
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 622.276

**АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ МОДЕЛЕЙ
ПЛАСТОВЫХ СИСТЕМ К ПОГРЕШНОСТЯМ
В ИСХОДНЫХ ДАННЫХ¹**© 2002 Д.В. Курганов²

В работе исследована зависимость дисперсии параметров пластовой модели от погрешности замеров, традиционно осуществляемых на нефтяных месторождениях. Посредством коэффициентов чувствительности двумерной двухфазной пластовой системы определяется разрешающая способность замеров. Предложен эффективный метод расчетов коэффициентов чувствительности.

О постановке задачи

Построение адекватной модели нефтегазоводоносной пластовой системы — важная и трудная задача. Применение любых самых современных технологий в моделировании требует детального понимания влияния степени погрешности тех или иных наблюдаемых параметров на степень определенности неизвестных параметров модели. Многочисленные примеры использования геолого-гидродинамических моделей и степень их достоверности обсуждаются в литературе (например, [1, 2]). Процесс определения параметров пласта с помощью не прямых замеров и реакции месторождения на то или иное воздействие носит название адаптации математической модели пласта по истории разработки.

Процесс "подгонки" параметров (или задача параметрической идентификации пластовой системы) осложняется тем, что система — пласт — недоступна для прямых замеров, а косвенные замеры осуществляются лишь в некоторых точках пласта — скважинах. К косвенным замерам традиционно относят обводненность продукции, статические и динамические уровни. К определяемым параметрам — пористость, проницаемость, некоторые свойства пластовых жидкостей. Все косвенные замеры имеют существенную степень погрешности. Анализ чувствительности моделей к таким погрешностям осуществляется редко в силу значительного объема вычислений даже для решения обычной задачи имитации пластовой системы. Однако следует помнить о том, что задача идентификации некорректна, и дополнительное исследование необходимо в любом случае. Здесь мы постараемся

¹ Представлена доктором физико-математических наук профессором В.А. Соболевым.

² Курганов Дмитрий Владимирович (era-1@hippo.ru), кафедра математического моделирования Самарского муниципального университета Наяновой, 443090, Самара, ул. Чапаевская, 186.

дать некоторые методы анализа пластовых моделей к погрешностям в исходных данных, требующие ограниченного объема вычислений.

Рассмотрим двумерную двухфазную задачу фильтрации в области Ω единичной мощности:

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\lambda_O \cdot \nabla P_O) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\phi S_O}{B_O} \right] + \sum_{j=1}^{N_W} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) q_{Oj}, \\ \operatorname{div}(\lambda_W \cdot \nabla P_W) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\phi S_W}{B_W} \right] + \sum_{j=1}^{N_W} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) q_{Wj}, \\ S_O + S_W = 1, \\ P_c = P_O - P_W, \\ \mathbf{x} \in \Omega \subset R^2, \quad 0 \leq t \leq T. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь: $i = \{O, W\}$ — индекс, показывающий отношение к нефти или воде соответственно; $P_i = P_i(\mathbf{x}, t)$ — давление в фазе i ; $S_i = S_i(\mathbf{x}, t)$ — насыщенность фазой i ; $\phi = \phi(\mathbf{x}, P_i)$ — пористость; $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)$ — функция Дирака; $\mathbf{x}_j$ — координата скважины j ; $q_{ij} = q_{ij}(t)$ — дебит фазы i в скважине j ; $B_i = B_i(P_i)$ — объемный коэффициент фазы i ; N_W — число скважин; $P_c = P_c(S_W)$ — капиллярные силы; $\lambda_i = \frac{k_{ri}}{\mu_i B_i} k$ — подвижность фазы i ; $k_{ri} = k_{ri}(S_W)$ — относительная фазовая проницаемость; $\mu_i = \mu_i(P_i)$ — вязкость фазы i ; $k = k(\mathbf{x})$ — абсолютная проницаемость.

Отметим, что первые два уравнения системы (1) являются комбинацией уравнения материального баланса и закона Дарси. В последнем уравнении подразумевается, что функция капиллярного давления $P_O - P_W = P_c(S_W)$ известна.

На границе может быть задано условие I рода (давление)

$$P_O(\Omega_\Gamma, t) = P_\Gamma(t)$$

либо условие II рода (расход):

$$\left. \frac{\partial P}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\Gamma_\Omega} = Q_\Gamma(t). \quad (2)$$

Система (1) дополняется начальными условиями

$$P_O(\mathbf{x}, 0) = P_{in}(\mathbf{x}), \quad S_W(\mathbf{x}, 0) = S_{in}(\mathbf{x}). \quad (3)$$

Задача имитации состоит в нахождении функций $P_O = P_O(\mathbf{x}, t)$ и $S_W = S_W(\mathbf{x}, t)$ по остальным известным функциям. Задача параметрической идентификации состоит в нахождении каких-либо функций из множества $\Lambda = \{P_c, B_i, \mu_i, k, k_{ri}, \phi\}$ по некоторым функционалам от решений $V = \{S, P\}$. Для решения задачи идентификации обычно используется минимизируемая целевая функция — мера расхождения между наблюдаемыми значениями и ответом системы, использующей текущий набор параметров.

Наиболее часто используется целевая функция вида:

$$E = (\mathbf{d}^{obs} - \mathbf{d}^{cal}(\boldsymbol{\alpha}))^T W (\mathbf{d}^{obs} - \mathbf{d}^{cal}(\boldsymbol{\alpha})), \quad (4)$$

где $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1 \dots \alpha_{n_{par}})^T$ — вектор параметров системы, подлежащий идентификации, $\mathbf{d}^{obs} = (d_1^{obs} \dots d_n^{obs})$, $\mathbf{d}^{cal} = (d_1^{cal}(\boldsymbol{\alpha}) \dots d_{n_{obs}}^{cal}(\boldsymbol{\alpha}))$ — векторы множеств наблюдаемых значений и соответствующих им модельных значений; W — диагональная весовая матрица.

