировки лазерного излучения сводится к нахождению некоторой кусочно-гладкой фазовой функции $\exp(i\varphi(\xi, \eta))$, преобразование Френеля от которой при $l = l_0$ дает требуемое распределение интенсивности $I(x, y)$:

$$I(x, y) = |F(x, y)|^2 = \left| \frac{k}{2\pi i l_0} \iint_{\Omega} \exp\left(\frac{ik}{2l_0}[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]\right) e^{i\varphi(\xi, \eta)} d\xi d\eta \right|^2. \quad (2.30)$$

Здесь Ω — апертура оптического элемента.

Необходимо также отметить, что выражение "требуемое распределение интенсивности $I(x, y)$ " нужно понимать не в смысле аналитического представления функции I , а несколько шире. Так, например, очевидно, что задача фокусировки (2.30) при $I(x, y) = \text{rect}(x/a)\text{rect}(y/b)$ не имеет решений ни при каких положительных a и b , поскольку для любого поля конечных размеров интенсивность $I(x, y)$ является целой аналитической функцией по обеим переменным. Тем не менее задача фокусировки в прямоугольник с соотношением сторон a/b является одной из самых распространенных [48, 49].

В связи с этим при фокусировке лазерного излучения в кривую L (другой широко рассматриваемый случай — двумерная область) предполагается, что распределение интенсивности $I(x, y)$ должно быть максимально в точках кривой L или некоторой ее ε -окрестности (размер ε много меньше длины L), а совокупная доля энергии в этой окрестности как можно ближе к 100%. Кроме того, более-менее однородное распределение интенсивности на кривой L является еще одним важным моментом, который должен учитываться при решении задачи. Суммируя все вышесказанное, можно считать, что задача фокусировки лазерного излучения в некоторую кривую L решена, если в результате фокусировки элементом $\exp(i\varphi(\xi, \eta))$ интенсивность $I(x, y)$ на плоскости $l = l_0$ визуально похожа на саму кривую L . Количественные показатели — доля энергии $\frac{\iint_{L_\varepsilon} I dx dy}{\iint_{\mathbb{R}^2} I dx dy}$ (L_ε — ε -окрестность кривой L) и степень однородности $1 - \frac{\min_L I}{\max_L I}$ — характеризуют точность этого визуального сходства.

Одним из основных методов решения задач фокусировки для различных кривых L является метод стационарной фазы (в предположении $k(\text{diam}\Omega)^2 \gg 2l_0$). Применение этого метода позволяет рассматривать задачу поиска $\varphi(\xi, \eta)$ как процесс отображения области Ω в исходной плоскости на кривую L в плоскости $l = l_0$, причем каждая точка $(x, y) \in L$ имеет бесконечное число прообразов в области Ω . При таком рассмотрении в оптике кривая L называется каустикой, а само исследование — геометро-оптическим подходом к задаче фокусировки. Строгая математическая постановка задачи фокусировки в кривую и ее подробное исследование в рамках геометрической оптики проведены в [50, 51]. Подход, основанный на методе стационарной фазы, в силу специфики задачи не дает начальных условий, поэтому решение задачи принципиально не является однозначным. Выбор отображения существенно сказывается на виде решения $\varphi(\xi, \eta)$ и, как следствие, на форме интенсивности $I(x, y)$. Это вызвано тем, что на этапе построения решений $\varphi(\xi, \eta)$ за пределами рассмотрения оказываются волновые свойства формируемых полей.

В связи с вышесказанным, решения, полученные методом стационарной фазы, для учета волновых свойств светового поля обычно модифицируются посредством тех или иных итеративных процедур, например, метода Герчберга—

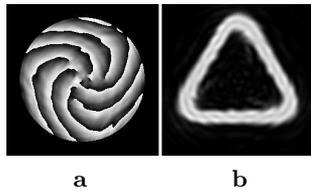


Рис. 28. Фаза (а) исходного пучка и интенсивность (b) пучка в области фокусировки, найденные с помощью алгоритма Герчберга—Сэкстона

