

О ВЫЧИСЛЕНИИ НУЛЕВЫХ ЛАГРАНЖИАНОВ НЕЛИНЕЙНО УПРУГОГО ПОЛЯ

© 2002 Ю.Н. Радаев, В.А. Гудков¹

В работе приводится полная теория Лагранжиана пустого пространства (нулевого Лагранжиана) для n -мерного многообразия (включая 4-мерное пространство-время Минковского). С помощью дивергентного представления Лагранжиана пустого пространства для звездообразной области получено его общее выражение, содержащее градиенты поля порядка не выше первого, в случае произвольного n -мерного многообразия. Показано, что в случае нелинейно упругого поля в трехмерном пространстве нулевой Лагранжиан может содержать в общей сложности 15 независимых элементов. Исследован также случай, когда Лагранжиан пустого пространства не зависит от сдвигов физических полевых величин. Вычислены конфигурационные силы, соответствующие нулевому Лагранжиану и зависящие линейно или квадратично от первых градиентов поля.

1. Формулировка задачи

Рассмотрим функционал типа Гамильтонова действия:

$$\mathfrak{J} = \int_{\mathcal{D} \times [t_1, t_2]} \mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\beta \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k, \dots, X^\beta) d^4 X, \quad (1.1)$$

где $\mathcal{L}$ — плотность Лагранжиана; φ^k — упорядоченный массив физических полевых величин; X^β ($\beta = 1, 2, 3, 4$) — пространственно-временные координаты; $\mathcal{D}$ — область трехмерного пространства; $d^4 X$ — элемент объема;² t_1, t_2 — границы временного интервала.

В рамках классической нелинейной механики сплошных сред следует считать, что $\mathcal{D}$ — отсчетная конфигурация тела, деформацию которого обычно описывают, сравнивая отсчетную конфигурацию с актуальной деформированной, параметризованная координатами X^1, X^2, X^3 . Переменные X^1, X^2, X^3 вполне аналогичны координатам Лагранжа, а физические поля φ^k — это закон движения (или деформирования) тела, представленный как зависимости координат Эйлера (т.е. координат

¹ Радаев Юрий Николаевич (radayev@ssu.samara.ru), Гудков Василий Александрович, кафедра механики сплошных сред Самарского государственного университета, 443011, Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

² Под $d^4 X$ мы понимаем "естественный" элемент объема

$$d^4 X = dX^1 dX^2 dX^3 dX^4.$$

в пространстве, которые выбираются наблюдателем для представления положений точек сплошной среды в процессе ее деформации) от координат Лагранжа (координаты Лагранжа, согласно традиционным представлениям механики сплошных сред, индивидуализируют точки континуума, являясь для каждой из них уникальной меткой):

$$x^k = x^k(X^1, X^2, X^3, X^4).$$

Таким образом, в дальнейшем, интерпретируя развиваемую теорию в аспекте механики деформируемых сред, можно считать, что φ^k есть Эйлера координаты: $\varphi^k = x^k$. Латинский индекс при этом всегда ассоциируется с элементами пространственного описания, греческий — отсчетного (материального).

Отправным пунктом для математического описания физических полей служит принцип Гамильтона, выражающий условие стационарности действия:

$$\delta \mathcal{J} = 0. \quad (1.2)$$

Принцип Гамильтона сразу же позволяет сформулировать уравнения поля, в качестве которых выступают уравнения Эйлера—Лагранжа для функционала действия. Эти уравнения являются необходимым условием стационарности действия.

Изложение нелинейной теории упругости с позиций современной теории поля имеется, например, в монографии [1, р. 96–115].

Поставим теперь вопрос о степени определенности плотности Лагранжиана $\mathcal{L}$ уравнениями поля. Оказывается, что уравнения поля не позволяют однозначно восстановить Лагранжиан, их порождающий. Известно, что возможна аддитивная трансформация плотности Лагранжиана

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \mathcal{L}'$$

такая, что добавок

$$\mathcal{L}'(\varphi^k, \partial_\beta \varphi^k, X^\beta)$$

не будет нарушать выполнения уравнений Эйлера—Лагранжа. Другими словами, добавление $\mathcal{L}'$ к Лагранжиану $\mathcal{L}$ не оказывает влияния на условия стационарности действия, хотя, возможно, и приводит к изменению граничных условий. Эта процедура часто называется калибровкой Лагранжиана.

Вообще всякая функция

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L}'(\varphi^k, \partial_\beta \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k, \dots, X^\beta), \quad (1.3)$$

для которой уравнения Эйлера—Лагранжа

$$\frac{\delta \mathcal{L}'}{\delta \varphi^k} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \varphi^k} - \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial_\beta \varphi^k)} + \partial_\gamma \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k)} - \dots = 0 \quad (1.4)$$

тождественно удовлетворяются для любого набора физических полевых величин φ^k , называется Лагранжианом пустого пространства,³ поскольку любой подобный аддитивный добавок формально не изменяет вариационного представления физических полей и поэтому может быть ассоциирован с пространством, "вмещающим" поля.

Основы теории Лагранжиана пустого пространства заинтересованный читатель может найти, например, в монографии [2, р. 224–226].

Понятие о Лагранжиане пустого пространства совершенно необходимо для установления степени определенности канонических тензорных полей, входящих в формулировку как классических, так и нетривиальных законов сохранения.

³ Или нулевым Лагранжианом. Часто употребляется также термин "калибровочный Лагранжиан".