Воспользуемся далее понятием ковариации случайной векторной функции векторной переменной $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x})$, $\mathbf{y} \in R^m$, $\mathbf{x} \in R^n$, определяемой следующим образом:

$$C(\mathbf{y}) = E \{ (\mathbf{y} - \mathbf{E})(\mathbf{y} - \mathbf{E})^T \},$$

где $\mathbf{E}(\mathbf{y}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{y}(\mathbf{x}) p(\mathbf{x}) dx_1 \dots dx_n$ — математическое ожидание, $p(\mathbf{x})$ — плотность распределения функции $\mathbf{y}$.

Заметим, что $\mathbf{E}(\mathbf{y}) \in R^m$, $C(\mathbf{y})$ — симметрическая матрица размерности $m \times m$. Кроме того, C положительно определена, а ее диагональные элементы — суть дисперсия элементов вектора $\mathbf{y}$.

Известно, что математическое ожидание и ковариация функции $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$, где A — матрица с постоянными коэффициентами (необязательно квадратная), вычисляются по формулам [3]:

$$E(\mathbf{y}) = AE(\mathbf{x}), \quad C(\mathbf{y}) = AC(\mathbf{x})A^T. \quad (5)$$

Из (5) следует, что всегда можно подобрать такое линейное преобразование, которое переводит матрицу $C(\mathbf{x})$ в диагональную. Действительно, представив $C(\mathbf{x})$ в виде $C(\mathbf{x}) = SBS^{-1}$ и сделав замену переменной $\mathbf{y} = S^{-1}\mathbf{x}$, имеем:

$$C(\mathbf{y}) = C(S^{-1}\mathbf{x}) = S^{-1}C(\mathbf{x})(S^{-1})^T = S^{-1}(SBS^{-1})(S^{-1})^T = B.$$

Также следует заметить, что преобразование $\mathbf{y} = B^{-\frac{1}{2}}S^{-1}\mathbf{x}$ переводит матрицу $C(\mathbf{y})$ в единичную матрицу:

$$C(B^{-\frac{1}{2}}S^{-1}\mathbf{x}) = B^{-\frac{1}{2}}S^{-1}(SBS^{-1})(B^{-\frac{1}{2}}S^{-1})^T = I. \quad (6)$$

Последнее бывает удобно для нормализации статистических данных: исходная информация некоррелирована и имеет единичную дисперсию.

Приведем также известное утверждение [4] о разложимости неквадратных матриц, которое понадобится нам в дальнейшем.

Теорема. Произвольная прямоугольная $m \times n$ -матрица ранга p всегда представима в виде произведения

$$G = U_p S_p V_p^T, \quad (7)$$

где U_p, V_p^T — унитарные по отношению к столбцам прямоугольные матрицы соответственно размеров $m \times p$ и $n \times p$, а S_p — диагональная матрица p -го порядка, элементы которой являются сингулярными числами оператора G .

Также нам понадобится определение псевдообратной матрицы. Пусть система уравнений $\mathbf{d} = G\boldsymbol{\alpha}$ (G — прямоугольная матрица) имеет решение в смысле наименьшего квадратичного отклонения $\boldsymbol{\alpha}_m = R\mathbf{d}$. Обозначим это решение как $G^{-g} = \arg \min_R \|\mathbf{d} - G\mathbf{d}\|$. Матрица G^{-g} является псевдообратной для матрицы G .

Расчет матрицы ковариации идентифицируемых параметров

Пусть $C(\mathbf{d})$ — матрица ковариации пластовых замеров. Предположим сейчас, что неизвестные параметры и замеры связаны равенством

$$\mathbf{d} = G\boldsymbol{\alpha},$$

где G — некоторая постоянная матрица размерности $npar \times nobis$.

Представим G в виде (7) $G = U_p S_p V_p^T$ и обозначим далее $H = G^T G$.

Формируя матрицу H ($npar \times nobs$) и проведя ее разложение по собственным числам, найдем V_p и S_p^2 . Теперь можно рассчитать матрицу U_p по формуле:

$$U_p = G V_p S_p^{-1}. \quad (8)$$

Расчет матрицы ковариации $C(\alpha)$ проведем по формуле (5):

$$C(\alpha) = G^{-g} C(\mathbf{d}) [G^{-g}]^T = V_p S_p^{-1} U_p^T C(\mathbf{d}) U_p S_p^{-1} V_p^T.$$

Далее, воспользовавшись (8), получим:

$$\begin{aligned} C(\alpha) &= V_p S_p^{-1} S_p^{-1} V_p^T G^T C(\mathbf{d}) G V_p S_p^{-1} S_p^{-1} V_p^T = \\ &= V_p S_p^{-2} V_p^T G^T C(\mathbf{d}) G V_p S_p^{-2} V_p^T = H^{-g} \bar{C} H^{-g}. \end{aligned} \quad (9)$$

Матрицы $\bar{C}$ и H^{-g} ($npar \times nobs$) определяются как

$$\bar{C} = G^T C(\mathbf{d}) G, \quad H^{-g} = V_p S_p^{-2} V_p^T,$$

откуда дисперсия

$$\sigma_{\alpha_i}^2 = \sum_{k=1}^{npar} \sum_{j=1}^{npar} H_{i,j}^{-g} \bar{C}_{j,k} H_{k,i}^{-g}. \quad (10)$$

Если $C(\mathbf{d}) = I$, то уравнение (10) записывается в виде:

$$C(\alpha) = H^{-g}. \quad (11)$$

Отметим, что последнее равенство справедливо лишь в случае, когда матрицы H и G постоянны. Вообще говоря, это не так, поэтому рассмотрим специальные случаи, когда можно считать их постоянными.