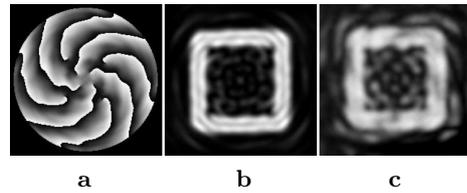


Рис. 29. Фаза (а) исходного пучка и интенсивность (b—теория, c—эксперимент) пучка в области фокусировки, найденные с помощью алгоритма Герчберга—Сэкстона

Сэкстона [45]. Следует отметить, что результативность такого подхода существенно зависит от начального приближения, получаемого, как уже отмечалось, методом стационарной фазы. Однако, как показано в [44], решения задачи фокусировки, имеющие фазовые сингулярности, не могут быть получены методом стационарной фазы. В упомянутой работе на конкретном примере задачи фокусировки в кольцо показано, что существует счетный набор решений, являющихся волновыми, которые не дают вырожденного отображения апертуры оптического элемента в окружность и, таким образом, не являющиеся фокусаторами с точки зрения метода стационарной фазы. Более того, область волновой фокусировки лежит в геометро-оптической тени.

Эти факты явились отправной точкой разработки метода синтеза фазовых элементов для фокусировки в кривые, который основан на фазовой структуре соответствующих спиральных пучков, естественно содержащих фазовые сингулярности, как начального приближения. При этом численные эксперименты показали весьма быструю сходимость метода. На рис. 28, 29 показаны два примера фазовых элементов, найденных с использованием фаз соответствующих спиральных пучков и метода Герчберга—Сэкстона.

Заключение

Сингулярной оптикой называют в последние годы область исследований, касающихся световых полей с дислокациями волнового фронта, или оптическими вихрями. Поля такого вида формируются и наблюдаются как в линейных, так и в нелинейных оптических средах и являются предметом достаточно интенсивного изучения, поэтому потребность в адекватных теоретических и экспериментальных подходах для исследования полей с оптическими вихрями является актуальной задачей. Конечно, с формальной точки зрения любое когерентное световое поле можно представить в виде суперпозиций известных мод Эрмита—Гаусса и Лагерра—Гаусса, однако такой подход оказывается неоптимальным для анализа и синтеза полей с фазовыми сингулярностями.

В связи с этим вихревые световые поля, сохраняющие свою структуру с точностью до масштаба и вращения при распространении, или спиральные пучки, которым посвящена данная работа, являясь своеобразными "вихревыми модами" в классе полей с фазовыми сингулярностями, заслуживают отдельного внимания как объект когерентной оптики. На наш взгляд, это обусловлено следующими основными причинами. Во-первых, обладая весьма разнообразной формой распределения интенсивности, эти пучки тем не менее описываются явными аналитическими выражениями, что делает их эффективным инструментом исследования

закономерностей формирования и преобразования световых полей с фазовыми сингулярностями общего вида. Во-вторых, имеется прямой аналог спиральным пучкам в квантовой механике: волновые функции заряженной частицы в однородном магнитном поле, а законы преобразования спиральных пучков имеют свое представление в теории когерентных состояний. Вполне возможно, эти аналогии будут взаимно полезны и для квантовой механики, и для оптики. Наконец, в-третьих, возможность гибкого изменения распределений интенсивности спиральных пучков с сохранением их структурной устойчивости при распространении и фокусировке представляет интерес для лазерных технологий, создания специфических атомных ловушек, а ненулевой угловой момент этих пучков дает новые возможности для манипулирования микрообъектами.

Некоторые существенные вопросы оптики спиральных пучков не нашли своего отражения в данной работе. В частности, здесь рассматривались только пучки в форме кривых без самопересечений. Случай кривых с самопересечениями оказался более сложным, например, для таких пучков и при выполнении условия квантования (2.15) на порождающей кривой могут находиться нули амплитуды. Пучки для кривых с самопересечениями являются предметом наших текущих исследований.