2. Дивергентное представление нулевого Лагранжиана

Основной результат развиваемой теории состоит в том, что Лагранжиан пустого пространства (1.3) всегда представляется (при предположении о звездообразности области⁴ изменения его аргументов) в форме полной дивергенции

$$\mathcal{L}'(\varphi^k, \partial_\beta \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k, \dots, X^\lambda) = \frac{\partial \Phi^\alpha(\varphi^k, \partial_\beta \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k, \dots, X^\lambda)}{\partial X^\alpha}. \quad (2.1)$$

Представимость Лагранжиана в форме полной дивергенции (2.1) является необходимым и достаточным условием того, чтобы он был нулевым. Достаточность проверяется прямым вычислением оператора Эйлера в применении к (2.1). Необходимость также без труда обосновывается. Мы приведем доказательство, существенно использующее звездообразную геометрию области определения Лагранжиана, следуя [3, с. 322, 323]. Размерность пространства и число физических полей при этом не играют роли.

Предположим, что Лагранжиан

$$\mathcal{L}'(\varphi^k, \partial_\gamma \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k, \dots, X^\beta)$$

есть Лагранжиан пустого пространства, определенный и регулярный в некоторой области изменения аргументов $\varphi^k, \partial_\gamma \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k, \dots$, звездообразной относительно нулевой точки.

Рассмотрим значения Лагранжиана на лучах, исходящих из нулевой точки. Для этого введем параметр ε , изменяющийся на отрезке $[0, 1]$. Пользуясь звездообразной геометрией области, можно заключить, что функция от ε

$$\mathcal{L}'(\varepsilon \varphi^k, \varepsilon \partial_\gamma \varphi^k, \varepsilon \partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k, \dots, X^\beta)$$

корректно определена и регулярна на отрезке $[0, 1]$.

Дифференцирование по параметру ε приводит к

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{L}'(\varepsilon \varphi^k, \varepsilon \partial_\gamma \varphi^k, \varepsilon \partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k, \dots, X^\beta) &= \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \varphi^k} \varphi^k + \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial_\gamma \varphi^k)} \right) (\partial_\gamma \varphi^k) + \\ &+ \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k)} \right) (\partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k) + \dots \end{aligned} \quad (2.2)$$

Замечая, что

$$(\partial_\gamma \varphi^k) \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial_\gamma \varphi^k)} \right) = \partial_\gamma \left(\varphi^k \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial_\gamma \varphi^k)} \right) - \varphi^k \partial_\gamma \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial_\gamma \varphi^k)} \right),$$

⁴ Область многомерного пространства называется звездообразной относительно некоторой своей точки, если любую точку области можно соединить с этой точкой отрезком прямой, целиком расположенным внутри области. Выпуклая область звездообразна относительно любой своей точки. Понятие звездообразности области — обобщение на многомерный случай требования односвязности плоской области так, чтобы по-прежнему для поля P_γ : $\partial_\beta P_\gamma = \partial_\gamma P_\beta$ было справедливо заключение о том, что его циркуляция по любому замкнутому контуру равна нулю:

$$\oint P_\gamma dX^\gamma = 0.$$

$$(\partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k) \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k)} \right) = \partial_\gamma \partial_\beta \left(\varphi^k \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k)} \right) - \varphi^k \partial_\gamma \partial_\beta \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k)} \right) - 2(\partial_\beta \varphi^k) \partial_\gamma \left(\varphi^k \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k)} \right),$$

а также

$$(\partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k) \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k)} \right) = \partial_\beta \partial_\gamma \left(\varphi^k \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial_\beta \partial_\gamma \varphi^k)} \right) - \partial_\beta \left(2\varphi^k \partial_\gamma \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k)} \right) + \varphi^k \partial_\gamma \partial_\beta \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k)} \right)$$

или, вводя сокращенные обозначения для дифференциальных операторов

$$\partial_J = \partial_\alpha \partial_\beta \partial_\gamma \dots, \quad (-\partial_J) = (-\partial_\alpha)(-\partial_\beta)(-\partial_\gamma) \dots, \\ J = (\alpha, \beta, \gamma, \dots),$$

находим формулу

$$(\partial_J \varphi^k) \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial_J \varphi^k)} \right) = \varphi^k (-\partial_J) \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial_J \varphi^k)} \right) + \partial_\beta \Psi^\beta,$$

где Ψ^β — некоторое векторное поле, также зависящее от полей φ^k , их градиентов и пространственно-временных координат X^β .

Ясно, что оператор Эйлера (вариационная производная поля φ^k) вычисляется в форме

$$\frac{\delta \mathcal{L}'}{\delta \varphi^k} = (-\partial_J) \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial_J \varphi^k)} \right).$$

Для производной (2.2), следовательно, находим формулу

$$\frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{L}'(\varepsilon \varphi^k, \varepsilon \partial_\gamma \varphi^k, \varepsilon \partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k, \dots, X^\beta) = \varphi^k \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \varphi^k} - \partial_\beta \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial_\beta \varphi^k)} \right) + \right. \\ \left. + \partial_\gamma \partial_\beta \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k)} \right) - \dots \right\} + \partial_\beta \Psi^\beta.$$

Принимая во внимание, что $\mathcal{L}'$ есть Лагранжиан пустого пространства, т.е. для любого поля φ^k его вариационная производная равна нулю, получим, интегрируя по ε на отрезке $[0, 1]$,

$$\mathcal{L}'(\varphi^k, \partial_\gamma \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, \dots, X^\lambda) - \mathcal{L}'(0, 0, 0, \dots, X^\lambda) = \partial_\beta \tilde{\Psi}^\beta,$$