Пусть

$$\left. \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=\alpha_0} = G,$$

где матрица G постоянна, α_0 — произвольная точка. Заменим производную конечной разностью в окрестности точки минимума целевой функции (4):

$$\mathbf{d} = G\alpha + (d_0 - G\alpha_0).$$

Выбрав $\alpha_0 = \arg \min_{\alpha} E(\alpha)$, будем иметь:

$$G = \left. \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=\alpha_0}.$$

Приняв во внимание равенства $G = U_p S_p V_p^T$ и (10), запишем выражение для дисперсии в виде

$$\sigma_{\alpha_i}^2 = \sum_{j=1}^{nobs} \sigma_{d_j}^2 \left(\sum_{k=1}^p V_{p_i,k} S_{p_k}^{-1} U_{p_{jk}} \right)^2.$$

Из предыдущего следует, что в случае, когда матрица G нестационарна, мы не можем оценить дисперсию $\sigma_{\alpha_i}^2$, не зная α_0 . Однако из качественных соображений

можно априорно оценить α_0 . Если α_0^{prior} близко к α_0 (в смысле линеаризации), мы можем воспользоваться равенством (10).

Таким образом, определение дисперсии идентифицируемых параметров сводится к нахождению матриц G и H . Элементы матрицы G носят название коэффициентов чувствительности. Их нахождение методом обычной замены производной конечной разностью сильно затруднено в силу большого объема вычислений при $npar \gg 1$. Если все замеры производились в разное время и в разных точках пласта, то для формирования матрицы G может понадобиться до $2 * npar^2$ решений различных задач имитации. Ниже опишем способ, позволяющий за один проход получить все коэффициенты чувствительности.

Расчет коэффициентов чувствительности

Дадим сначала краткое описание численных схем FIM и IMPES, используемых в большинстве современных симуляторов пластовых систем для решения задачи имитации (1)–(3), основанных на конечно-разностной аппроксимации.

Рассчитываются значения $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x}, t, \alpha)$ в узлах сетки $\mathbf{x} = \mathbf{x}_j$ ($j = \overline{1, m}$, m — число узлов сетки); $t = t^k$ (k — номер временного шага). Далее решается система вида:

$$\begin{bmatrix} f_1(\mathbf{y}^{k+1}, \mathbf{y}^k, \mathbf{x}_j, \Delta t, \alpha) \\ \vdots \\ f_m(\mathbf{y}^{k+1}, \mathbf{y}^k, \mathbf{x}_j, \Delta t, \alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Начальные и граничные условия включены в (12).

Здесь k — индекс временного шага численной схемы, t^k — модельное время на шаг k , $\Delta t = t^{k+1} - t^k$, $\mathbf{y}^k$ — значение $\mathbf{y}$ в момент времени t^k , $\mathbf{y} \in R^m$.

Подразумевается, что значения $\mathbf{y}^k$ известны, а значения $\mathbf{y}^{k+1}$ неизвестны. Нелинейная система (12) решается методом Ньютона. На каждом временном шаге решается система линейных уравнений

$$J_{y^{k+1}}^{(i)} \Delta^{(i+1)} \mathbf{y}^{k+1} = -\mathbf{f}^{(i)}, \quad (13)$$

где $J_{y^{k+1}}$ — матрица Якоби системы (12); (i) — индекс итерации. Итеративная процедура продолжается до тех пор, пока не будет выполнен один из критериев сходимости [1].

Рассмотрим пластовую систему, в которой параметрами являются пористость и абсолютная проницаемость; капиллярные силы отсутствуют; для краткости положим $P_O = P$. В принятой терминологии имеем:

$$\alpha = \begin{bmatrix} k_1 \\ \phi_1^0 \\ \vdots \\ k_i \\ \phi_i^0 \\ \vdots \\ k_{nblocks} \\ \phi_{nblocks} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} p_1 \\ s_{w1} \\ \vdots \\ p_i \\ s_{wi} \\ \vdots \\ p_{nblocks} \\ s_{wnblocks} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_{O1} \\ f_{w1} \\ \vdots \\ f_{Oi} \\ f_{wi} \\ \vdots \\ f_{Onblocks} \\ f_{wnblocks} \end{bmatrix}.$$

Здесь $nblocks$ — число ячеек в пластовой системе; f_{oi} , f_{wi} — уравнения материального баланса для i -й ячейки нефти и воды соответственно. Для пористости ϕ , в общем случае зависящей от давления, определим параметр ϕ^0 как пористость при некотором известном давлении, обычно при начальном пластовом, т.е. $\phi_i = \phi_i(\phi_i^0, p_i)$.

Для случая FIM функции f_{oi} и f_{wi} имеют вид:

$$\begin{aligned} f_{oi} &= (T_{O,i-\frac{1}{2}})^{k+1} (p_{i-1} - p_i)^{k+1} - (T_{O,i+\frac{1}{2}})^{k+1} (p_i - p_{i+1})^{k+1} - q_o - \\ &\quad - \frac{(\Delta x \Delta y \Delta z)_i}{\Delta t} \left(\left(\frac{\phi s_o}{B_o} \right)_i^{k+1} - \left(\frac{\phi s_o}{B_o} \right)_i^k \right), \\ f_{wi} &= (T_{W,i-\frac{1}{2}})^{k+1} (p_{i-1} - p_i)^{k+1} - (T_{W,i+\frac{1}{2}})^{k+1} (p_i - p_{i+1})^{k+1} - q_w - \\ &\quad - \frac{(\Delta x \Delta y \Delta z)_i}{\Delta t} \left(\left(\frac{\phi s_w}{B_w} \right)_i^{k+1} - \left(\frac{\phi s_w}{B_w} \right)_i^k \right), \end{aligned}$$

$$\text{где } T_{O,i\pm\frac{1}{2}} = \left(\frac{\mathbf{k} k_{RO} \Delta z \Delta y}{B_o \mu_o \Delta x} \right)_{i\pm\frac{1}{2}}, \quad T_{W,i\pm\frac{1}{2}} = \left(\frac{\mathbf{k} k_{RW} \Delta z \Delta y}{B_w \mu_w \Delta x} \right)_{i\pm\frac{1}{2}};$$

$$\mathbf{k}_{i\pm\frac{1}{2}} = \frac{k_i k_{i\pm 1} (\Delta x_i + \Delta x_{i\pm 1})}{k_{i\pm 1} \Delta x_i + k_i \Delta x_{i\pm 1}},$$

$$k_{RO,i\pm\frac{1}{2}} = k_{RO} \left(S_w^{ups\pm\frac{1}{2}} \right), \quad k_{RW,i\pm\frac{1}{2}} = k_{RW} \left(S_w^{ups\pm\frac{1}{2}} \right);$$

S_w^{ups} — водонасыщенность в ячейке с большим давлением, $\phi_i = \phi_i(\phi_i^0, p_i)$, $q_{o(w)}$ — сток или источник (если он есть в ячейке i), $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ — размеры прямоугольной ячейки.