Можно показать [53], что скалярное произведение комплексных амплитуд спиральных пучков с точностью до постоянного множителя совпадает со скалярным произведением соответствующих одномерных кодировочных функций. С другой стороны, существуют большие классы взаимно ортогональных спиральных пучков. Отсюда следует, что такие кодировочные функции могут быть использованы как ядра специфических вейвлет-преобразований для обработки сигналов [54, 55]. Свойства этих вейвлет-преобразований также являются в настоящее время предметом исследования.

Итак, основными результатами, описанными в данной статье, являются следующие:

1. Найден новый класс лазерных пучков, названных спиральными, которые сохраняют структуру своей интенсивности при распространении и фокусировке с точностью до масштаба и вращения. Показано, что данные пучки могут быть модами соответствующих резонаторов с вращением поля.
2. Экспериментально реализован лазер с таким резонатором и получены пучки с различными параметрами вращения при распространении.
3. Выявлено соответствие спиральных пучков волновым функциям заряженной частицы в однородном магнитном поле при симметричной калибровке вектор-потенциала.
4. Теоретически и экспериментально показана возможность синтеза световых пучков с заданными пространственными характеристиками и сохраняющих свою структуру при распространении и фокусировке. Найден класс пучков, распределение интенсивности которых имеет форму совокупности произвольных плоских линий.
5. Разработан метод синтеза пучков в форме произвольной плоской линии посредством одномерных оптических элементов.
6. На основе оптики спиральных пучков разработан и опробован новый метод синтеза чисто фазовых оптических элементов для фокусировки в кривые.

Литература

- [1] Berry M.V., Nye J.F. Dislocations in wave trains // Proc. Royal Soc. (London). 1974. V. A336. P. 165–190.
- [2] Баранова Н.Б., Зельдович Б.Я. Дислокации поверхностей волнового фронта и нули амплитуды // ЖЭТФ. 1981. Т. 80. С. 1789–1797.
- [3] Баранова Н.Б., Зельдович Б.Я. Исследование плотности дислокаций волнового фронта световых полей со спекл-структурой // ЖЭТФ. 1982. Т. 83. С. 1702–1710.
- [4] Баженов В.Ю., Соскин М.С., Васнецов М.В. Письма в ЖЭТФ. 1990. Т. 52. С. 429.
- [5] Bazhenov V.Yu., Soskin M.S., Vasnetsov M.V. Screw dislocations in light wavefronts // J. Mod. Optics. 1992. V. 39. P. 985–990.
- [6] Soskin M.S., Gorshkov V.N., Vasnetsov M.V., Malos J.T., Heckenberg N.R. Topological charge and angular momentum of light beams carrying optical vortices // Phys. Review A. 1997. V. 56. No. 5. P. 4064–4075.
- [7] Freund I. Optical vortex trajectories // Optics Comm. 2000. V. 181. No. 1–3. P. 19–33.
- [8] Dana I., Freund I. Vortex-lattice wave fields // Optics Comm. 1997. V. 136. P. 93–113.
- [9] Schechner Y.Y., Piestun R., Shamir J. Wave propagation with rotating intensity distributions // Phys. Review E. 1996. V. 54. P. R50–R53.
- [10] Heckenberg N.R., McDuff R., Smith C.P., White A.G. Generation of optical phase singularities by computer holograms // Optics Lett. 1992. V. 17. p. 221–223.
- [11] Vaupel M., Staliunas K., Weiss C.O. Hydrodynamic phenomena in laser physics: Modes with flow and vortices behind an obstacle in an optical channel // Phys. Rev. A. 1996. V. 54. No. 1. P. 880–892.
- [12] Heckenberg N.R., Vaupel M., Malos J.T., Weiss C.O. Optical-vortex pair creation and annihilation and helical astigmatism of a nonplanar ring resonator // Phys. Review A. 1996. V. 54. No. 3. P. 2369–2378.
- [13] Rozas D., Law C.T., Swartzlander Jr.G.A. Propagation dynamics of optical vortices // J. Opt. Soc. Am. B. 1997. V. 14. No. 11. P. 3054–3065.
- [14] Torner L., Petrov D.V. Splitting of light beams with spiral phase dislocations into solitons in bulk quadratic nonlinear media // J. Opt. Soc. Am. B. 1997. V. 14. No. 8. P. 2017–2023.
- [15] Inter. Conf. on Singular Optics, Proc. SPIE. V. 3487 / Ed. M. S. Soskin. Bellingham, USA: SPIE, 1998.
- [16] Inter. Conf. on Singular Optics, Proc. SPIE. V. 4403 / Eds. M. S. Soskin, M. V. Vasnetsov. Bellingham, USA: SPIE, 2001.
- [17] Волостников В.Г. Фазовая проблема в оптике // Препринт ФИАН № 93. М.: ФИАН, 1990. 60 с.
Volostnikov V.G. Phase problem in optics // J. Sov. Laser Research. 1990. V. 11. No. 6. P. 601–626.
- [18] Abramochkin E., Volostnikov V. Relationship between 2D intensity and phase in a Fresnel diffraction zone // Optics Comm. 1989. V. 74. No. 3–4. P. 144–148.
- [19] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1968. 832 с.
- [20] Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. М.: Наука, 1979. 384 с.
- [21] Цикон Х., Фрезе Р., Кириш В. и др. Операторы Шредингера с приложениями к квантовой механике и глобальной геометрии. М.: Мир, 1990. 408 с.