где

$$\tilde{\Psi}^\beta = \int_0^1 \Psi^\beta(\varepsilon \varphi^k, \varepsilon \partial_\gamma \varphi^k, \varepsilon \partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, \dots, X^\lambda) d\varepsilon.$$

Выбирая далее поле $\bar{\Psi}^\beta$ так, чтобы

$$\mathcal{L}'(0, 0, 0, \dots, X^\alpha) = \partial_\beta \bar{\Psi}^\beta,$$

что заведомо возможно и многими способами,⁵ и обозначая

$$\Phi^\beta = \tilde{\Psi}^\beta + \bar{\Psi}^\beta,$$

⁵ Действительно, поле $\bar{\Psi}^\alpha$ по заданной дивергенции можно разыскивать в безвихревом виде. Для определения потенциала тогда имеется уравнение Пуассона, разрешимость которого гарантирована, если правая часть этого уравнения — непрерывная функция пространственно-временных координат X^β .

приходим к дивергентному представлению Лагранжиана пустого пространства:

$$\mathcal{L}'(\varphi^k, \partial_\gamma \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, \dots, X^\lambda) = \partial_\beta \Phi^\beta(\varphi^k, \partial_\gamma \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, \dots, X^\lambda).$$

Плотность Лагранжиана в 4-пространстве-времени, таким образом, всегда определяется с точностью до аддитивной полной дивергенции 4-вектора, зависящего от переменных поля, включая и его градиенты.⁶ Поэтому приходится также учитывать то обстоятельство, что в результате подсчета указанная дивергенция на самом деле может зависеть от градиентов поля порядка более высокого, чем сам 4-вектор Φ^γ .

3. Вычисление нулевого Лагранжиана нелинейно упругого поля в трехмерном пространстве

Вычисление нулевого Лагранжиана, зависящего лишь от первых градиентов статического трехкомпонентного поля в трехмерном пространстве, особенно интересно в связи с исследованием нелинейно упругого поля в деформируемом твердом теле.

Если размерность пространства X^β равна трем и $k = 1, 2, 3$, то Лагранжиан пустого пространства, зависящий от градиентов поля порядка не выше первого, всегда можно разложить в сумму

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'(\varphi^k, \partial_\beta \varphi^k, X^\beta) = & A(\varphi^k, X^\beta) + B_k^\beta(\varphi^k, X^\beta) \partial_\beta \varphi^k + \\ & + C_{\beta}^k(\varphi^k, X^\beta) J \partial_k X^\beta + D(\varphi^k, X^\beta) J, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $A(\varphi^k, X^\beta)$, $B_k^\beta(\varphi^k, X^\beta)$, $C_{\beta}^k(\varphi^k, X^\beta)$, $D(\varphi^k, X^\beta)$ — некоторые поля, зависящие от пространственно-временных координат X^α и физических полей φ^k ,⁷ J — якобиан отображения $X^\beta \rightarrow x^k = \varphi^k$:

$$J = \det(\partial_\beta \varphi^k).$$

Приведенное только что соотношение может быть переписано в прямую тензорную запись:

$$\mathcal{L}' = A + \text{tr}(\mathbf{B} \cdot (\nabla_{\mathbf{x}} \otimes \boldsymbol{\varphi})) + J \text{tr}(\mathbf{C} \cdot (\nabla_{\mathbf{x}} \otimes \boldsymbol{\varphi})^{-1}) + JD, \quad (3.2)$$

где

$$(\nabla_{\mathbf{x}} \otimes \boldsymbol{\varphi})_{\beta}^k = \partial_\beta \varphi^k.$$

Непосредственный расчет показывает, что полная дивергенция трехмерного векторного поля Φ^γ , зависящего от трех координат X^β , трех компонент поля φ^k и их градиентов порядка не выше первого, также будет зависеть от градиентов поля порядка не выше первого, только если

$$\begin{aligned} \Phi^\gamma(\varphi^k, \partial_\beta \varphi^k, X^\beta) = & L^\gamma(\varphi^s, X^\beta) + \epsilon^{\gamma\beta\lambda} (\partial_\beta \varphi^k) K_{k\lambda}(\varphi^s, X^\beta) + \\ & + J(\partial_k X^\gamma) M^k(\varphi^s, X^\beta), \end{aligned} \quad (3.3)$$

где

$$L^\gamma = L^\gamma(\varphi^k, X^\beta), \quad K_{k\beta} = K_{k\beta}(\varphi^k, X^\alpha), \quad M^s = M^s(\varphi^k, X^\beta)$$

⁶ Как следует из (2.1), естественное представление вектора Φ^γ — 1-контравариантное отсчетное.

⁷ Выражения для A , B_k^β , C_{β}^k , D , как будет показано ниже, не могут быть выбраны произвольно.