Для случая IMPES функции f_{oi} и f_{wi} имеют вид:

$$\begin{aligned} f_{oi} &= (T_{O,i-\frac{1}{2}})^k (p_{i-1} - p_i)^k - (T_{O,i+\frac{1}{2}})^k (p_i - p_{i+1})^k - q_o - \\ &\quad - \frac{(\Delta x \Delta y \Delta z)_i}{\Delta t} \left(\left(\frac{\phi s_o}{B_o} \right)_i^{k+1} - \left(\frac{\phi s_o}{B_o} \right)_i^k \right), \\ f_{wi} &= (T_{W,i-\frac{1}{2}})^k (p_{i-1} - p_i)^k - (T_{W,i+\frac{1}{2}})^k (p_i - p_{i+1})^k - q_w - \\ &\quad - \frac{(\Delta x \Delta y \Delta z)_i}{\Delta t} \left(\left(\frac{\phi s_w}{B_w} \right)_i^{k+1} - \left(\frac{\phi s_w}{B_w} \right)_i^k \right). \end{aligned}$$

Для расчета коэффициентов чувствительности воспользуемся следующей схемой. Запишем равенство (12) в векторном виде

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}^{k+1}, \mathbf{y}^k, \mathbf{x}_j, \Delta t, \boldsymbol{\alpha}) = 0$$

и продифференцируем его по $\boldsymbol{\alpha}$:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}^{k+1}} \frac{\partial \mathbf{y}^{k+1}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}^k} \frac{\partial \mathbf{y}^k}{\partial \boldsymbol{\alpha}} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} = 0. \quad (14)$$

По данной формуле для любого временного шага можно итеративно (зная предыдущее значение $\frac{\partial \mathbf{y}^k}{\partial \boldsymbol{\alpha}}$ для шага k) рассчитать матрицу коэффициентов чувствительности $\frac{\partial \mathbf{y}^{k+1}}{\partial \boldsymbol{\alpha}}$.

Отметим, что расчет $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}^{k+1}}$ производится в момент решения задачи имитации и является матрицей Якоби $J_{y^{k+1}}$.

В нашем случае:

$$J_{y^{k+1}} = J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{O1}}{\partial p_1} & \frac{\partial f_{O1}}{\partial S_{W1}} & \frac{\partial f_{O1}}{\partial p_2} & \frac{\partial f_{O1}}{\partial S_{W2}} & \dots & \frac{\partial f_{O1}}{\partial S_{Wnblocks}} \\ \frac{\partial f_{W1}}{\partial p_1} & \frac{\partial f_{W1}}{\partial S_{W1}} & \frac{\partial f_{W1}}{\partial p_2} & \frac{\partial f_{W1}}{\partial S_{W2}} & \dots & \frac{\partial f_{W1}}{\partial S_{Wnblocks}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{Onblocks}}{\partial p_1} & \frac{\partial f_{Onblocks}}{\partial p_2} & \frac{\partial f_{Onblocks}}{\partial S_{W2}} & \dots & \dots & \frac{\partial f_{Onblocks}}{\partial S_{Wnblocks}} \\ \frac{\partial f_{Wnblocks}}{\partial p_1} & \frac{\partial f_{Wnblocks}}{\partial S_{W1}} & \frac{\partial f_{Wnblocks}}{\partial p_2} & \frac{\partial f_{Wnblocks}}{\partial S_{W2}} & \dots & \frac{\partial f_{Wnblocks}}{\partial S_{Wnblocks}} \end{pmatrix}. \quad (15)$$

$J_{y^{k+1}}$ является последней матрицей Якоби для текущего временного шага $(k+1)$ системы (13).

Матрица J_{y^k} трехдиагональна и имеет следующую структуру:

$$J_{y^k} = -D = \begin{pmatrix} -c_1 D_{1,1} & -c_2 D_{1,2} & & & & \\ -c_3 D_{2,1} & -c_4 D_{2,2} & & & & \\ & & \times & \times & & \\ & & \times & \times & & \\ & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & \times & \times \\ & & & & & \times & \times \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Здесь для случая FIM:

$$D_{1,1} = \frac{\partial \left(\frac{\phi S_O}{B_O} \right)^k}{\partial p_1^k}; \quad D_{1,2} = - \left(\frac{\phi}{B_O} \right)_1^k; \quad D_{2,1} = \frac{\partial \left(\frac{\phi S_W}{B_W} \right)^k}{\partial p_1^k}; \quad D_{2,2} = \left(\frac{\phi}{B_W} \right)_1^k.$$

Для IMPES:

$$D_{1,1} = \frac{\partial \left(\frac{\phi S_O}{B_O} \right)^k}{\partial p_1^k}; \quad D_{1,2} = \left(\frac{\partial f_{O1}}{\partial S_{W1}} \right)_1^k; \quad D_{2,1} = \frac{\partial \left(\frac{\phi S_W}{B_W} \right)^k}{\partial p_1^k}; \quad D_{2,2} = \left(\frac{\partial f_{W1}}{\partial S_{W1}} \right)_1^k;$$

c_i — некоторые константы.