- [22] Титчмарш Е. Теория функций. М.: Наука, 1980. 464 с.
- [23] Лелон П., Груман Л. Целые функции многих комплексных переменных. М.: Мир, 1989. 348 с.
- [24] Абрамочкин Е.Г. Исследование обратных задач и автомодельных решений уравнения Шредингера: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Самара: Изд-во СамГПУ, 1996. 100 с.
- [25] Федорюк М.В. Асимптотика: интегралы и ряды. М.: Наука, 1987. 544 с.
- [26] Рабинович Ю.Л. О целых функциях, представимых в виде интегралов Лапласа // В сб.: Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного / Под. ред. А.И. Маркушевича. М.: Физматгиз, 1960. С. 186–194.
- [27] Abramochkin E., Volostnikov V. Spiral-type beams // Optics Comm. 1993. V. 102. No. 3–4. P. 336–350.
- [28] Волостников В.Г. Методы анализа и синтеза когерентных световых полей: исследование фазовой проблемы и развитие оптики гауссовых пучков: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Саратов: Изд-во Саратов. гос. ун-та, 1997. 193 с.
- [29] Давыдов А.С. Квантовая механика. М.: Физматгиз, 1963. 748 с.
Блохинцев Д.И. Основы квантовой механики. М.: Высшая школа, 1968. 620 с.
- [30] Хапалюк А.П. Открытые оптические резонаторы и пространственная структура лазерного излучения: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Минск: Изд-во БГУ, 1987. 379 с.
- [31] Абрамочкин Е.Г. Функции Эрмита—Лагерра—Гаусса // Вестник Самарского гос. университета. 2001. № 4. С. 19–41.
- [32] Indebetouw G. Optical vortices and their propagation // J. Modern Optics. 1993. V. 40. P. 73–87.
- [33] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. М.: Наука, 1989. 704 с.
- [34] Wuensche A. Generalized Gaussian beam solutions of paraxial optics and their connection to a hidden symmetry // J. Opt. Soc. Am. A. 1989. V. 6. No. 9. P. 1320–1329.
- [35] Ананьев Ю.А. Оптические резонаторы и лазерные пучки. М.: Наука, 1989. 264 с.
- [36] Abramochkin E., Volostnikov V. Beam transformations and non-transformed beams // Optics Comm. 1991. V. 83. No. 1–2. P. 123–135.
- [37] Abramochkin E., Losevsky N., Volostnikov V. Generation of spiral-type laser beams // Optics Comm. 1997. V. 141. No. 1–2. P. 59–64.
- [38] Джеррард А., Берч Дж.М. Введение в матричную оптику. М.: Мир, 1978. 344 с.
- [39] Abramochkin E., Volostnikov V. Spiral-type beams: optical and quantum aspects // Optics Comm. 1996. V. 125. No. 4–6. P. 302–323.
- [40] Фукс Д.Б. Лента Мебиуса. Вариации на старую тему // Квант. 1979. № 1. С. 2–9.
Galperin B., Wheeler K. Möbius band // Trans. Amer. Math. Soc. 1977. V. 230.
- [41] Переломов А.М. Обобщенные когерентные состояния и их применения. М.: Наука, 1987. 270 с.
- [42] Гейлер В.А. Двумерный оператор Шредингера с однородным магнитным полем и его возмущения периодическими потенциалами нулевого радиуса // Алгебра и анализ. 1991. Т. 3. Вып. 3. С. 2–48.
- [43] Уиттекер Е.Т., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа. Т. 2. М.: Наука, 1963. 516 с.