— произвольные поля. Заметим также, что прямая запись уравнения (3.3) есть:

$$\Phi = \mathbf{L} + ((\nabla_X \otimes \varphi) \cdot \mathbf{K})^\times + J(\nabla_X \otimes \varphi)^{-T} \cdot \mathbf{M},$$

где крестом (крест Гиббса (Gibbsian cross)) обозначается векторный инвариант тензора второго ранга: $(\mathbf{A}^\times)^\gamma = \varepsilon^{\gamma\beta\lambda} A_{\beta\lambda}$.⁸

С целью обоснования формулы (3.3) вычислим полную дивергенцию поля $\Phi^\gamma(\varphi^k, \partial_\beta \varphi^k, X^\beta)$ как

$$\frac{\partial \Phi^\gamma}{\partial X^\gamma} = \left(\frac{\partial \Phi^\gamma}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}} + \left(\frac{\partial \Phi^\gamma}{\partial \varphi^k} \right) (\partial_\gamma \varphi^k) + \left(\frac{\partial \Phi^\gamma}{\partial (\partial_\beta \varphi^k)} \right) \partial_\gamma (\partial_\beta \varphi^k). \quad (3.4)$$

Полная дивергенция не зависит от частных производных

$$\frac{\partial^2 \varphi^k}{(\partial X^1)^2}, \quad \frac{\partial^2 \varphi^k}{(\partial X^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 \varphi^k}{(\partial X^3)^2},$$

только если

$$\frac{\partial \Phi^1}{\partial (\partial_1 \varphi^k)} = 0, \quad \frac{\partial \Phi^2}{\partial (\partial_2 \varphi^k)} = 0, \quad \frac{\partial \Phi^3}{\partial (\partial_3 \varphi^k)} = 0 \quad (k = 1, 2, 3). \quad (3.5)$$

Но это означает, что компонента Φ^β не зависит от $\partial_\beta \varphi^k$ ($k = 1, 2, 3$).

Аналогично, должны выполняться условия

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi^1}{\partial (\partial_2 \varphi^k)} + \frac{\partial \Phi^2}{\partial (\partial_1 \varphi^k)} &= 0, \\ \frac{\partial \Phi^1}{\partial (\partial_3 \varphi^k)} + \frac{\partial \Phi^3}{\partial (\partial_1 \varphi^k)} &= 0, \\ \frac{\partial \Phi^2}{\partial (\partial_3 \varphi^k)} + \frac{\partial \Phi^3}{\partial (\partial_2 \varphi^k)} &= 0, \end{aligned} \quad (3.6)$$

чтобы была исключена зависимость от смешанных частных производных

$$\frac{\partial^2 \varphi^k}{\partial X^1 \partial X^2}, \quad \frac{\partial^2 \varphi^k}{\partial X^1 \partial X^3}, \quad \frac{\partial^2 \varphi^k}{\partial X^2 \partial X^3}.$$

На основании (3.5), (3.6) можно заключить, что компоненты Φ^β выражаются через первые градиенты поля как

$$\begin{aligned} \Phi^1 &= a_{k'k''}(\partial_2 \varphi^{k'}) (\partial_3 \varphi^{k''}) + b_k(\partial_2 \varphi^k) + c_k(\partial_3 \varphi^k) + h^1, \\ \Phi^2 &= e_{k'k''}(\partial_1 \varphi^{k'}) (\partial_3 \varphi^{k''}) + f_k(\partial_1 \varphi^k) + g_k(\partial_3 \varphi^k) + h^2, \\ \Phi^3 &= p_{k'k''}(\partial_1 \varphi^{k'}) (\partial_2 \varphi^{k''}) + q_k(\partial_1 \varphi^k) + s_k(\partial_2 \varphi^k) + h^3, \end{aligned} \quad (3.7)$$

где

$$\begin{aligned} &a_{k'k''}(\varphi^k, X^\beta), \quad e_{k'k''}(\varphi^k, X^\beta), \quad p_{k'k''}(\varphi^k, X^\beta), \\ &b_k(\varphi^k, X^\beta), \quad f_k(\varphi^k, X^\beta), \quad q_k(\varphi^k, X^\beta), \\ &c_k(\varphi^k, X^\beta), \quad g_k(\varphi^k, X^\beta), \quad s_k(\varphi^k, X^\beta), \quad h^k(\varphi^k, X^\beta). \end{aligned}$$

⁸ Заметим, что векторный инвариант диадного произведения двух векторов трехмерного пространства есть векторное произведение векторов, составляющих диаду:

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})^\times = \mathbf{a} \times \mathbf{b}.$$

Действительно, поскольку, например, компонента Φ^2 не зависит от частных производных $\partial_2\varphi^k$, а Φ^3 — от $\partial_3\varphi^k$, то два первых уравнения в (3.6) устанавливаяют, что Φ^1 может зависеть от градиента $\partial_2\varphi^k$ только линейно с коэффициентом, линейно зависящим от $\partial_3\varphi^k$, и, наоборот, Φ^1 может зависеть от градиента $\partial_3\varphi^k$ только линейно с коэффициентом, линейно зависящим от $\partial_2\varphi^k$. Учитывая еще, что компонента Φ^1 не зависит от градиентов $\partial_1\varphi^k$, сразу же приходим к представлению (3.7) для Φ^1 .

Подставляя (3.7) в (3.6), находим, что для любых градиентов поля должны удовлетворяться соотношения

$$\begin{aligned}(e_{kk''} + a_{kk''})(\partial_3\varphi^{k''}) + f_k + b_k &= 0, \\ (a_{k''k} + p_{kk''})(\partial_2\varphi^{k''}) + c_k + q_k &= 0, \\ (e_{k'k} + p_{k'k})(\partial_1\varphi^{k'}) + g_k + s_k &= 0,\end{aligned}\tag{3.8}$$

откуда следуют равенства

$$\begin{aligned}e_{kk'} &= -a_{kk'}, \quad p_{kk'} = -a_{k'k}, \quad a_{kk'} = -a_{k'k}; \\ f_k &= -b_k, \quad q_k = -c_k, \quad s_k = -g_k,\end{aligned}$$