Обозначив

$$\mathbf{V}_{\alpha_i} \equiv - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \alpha_i}$$

и приняв во внимание (14), (15), запишем (14) в виде:

$$J S_{\alpha_i}^{k+1} = D S_{\alpha_i}^k + \mathbf{V}_{\alpha_i}. \quad (17)$$

Отметим особенности уравнения (17):

- 1) если давления и насыщенности считаются одновременно в прямой задаче (12) (полностью неявная схема), то и чувствительности давления и насыщенности также считаются одновременно, т.е. невозможно рассчитать их отдельно;

- 2) в силу того, что в начальный момент времени пластовая система находится в равновесии, $\mathbf{S}_{\alpha_i} = 0$;
- 3) матрицы J и D остаются постоянными на каждый временной шаг (k) и рассчитываются во время решения задачи (12);
- 4) в том случае, если неизвестны пористость и проницаемость всей системы, уравнение (17) должно быть решено ($2 \times nblocks$) раз;
- 5) кроме $\mathbf{V}_{\alpha_i}$, все остальные члены (17) рассчитываются во время решения задачи (12).

Для двумерной однофазной системы вектор $\mathbf{V}_{k_i}$ имеет не более 5 ненулевых компонент. $\mathbf{V}_{\phi_i^0}$ имеет одну ненулевую компоненту. Для двухфазной системы $\mathbf{V}_{k_i}$ имеет не более 10 ненулевых компонент. $\mathbf{V}_{\phi_i^0}$ имеет две ненулевые компоненты. В первом случае

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_{Oi}}{\partial k_{i-1}} &= \frac{T_{Oi-\frac{1}{2}}}{k_{i-\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\partial \bar{k}_{i-\frac{1}{2}}}{\partial k_{i-1}} (p_{i-1} - p_i), \\ \frac{\partial f_{Oi}}{\partial k_i} &= \frac{T_{Oi-\frac{1}{2}}}{k_{i-\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\partial \bar{k}_{i-\frac{1}{2}}}{\partial k_i} (p_{i-1} - p_i) - \frac{T_{Oi+\frac{1}{2}}}{k_{i+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\partial \bar{k}_{i+\frac{1}{2}}}{\partial k_i} (p_i - p_{i+1}), \\ \frac{\partial f_{Oi}}{\partial k_{i+1}} &= -\frac{T_{Oi+\frac{1}{2}}}{k_{i+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\partial \bar{k}_{i+\frac{1}{2}}}{\partial k_{i+1}} (p_i - p_{i+1}), \\ \frac{\partial f_{Oi}}{\partial \phi_i^0} &= \frac{(\Delta x \Delta y \Delta z)_i}{\Delta t} \cdot \left(\left(\frac{S_o}{B_o} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \phi^0} \right)_i^{k+1} - \left(\frac{S_o}{B_o} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \phi^0} \right)_i^k \right), \\ \mathbf{V}_{k_i} &= \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{\partial f_{Oi-1}}{\partial k_i} \\ \frac{\partial f_{Oi}}{\partial k_i} \\ \frac{\partial f_{Oi+1}}{\partial k_i} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}_{\phi_i^0} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{\partial f_{Oi}}{\partial \phi_i^0} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Коэффициенты чувствительности в нашем случае имеют вид:

$$\mathbf{S}_{k_i}^k = \frac{\partial \mathbf{y}^k}{\partial k_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial k_i} \\ \frac{\partial S_{w1}}{\partial k_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial p_{nblocks}}{\partial k_i} \\ \frac{\partial S_{wnblocks}}{\partial k_i} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{S}_{\phi_i}^k = \frac{\partial \mathbf{y}^k}{\partial \phi_i^0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial \phi_i^0} \\ \frac{\partial S_{w1}}{\partial \phi_i^0} \\ \vdots \\ \frac{\partial p_{nblocks}}{\partial \phi_i^0} \\ \frac{\partial S_{wnblocks}}{\partial \phi_i^0} \end{bmatrix}.$$

Уравнение (17) позволяет рассчитывать чувствительности давления и насыщенности каждой ячейки в процессе решения задачи имитации. Однако основной

интерес представляет расчет чувствительности наблюдаемых значений. Зная давление и насыщенность любой точки пласта, мы можем однозначно определить "вторичные" переменные, такие как забойные давления в скважинах и обводненность продукции.

Определение вектора чувствительности пластовых замеров

Связь между забойным давлением p_w и давлением в проперфорированной скважиной ячейке p_{block} обычно рассчитывается с помощью следующих соотношений [5]:

$$\begin{aligned} P_w &= p_{block} - q_o W_f, \\ W_f &= \left(\frac{B_o}{2\pi k \lambda_o \Delta z} \right)_{block} \ln \left(\frac{r_o}{r_w} + s \right), \\ r_o &= 0.28 \frac{(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})_{block}}{2}, \\ \lambda_o &= \frac{k_{RO}}{\mu_o}, \end{aligned} \quad (18)$$

s — скин-фактор.

Для нагнетательных скважин в равенстве (18) вместо подвижности нефти λ_o берется суммарная фазовая подвижность $\lambda_T = \lambda_o + \lambda_w$ в ячейке.

Чувствительность рассчитывается по формулам:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_w}{\partial k_j} &= \frac{\partial p_{block}}{\partial k_j} - q_o \frac{\partial W_f}{\partial k_j}, \\ \frac{\partial p_w}{\partial k_j} &= \frac{\partial p_{block}}{\partial k_j} - q_o \frac{\partial W_f}{\partial p_{block}} \cdot \frac{\partial p_{block}}{\partial k_j} - q_o \frac{\partial W_f}{\partial S_{wblock}} \cdot \frac{\partial S_{wblock}}{\partial k_j} - q_o \frac{\partial W_f}{\partial k_j}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\frac{\partial W_f}{\partial k_j} = \begin{cases} -\frac{W_f}{k} & , \text{ в случае, если } j \text{ — ячейка,} \\ 0 & , \text{ в противном случае,} \end{cases} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_w}{\partial \phi_j^0} &= \frac{\partial p_{block}}{\partial \phi_j^0} - q_o \frac{\partial W_f}{\partial \phi_j^0}, \\ \frac{\partial p_w}{\partial \phi_j^0} &= \frac{\partial p_{block}}{\partial \phi_j^0} - q_o \frac{\partial W_f}{\partial p_{block}} \cdot \frac{\partial p_{block}}{\partial \phi_j^0} - q_o \frac{\partial W_f}{\partial S_{wblock}} \cdot \frac{\partial S_{wblock}}{\partial \phi_j^0}, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\frac{\partial p_w}{\partial s} = \frac{1}{\left(\frac{r_o}{r_w} + s \right)} \cdot \left(\frac{B_o}{2\pi k \lambda_o \Delta z} \right)_{block}. \quad (22)$$

Равенства (19), (21), (22) позволяют рассчитывать чувствительность забойных давлений в каждой скважине на конец каждого временного шага. Чувствительности p_{block} рассчитываются с помощью (17).