- [44] Абрамочкин Е.Г., Волостников В.Г. Фазовая проблема в оптике и синтез оптических полей // Компьютерная оптика. 1992. № 10–11. С. 95–100.
- [45] Gerchberg R.W., Saxton W.O. A practical algorithm for the determination of phase from image and diffraction plane pictures // *Optik*. 1972. V. 75. No. 2. P. 237–246.
- [46] Bastian M.J. Gabor's expansion of a signal into Gaussian elementary signals // *Proc. IEEE*. 1980. V. 68. No. 4. P. 538–539.
Кузнецова Т.И. Анализ световых сигналов малой длительности при использовании преобразования Габора // *Квант. электроника*. 1994. Т. 21. № 4. С. 341–342.
- [47] Волостников В.Г., Локтев М.Ю. Новый метод восстановления одномерных полей // *Оптика и спектроскопия*. 1999. Т. 86. № 1. С. 80–84.
- [48] Гончарский А.В., Попов В.В., Степанов В.В. Введение в компьютерную оптику. М.: Издательство МГУ, 1991. 310 с.
- [49] Воронцов М.А., Матвеев А.Н., Сивоконь В.П. К расчету фокусаторов лазерного излучения в дифракционном приближении // *Компьютерная оптика*. 1987. Вып. 1. С. 74–78.
- [50] Гончарский А.В., Данилов В.А., Попов В.В. и др. Решение обратной задачи фокусировки лазерного излучения в произвольную кривую // *ДАН СССР*. 1983. Т. 273. № 3. С. 605–608.
- [51] Гончарский А.В., Сисакян И.Н., Степанов В.В. О разрешимости некоторых обратных задач фокусировки лазерного излучения // *ДАН СССР*. 1984. Т. 279. № 1. С. 68–71.
- [52] де Бройль Л. Соотношения неопределенностей Гейзенберга и вероятностная интерпретация волновой механики. М.: Мир, 1986.
- [53] Abramochkin E., Volostnikov V. Structurally stable singular wavefields // *Proc. SPIE*. 1998. V. 3487. P. 20–28.
- [54] Афанасьева Н.М. Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения // *УФН*. 1996. Т. 166. № 11. С. 1145–1170.
- [55] Дремин И.М., Иванов О.В., Нечитайло В.А. Вейвлеты и их использование // *УФН*. 2001. Т. 171. № 5. С. 465–501.

ROTATING LIGHT FIELDS AND SINGULAR OPTICS¹¹

© 2002 E.G. Abramochkin,¹² V.G. Volostnikov¹³

Spiral beams — light fields whose intensity remains unchanged under the field propagation neglecting its scale and rotation — are investigated by theoretical and experimental means. A correspondence between spiral beams and a specific quantum-mechanical situation — ground states of a charged particle in a uniform magnetic field — is found. Some methods of spiral beam synthesis are described.

Поступила в редакцию 5/XI/2002;
в окончательном варианте — 30/XII/2002.

¹¹ Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. Y.N. Radayev.

¹² Abramochkin Eugeny Grigor'evich (ega@fian.smr.ru), Dept. of Differential Equations, Samara State University, Samara, 443011, Russia

¹³ Volostnikov Vladimir Gennadievich (coherent@fian.smr.ru), Coherent Optics Laboratory, Samara Branch of P.N. Lebedev Physical Institute, Samara, 443011, Russia.