пользуясь которыми формулы (3.7) представим в виде

$$\begin{aligned}\Phi^1 &= a_{k'k''}(\partial_2\varphi^{k'}) + b_k(\partial_2\varphi^k) + c_k(\partial_3\varphi^k) + h^1, \\ \Phi^2 &= -a_{k'k''}(\partial_1\varphi^{k'}) + b_k(\partial_1\varphi^k) + g_k(\partial_3\varphi^k) + h^2, \\ \Phi^3 &= a_{k'k''}(\partial_1\varphi^{k'}) + c_k(\partial_1\varphi^k) - g_k(\partial_2\varphi^k) + h^3.\end{aligned}\tag{3.9}$$

Вводя затем аксиальный вектор a^s , соответствующий антисимметричному тензору второго ранга a_{kj} согласно $2a^s = \varepsilon^{skj}a_{kj}$, получим

$$\begin{aligned}\Phi^1 &= a^3((\partial_2\varphi^1)(\partial_3\varphi^2) - (\partial_2\varphi^2)(\partial_3\varphi^1)) - a^2((\partial_2\varphi^1)(\partial_3\varphi^3) - (\partial_2\varphi^3)(\partial_3\varphi^1)) + \\ &\quad + a^1((\partial_2\varphi^2)(\partial_3\varphi^3) - (\partial_2\varphi^3)(\partial_3\varphi^2)) + b_k(\partial_2\varphi^k) + c_k(\partial_3\varphi^k) + h^1, \\ \Phi^2 &= -a^3((\partial_1\varphi^1)(\partial_3\varphi^2) - (\partial_1\varphi^2)(\partial_3\varphi^1)) + a^2((\partial_1\varphi^1)(\partial_3\varphi^3) - (\partial_1\varphi^3)(\partial_3\varphi^1)) - \\ &\quad - a^1((\partial_1\varphi^2)(\partial_3\varphi^3) - (\partial_1\varphi^3)(\partial_3\varphi^2)) - b_k(\partial_1\varphi^k) + g_k(\partial_3\varphi^k) + h^2, \\ \Phi^3 &= a^3((\partial_1\varphi^1)(\partial_2\varphi^2) - (\partial_1\varphi^2)(\partial_2\varphi^1)) - a^2((\partial_1\varphi^1)(\partial_2\varphi^3) - (\partial_1\varphi^3)(\partial_2\varphi^1)) + \\ &\quad + a^1((\partial_1\varphi^2)(\partial_2\varphi^3) - (\partial_1\varphi^3)(\partial_2\varphi^2)) - c_k(\partial_1\varphi^k) - g_k(\partial_2\varphi^k) + h^3.\end{aligned}\tag{3.10}$$

Наконец, учитывая, что

$$\begin{vmatrix} \partial_1\varphi^1 & \partial_2\varphi^1 & \partial_3\varphi^1 \\ \partial_1\varphi^2 & \partial_2\varphi^2 & \partial_3\varphi^2 \\ \partial_1\varphi^3 & \partial_2\varphi^3 & \partial_3\varphi^3 \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} \partial_1X^1 & \partial_2X^1 & \partial_3X^1 \\ \partial_1X^2 & \partial_2X^2 & \partial_3X^2 \\ \partial_1X^3 & \partial_2X^3 & \partial_3X^3 \end{vmatrix},$$

т.е.

$$2J\partial_k X^i = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \varepsilon_{klm} (\partial_\alpha \varphi^l) (\partial_\beta \varphi^m),$$

или в развернутой записи

$$\begin{aligned}J\partial_1 X^1 &= (\partial_2\varphi^2)(\partial_3\varphi^3) - (\partial_2\varphi^3)(\partial_3\varphi^2), \\ -J\partial_2 X^1 &= (\partial_2\varphi^1)(\partial_3\varphi^3) - (\partial_2\varphi^3)(\partial_3\varphi^1), \\ J\partial_3 X^1 &= (\partial_2\varphi^1)(\partial_3\varphi^2) - (\partial_2\varphi^2)(\partial_3\varphi^1); \\ -J\partial_1 X^2 &= (\partial_1\varphi^2)(\partial_3\varphi^3) - (\partial_1\varphi^3)(\partial_3\varphi^2), \\ J\partial_2 X^2 &= (\partial_1\varphi^1)(\partial_3\varphi^3) - (\partial_1\varphi^3)(\partial_3\varphi^1), \\ -J\partial_3 X^2 &= (\partial_1\varphi^1)(\partial_3\varphi^2) - (\partial_1\varphi^2)(\partial_3\varphi^1);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J\partial_1 X^3 &= (\partial_1 \varphi^2)(\partial_2 \varphi^3) - (\partial_1 \varphi^3)(\partial_2 \varphi^2), \\
-J\partial_2 X^3 &= (\partial_1 \varphi^1)(\partial_2 \varphi^3) - (\partial_1 \varphi^3)(\partial_2 \varphi^1), \\
J\partial_3 X^3 &= (\partial_1 \varphi^1)(\partial_2 \varphi^2) - (\partial_1 \varphi^2)(\partial_2 \varphi^1),
\end{aligned}$$

и обозначая

$$h^\gamma = L^\gamma, \quad a^s = M^s, \quad b_k = K_{k3}, \quad c_k = -K_{k2}, \quad g_k = K_{k1},$$

формулы (3.10) сразу же приводятся к (3.3).