Обводненность продукции определяется следующим образом:

$$WC = \frac{q_w}{q_o + q_w},$$

где q_w — дебит воды.

В моделировании пластовых систем принято определение обводненности на основе фракционных потоков:

$$WC = \left(\frac{\frac{\lambda_w}{B_w}}{\frac{\lambda_w}{B_w} + \frac{\lambda_o}{B_o}} \right),$$

где $\lambda_w = \frac{k_{RW}}{\mu_w}$.

Чувствительности рассчитываются так:

$$\frac{\partial WC}{\partial k_j} = \frac{\partial WC}{\partial p_{block}} \cdot \frac{\partial p_{block}}{\partial k_j} + \frac{\partial WC}{\partial S_{wblock}} \cdot \frac{\partial S_{wblock}}{\partial k_j}, \quad (23)$$

$$\frac{\partial WC}{\partial \phi_j^0} = \frac{\partial WC}{\partial p_{block}} \cdot \frac{\partial p_{block}}{\partial \phi_j^0} + \frac{\partial WC}{\partial S_{wblock}} \cdot \frac{\partial S_{wblock}}{\partial \phi_j^0}, \quad (24)$$

$$\frac{\partial WC}{\partial s} = 0. \quad (25)$$

Аналогично равенства (23)–(25) позволяют рассчитывать чувствительность обводненности продукции на конец каждого временного шага. Чувствительности давления и насыщенности рассчитываются с помощью (17). Равенства (22), (25) используются для расчета чувствительности к скин-фактору.

Таким образом, применяя описанную схему, можно рассчитать матрицы G и H и затем оценить дисперсию интересующих параметров.

Пример расчета коэффициентов чувствительности для однородного пласта

В качестве примера использования формулы (17) рассмотрим случай однородного пласта, имеющего пористость 0.18 и проницаемость 250 мД. В эксплуатации находятся 4 скважины: нагнетательная П1 и добывающие Р1, Р2, Р3. Нагнетание производится с единичной компенсацией. Расстояния до добывающих скважин выбраны так, чтобы иметь возможность наблюдать фронт вытеснения в короткий промежуток времени и фиксировать его прохождение на скважинах. Система двухфазная (нефть–вода), размерность модели $30 \times 30 \times 1$. В качестве исследуемого параметра была выбрана пористость в блоке, обведенном кружком (N791). На рис. 1–2 изображены зависимость $\frac{\partial p}{\partial \phi^{91}}(\bar{x}, t)$, $\bar{x} \in R^2$, $t = 14; 20$ сут и распределение насыщенности. По формулам (23), (22), (24) соответственно были исследованы чувствительности некоторых пластовых параметров (см. рис. 4–6).

На данном этапе можно сделать два вывода:

- чувствительность параметра максимальна на фронте вытеснения (важно фиксировать значения в момент прорыва воды к скважинам);
- перед фронтом вытеснения чувствительность минимальна.

Численный расчет дисперсии

Для исследования зависимости дисперсии оцениваемых параметров от погрешности в определении исходных данных было построено несколько секторных моделей, использующих формулу (10).

В простейшем случае рассмотрим однородную двумерную двухфазную модель (рис. 3). Для удобства наблюдений ее размеры (10×10 ячеек) и заданные на скважинах отборы жидкости выбраны таким образом, чтобы за достаточно короткий

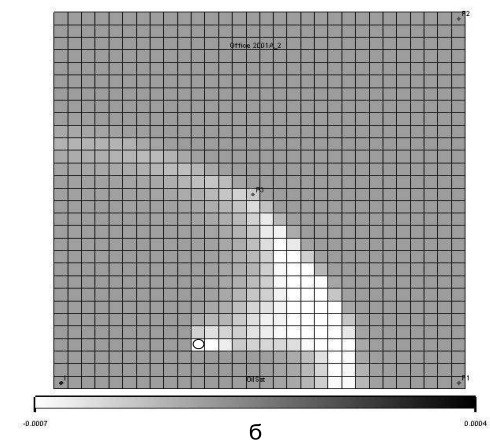
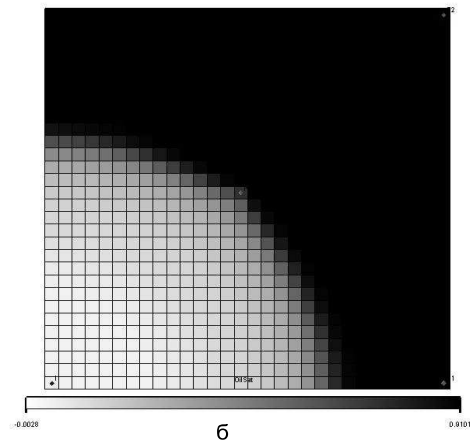
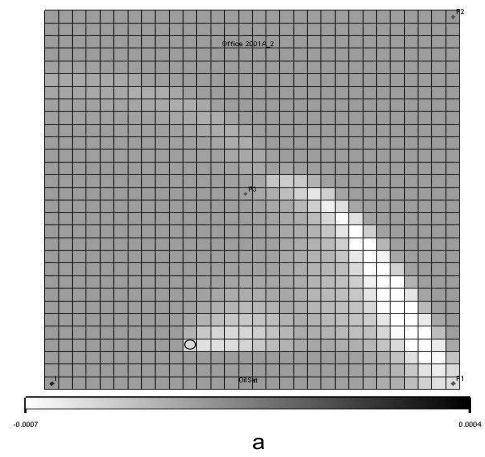
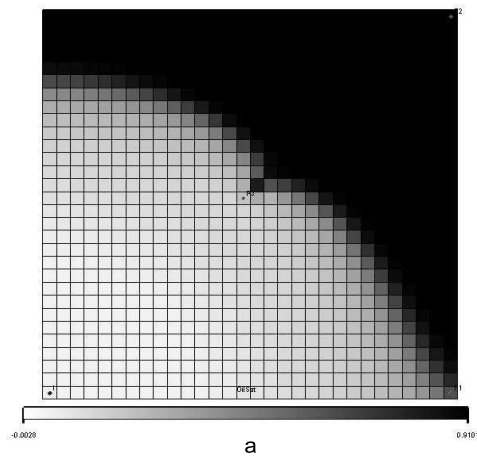