Вычислим далее полную дивергенцию поля Φ^γ , определенного согласно (3.3). Прежде всего находим

$$\begin{aligned}
\partial_\gamma \Phi^\gamma &= (\partial_\gamma L^\gamma)_{\text{expl}} + (\partial_k L^\gamma)(\partial_\gamma \varphi^k) + \varepsilon^{\gamma\beta\lambda}(\partial_\beta \varphi^k)(\partial_\gamma K_{k\lambda})_{\text{expl}} + \\
&+ \varepsilon^{\gamma\beta\lambda}(\partial_\beta \varphi^k)(\partial_\gamma \varphi^l)(\partial_l K_{k\lambda}) + J(\partial_k X^\gamma)(\partial_\gamma M^k)_{\text{expl}} + \\
&+ \frac{1}{2} \varepsilon^{\gamma\alpha\beta} \varepsilon_{klm} (\partial_n M^k)(\partial_\alpha \varphi^l)(\partial_\beta \varphi^m)(\partial_\gamma \varphi^n).
\end{aligned}$$

Здесь уже учтено, что

$$\varepsilon^{\gamma\beta\lambda}(\partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k) = 0,$$

и в силу

$$2J\partial_k X^\gamma = \varepsilon^{\gamma\alpha\beta} \varepsilon_{klm} (\partial_\alpha \varphi^l)(\partial_\beta \varphi^m)$$

также равенство

$$\partial_\gamma (J\partial_k X^\gamma) = 0.$$

Замечая, что⁹

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{\gamma\alpha\beta}(\partial_\gamma \varphi^n)(\partial_\alpha \varphi^l)(\partial_\beta \varphi^m) &= J\varepsilon^{nlm}, \\
\varepsilon^{nlm} \varepsilon_{klm} &= 2\delta_k^n,
\end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \varepsilon^{\gamma\alpha\beta} \varepsilon_{klm} (\partial_n M^k)(\partial_\alpha \varphi^l)(\partial_\beta \varphi^m)(\partial_\gamma \varphi^n) &= \frac{1}{2} \varepsilon^{nlm} \varepsilon_{klm} J(\partial_n M^k) = \\
&= J(\partial_k M^k).
\end{aligned}$$

На основании (см., например, [4, с. 28])

$$\varepsilon^{\gamma\beta\lambda}(\partial_\beta \varphi^k)(\partial_\gamma \varphi^l) = \varepsilon^{rlk} \Delta_r^\lambda,$$

где Δ_r^λ — алгебраическое дополнение элемента $\partial_\lambda \varphi^r$ в определителе

$$\begin{vmatrix}
\partial_1 \varphi^1 & \partial_2 \varphi^1 & \partial_3 \varphi^1 \\
\partial_1 \varphi^2 & \partial_2 \varphi^2 & \partial_3 \varphi^2 \\
\partial_1 \varphi^3 & \partial_2 \varphi^3 & \partial_3 \varphi^3
\end{vmatrix},$$

и учитывая

$$\Delta_r^\lambda = J(\partial_r X^\lambda),$$

имеем

$$\varepsilon^{\gamma\beta\lambda}(\partial_\beta \varphi^k)(\partial_\gamma \varphi^l) = \varepsilon^{rlk} J(\partial_r X^\lambda),$$

следовательно,

$$\varepsilon^{\gamma\beta\lambda}(\partial_\beta \varphi^k)(\partial_\gamma \varphi^l)(\partial_l K_{k\lambda}) = \varepsilon^{klp}(\partial_l K_{p\beta})(\partial_k X^\beta) = -\varepsilon^{kpl}(\partial_l K_{p\beta})(\partial_k X^\beta),$$

⁹ Приводимые ниже формулы читатель может найти, например, в [4, с. 23, 24].

что сразу же позволяет найти выражение (3.1) для Лагранжиана пустого пространства, причем поля A , $B_{k\cdot}^\beta$, $C_{\cdot\beta}^k$, D , фигурирующие в этом представлении, определяются в следующем виде:

$$A(x^k, X^\beta) = \left(\frac{\partial L^\gamma(x^k, X^\beta)}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}}, \quad (3.11)$$

$$D(x^k, X^\beta) = \left(\frac{\partial M^s(x^k, X^\beta)}{\partial X^s} \right)_{\text{expl}}, \quad (3.12)$$

$$B_{k\cdot}^\beta(x^s, X^\beta) = \varepsilon^{\beta\alpha\gamma} \left(\frac{\partial K_{k\alpha}(x^k, X^\beta)}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}} + (\partial_k L^\beta(x^s, X^\beta))_{\text{expl}}, \quad (3.13)$$

$$C_{\cdot\beta}^k(x^s, X^\beta) = (\partial_\beta M^k(x^s, X^\gamma))_{\text{expl}} - \varepsilon^{kpl} \left(\frac{\partial K_{p\beta}(x^s, X^\gamma)}{\partial X^l} \right)_{\text{expl}}. \quad (3.14)$$

Приведем также прямую запись соотношений (3.11)–(3.14):

$$A = \text{Div}_{\text{expl}} \mathbf{L},$$

$$D = \text{div}_{\text{expl}} \mathbf{M},$$

$$\mathbf{B} = \text{Rot}_{\text{expl}} \mathbf{K} + (\text{grad}_{\text{expl}} \mathbf{L})^T,$$

$$\mathbf{C} = \text{Grad}_{\text{expl}} \mathbf{M} - (\text{rot}_{\text{expl}} \mathbf{K}^T)^T$$