Рис. 1. Чувствительность давления к пористости через (а) 14 сут; (б) 20 сут после начала закачки

Рис. 2. Чувствительность давления к пористости через (а) 14 сут; (б) 20 сут после начала закачки

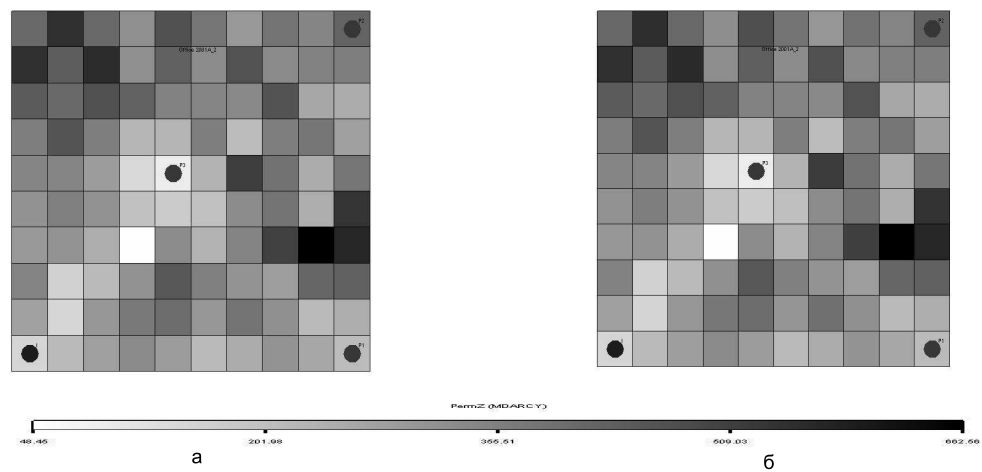


Рис. 3. Дисперсия определения проницаемости: (а) реальный пласт; (б) рассчитанный пласт

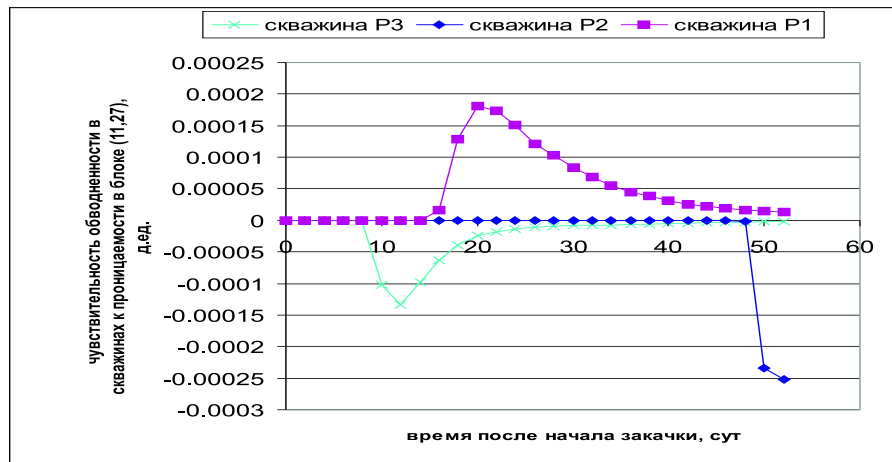


Рис. 4. Чувствительность обводненности в скважине к проницаемости в блоке 791

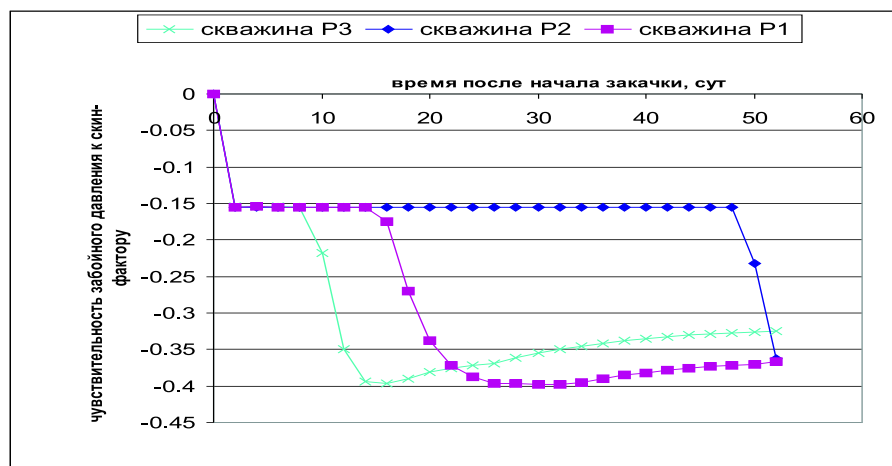


Рис. 5. Чувствительность забойного давления к скин-фактору

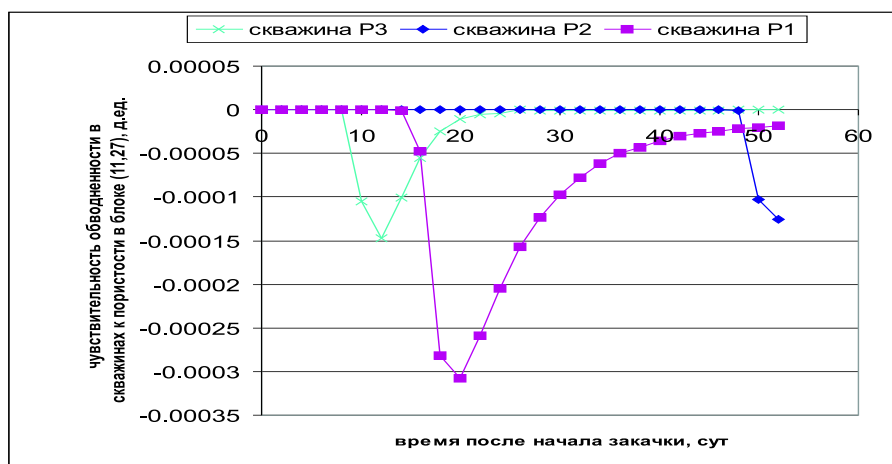


Рис. 6. Чувствительность обводненности в скважине к пористости в блоке 791

срок получить прорыв воды к добывающим скважинам. Скважина I освоена под закачку, скважины P1, P2, P3 — добывающие. Объем закачки компенсирует отборы в пластовых условиях.

Имеются в наличии обводненность, забойные давления и кривые восстановления давления. КВД сняты через 13 дней после начала закачки.

Для расчета дисперсии определяемых параметров была сформирована матрица ковариации исходных данных:

$$C_m = \begin{pmatrix} C_p & 0 \\ 0 & C_{wc} \end{pmatrix},$$

где $C_p = \sigma_p^2 I$ — матрица ковариации замеров забойных давлений, $C_{wc} = \sigma_{wc}^2 I$ — матрица ковариации замеров обводненности, I — единичная матрица соответствующей размерности для каждого набора данных.

В данном случае примем $\sigma_p = 0.007$ атм, $\sigma_{wc} = 0.01$ ($0 \leq \sigma_{wc} \leq 1$).

Всего было сделано 378 замеров, из них:

- 102 — обводненность,
- 136 — забойные давления,
- 140 — восстановленные давления.

В качестве неизвестной функции была принята проницаемость, так что число неизвестных параметров равно 100. (Отметим, что исходные данные были получены при однородной проницаемости 500 мД.) В этом случае имеется принципиальная возможность сопоставить площадное распределение дисперсии с функцией проницаемости.

Весовую матрицу определим следующим образом: $W = C_m^{-1}$.

Последнее равенство применимо в случае, если степень доверия к исходным данным обратно пропорциональна погрешности замеров. Таким образом, ковариация взвешенных исходных данных нормализуется и можно воспользоваться (11).

На рис. 3 изображена степень неопределенности каждого из определяемых параметров, мерой которой выбрана дисперсия. Отметим следующие обстоятельства:

- относительно хорошо определены области вокруг скважин. Причина этого в локальном характере обводненности и забойных давлений;
- относительно хорошо определена область за фронтом вытеснения;
- менее всего определена северо-западная часть залежи. Объясняется это в первую очередь отсутствием замеров в этой области и удаленностью от фронта вытеснения.

Отметим, что в целом полученные результаты согласуются с выводами, полученными выше, где для анализа аналогичной ситуации использовались коэффициенты чувствительности.

Одним из ключевых вопросов, возникающих при решении задачи параметрической оценки, является степень неопределенности в смысле определения неизвестных параметров, которую снимает каждый из сделанных замеров. Были проанализированы ситуации, когда в наличии имеются только следующие данные:

- 1) обводненность;
- 2) забойные давления;
- 3) обводненность и забойные давления;
- 4) кривые восстановления давления;
- 5) забойные давления и кривые восстановления давления;
- 6) все данные.

Средние значения дисперсии для каждого из указанных случаев соответственно равны: 1351.9, 884.7, 862.9, 4531, 333.5, 331.0 мД^2 .

Представляется возможным сделать следующие выводы:

- комбинация различных замеров всегда уменьшает степень неопределенности определяемых параметров;
- обводненность в данном случае не является определяющим замером, основная причина в том, что в основном обводнилась только скважина РЗ;
- кривые восстановления давления также неспособны в данном случае определить неизвестные параметры, т.к. по существу это локальный метод, позволяющий оценить характеристики пласта вблизи скважины, однако вместе с забойными давлениями они обеспечивают значительное улучшение качества определяемых характеристик;
- число неизвестных параметров модели должно подбираться таким образом, чтобы при малом числе замеров (в начале эксплуатации месторождения) оно было небольшим, а при более детальных исследованиях не превосходило вычислительной мощности используемых машин.

Литература

- [1] Aziz K., Settari A. Petroleum Reservoir Simulation // London, Applied Science Publishers, 1978. 328 p.
- [2] Атапин В.Ф., Попков В.И., Курганов Д.В. и др. Оптимизация разработки нефтяных месторождений Самарской области на базе трехмерного трехфазного моделирования фильтрации // Вестник Инжинирингового Центра ЮКОС. 2001, III квартал. №2. С. 35–42.
- [3] Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Иностр. лит., 1952. 576 с.
- [4] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1966. 868 с.
- [5] Peaceman D.W. Interpretation of Well-Block Pressures in Numerical Reservoir Simulation // SPE Annual Technical Conference and Exhibition. Denver, CO, 1977, October, 9–12. P. 345–356.

SENSITIVITY ANALYSIS OF RESERVOIR SIMULATION MODELS CONSTRAINED TO MEASUREMENT DATA ERRORS³

© 2002 D.V. Kourganov⁴

In this paper special variance analysis is performed to study the influence of field measurement errors on uncertainties of reservoir model parameters. Resolution power of measurements is determined by means of two-phase 2-D model sensitivity coefficients. Fast method for sensitivity coefficient calculations is presented.

Поступила в редакцию 30/XI/2002.

³ Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. V.A. Sobolev.

⁴ Kourganov Dmitry Vladimirovich (era-1@hippo.ru), Dept. of Mathematical Modeling, Samara Municipal Nayanova University Samara, 443090, Russia.