и необходимые для понимания формул определения дифференциальных операторов

$$\begin{aligned} \text{Div}_{\text{expl}} \mathbf{L} &= (\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{L})_{\text{expl}}, & \text{div}_{\text{expl}} \mathbf{M} &= (\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{M})_{\text{expl}}, \\ \text{Rot}_{\text{expl}} \mathbf{K} &= (\mathbf{K} \times \nabla_{\mathbf{x}})_{\text{expl}}, & (\text{rot}_{\text{expl}} \mathbf{K}^T)^T &= (\mathbf{K}^T \times \nabla_{\mathbf{x}})_{\text{expl}}^T, \\ \text{grad}_{\text{expl}} \mathbf{L} &= (\mathbf{L} \otimes \nabla_{\mathbf{x}})_{\text{expl}}, & \text{Grad}_{\text{expl}} \mathbf{M} &= (\mathbf{M} \otimes \nabla_{\mathbf{x}})_{\text{expl}}, \end{aligned}$$

или в координатной записи

$$\begin{aligned} \text{Div}_{\text{expl}} \mathbf{L} &= (\partial_\gamma L^\gamma)_{\text{expl}}, & \text{div}_{\text{expl}} \mathbf{M} &= (\partial_k M^k)_{\text{expl}}, \\ (\text{Rot}_{\text{expl}} \mathbf{K})_{k\cdot}^\beta &= \varepsilon^{\beta\alpha\gamma} \left(\frac{\partial K_{k\alpha}(x^k, X^\beta)}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}}, \\ ((\text{rot}_{\text{expl}} \mathbf{K}^T)^T)_{\cdot\beta}^k &= \varepsilon^{kpl} \left(\frac{\partial K_{p\beta}(x^s, X^\gamma)}{\partial X^l} \right)_{\text{expl}}, \\ ((\text{grad}_{\text{expl}} \mathbf{L})^T)_{k\cdot}^\gamma &= (\partial_k L^\gamma)_{\text{expl}}, & (\text{Grad}_{\text{expl}} \mathbf{M})_{\cdot\gamma}^s &= (\partial_\gamma M^s)_{\text{expl}}. \end{aligned}$$

В силу тождеств

$$\begin{aligned} \partial_k \partial_\gamma L^\gamma &= \partial_\gamma \partial_k L^\gamma, \\ \varepsilon^{\beta\alpha\gamma} \varepsilon^{jks} \partial_s \partial_\gamma K_{k\alpha} &= \varepsilon^{\beta\alpha\gamma} \varepsilon^{jks} \partial_\gamma \partial_s K_{k\alpha}, \\ \partial_\gamma \partial_k M^k &= \partial_s \partial_\gamma M^s \end{aligned}$$

находим

$$\begin{aligned} \text{grad}_{\text{expl}} \text{Div}_{\text{expl}} \mathbf{L} &= \text{Div}_{\text{expl}} (\text{grad}_{\text{expl}} \mathbf{L})^T, \\ \text{rot}_{\text{expl}} (\text{Rot}_{\text{expl}} \mathbf{K})^T &= (\text{Rot}_{\text{expl}} (\text{rot}_{\text{expl}} \mathbf{K}^T)^T)^T, \\ \text{Grad}_{\text{expl}} \text{div}_{\text{expl}} \mathbf{M} &= \text{div}_{\text{expl}} (\text{Grad}_{\text{expl}} \mathbf{M})^T, \end{aligned}$$

что приводит к соотношениям совместности¹⁰

$$\begin{aligned}\text{grad}_{\text{expl}} A &= \text{Div}_{\text{expl}} \mathbf{B}, \\ (\text{Rot}_{\text{expl}} \mathbf{C})^T &= -\text{rot}_{\text{expl}} \mathbf{B}^T, \\ \text{Grad}_{\text{expl}} D &= \text{div}_{\text{expl}} \mathbf{C}^T,\end{aligned}\tag{3.15}$$

где

$$\begin{aligned}\text{Div}_{\text{expl}} \mathbf{B} &= (\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{B}^T)_{\text{expl}}, \\ \text{div}_{\text{expl}} \mathbf{C}^T &= (\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{C})_{\text{expl}},\end{aligned}$$

или для компонент

$$\begin{aligned}(\text{Div}_{\text{expl}} \mathbf{B})_k &= (\partial_\alpha B_k^\alpha)_{\text{expl}}, \\ (\text{div}_{\text{expl}} \mathbf{C}^T)_\beta &= (\partial_k C_{\beta}^k)_{\text{expl}}.\end{aligned}$$

Условия совместности (3.15) могут быть получены прямой подстановкой (3.1) в уравнения Эйлера—Лагранжа (1.4) и приравниванием нулю сумм коэффициентов при одинаковых степенях градиентов $\partial_\beta \varphi^k$.

4. Вычисление нулевого Лагранжиана 4-мерного пространства-времени

Найдем выражение для Лагранжиана пустого пространства для случая, когда пространство-время четырехмерно, а число m физических полевых величин φ^k может быть произвольным. При этом будем считать, что Лагранжиан $\mathcal{L}'$ и векторное поле Φ^γ в самом общем представлении Лагранжиана пустого пространства (2.1) зависят от градиентов полей φ^k порядка не выше первого.

Поскольку

$$\mathcal{L}'(\varphi^k, \partial_\beta \varphi^k, X^\beta) = \frac{\partial \Phi^\gamma(\varphi^k, \partial_\beta \varphi^k, X^\beta)}{\partial X^\gamma},\tag{4.1}$$

то, как и в трехмерном случае, необходимо исследовать условия, когда дивергенция в правой части не будет зависеть от вторых производных $(\partial_\alpha \partial_\beta \varphi^k)$.

Учитывая, во-первых, что в выражении для Лагранжиана пустого пространства $\mathcal{L}'$ коэффициент при второй частной производной $(\partial_\beta \partial_\beta \varphi^k)$ (по β не суммировать) должен быть нулевым, можно заключить, что должны выполняться условия:

$$\frac{\partial \Phi^\beta}{\partial (\partial_\beta \varphi^k)} = 0 \quad (\text{по } \beta \text{ не суммировать});$$

т.е. компонента Φ^γ не зависит от $(\partial_\gamma \varphi^k)$ ($k = 1, m$).

Во-вторых, Лагранжиан пустого пространства $\mathcal{L}'$ не зависит от смешанных частных производных $(\partial_\alpha \partial_\beta \varphi^k)$ ($\alpha \neq \beta$) только при условии

$$\frac{\partial \Phi^\lambda}{\partial (\partial_\mu \varphi^k)} + \frac{\partial \Phi^\mu}{\partial (\partial_\lambda \varphi^k)} = 0 \quad (\mu \neq \lambda).\tag{4.2}$$

Положим $\lambda = \alpha_1$, $\mu = \alpha_2$ и, используя то обстоятельство, что Φ^{α_2} от производных $(\partial_{\alpha_2} \varphi^{k_2})$ не зависит, получим, что Φ^{α_1} линейно зависит от производной $\partial_{\alpha_2} \varphi^{k_2}$, т.е.

$$\Phi^{\alpha_1} = a_{k_2}^{\alpha_1 \alpha_2} \partial_{\alpha_2} \varphi^{k_2} + b^{\alpha_1} \quad (\text{по } \alpha_2, k_2 \text{ не суммировать}),\tag{4.3}$$

где коэффициенты $a_{k_2}^{\alpha_1 \alpha_2}$ и b^{α_1} не зависят от производной $\partial_{\alpha_2} \varphi^{k_2}$.

¹⁰ Соотношениям совместности необходимо должны удовлетворять поля A , $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, D в выражении (3.1) для Лагранжиана пустого трехмерного пространства.

Затем, подставляя выражение (4.3) для Φ^{α_1} в соотношение (4.2) при $\lambda = \alpha_1$, $\mu = \alpha_3$, $\alpha_1 \neq \alpha_3$, получим, что $a_{k_2}^{\alpha_1\alpha_2}$ и b^{α_1} линейно зависят от производной $(\partial_{\alpha_3}\varphi^{k_3})$.

Продолжая рассуждения дальше, заключаем, что поле Φ^γ можно представить в виде многочлена по возрастающим степеням градиентов $\partial_\alpha\varphi^k$:

$$\begin{aligned} \Phi^\gamma = & A^\gamma + B_{\cdot\cdot k_1}^{\gamma\alpha_1\cdot}(\partial_{\alpha_1}\varphi^{k_1}) + C_{\cdot\cdot k_2\cdot k_1}^{\gamma\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}(\partial_{\alpha_1}\varphi^{k_1})(\partial_{\alpha_2}\varphi^{k_2}) + \\ & + D_{\cdot\cdot k_3\cdot k_2\cdot k_1}^{\gamma\alpha_3\cdot\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}(\partial_{\alpha_1}\varphi^{k_1})(\partial_{\alpha_2}\varphi^{k_2})(\partial_{\alpha_3}\varphi^{k_3}) + \dots, \end{aligned} \quad (4.4)$$

где коэффициенты A^γ , $B_{\cdot\cdot k_1}^{\gamma\alpha_1\cdot}$, $C_{\cdot\cdot k_2\cdot k_1}^{\gamma\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}$, $D_{\cdot\cdot k_3\cdot k_2\cdot k_1}^{\gamma\alpha_3\cdot\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}$ могут зависеть от X^β , φ^k , и не выписаны полиномиальные по градиентам слагаемые более высоких степеней.

Подставляя (4.4) в (4.2), получим

$$B_{\cdot\cdot k_1}^{\gamma\alpha_1\cdot} = -B_{\cdot\cdot k_1}^{\alpha_1\gamma\cdot},$$

т.е. коэффициенты $B_{\cdot\cdot k_1}^{\gamma\alpha_1\cdot}$ антисимметричны по индексам γ , α_1 ; аналогично заключаем, что коэффициенты $C_{\cdot\cdot k_2\cdot k_1}^{\gamma\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}$ антисимметричны по парам индексов γ , α_1 и γ , α_2 ; коэффициенты $D_{\cdot\cdot k_3\cdot k_2\cdot k_1}^{\gamma\alpha_3\cdot\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}$ антисимметричны по парам индексов γ , α_1 ; γ , α_2 ; γ , α_3 ; и так далее для всех невыписанных в (4.4) коэффициентов.

Из антисимметричности коэффициентов $C_{\cdot\cdot k_2\cdot k_1}^{\gamma\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}$ по индексам γ , α_1 и γ , α_2 получаются следующие равенства: переставляя γ , α_1 :

$$C_{\cdot\cdot k_2\cdot k_1}^{\gamma\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot} = -C_{\cdot\cdot k_2\cdot k_1}^{\alpha_1\alpha_2\cdot\gamma\cdot};$$

переставляя α_1 , α_2 :

$$C_{\cdot\cdot k_2\cdot k_1}^{\alpha_1\alpha_2\cdot\gamma\cdot} = -C_{\cdot\cdot k_2\cdot k_1}^{\alpha_2\alpha_1\cdot\gamma\cdot};$$

переставляя γ , α_2 :

$$C_{\cdot\cdot k_2\cdot k_1}^{\alpha_2\alpha_1\cdot\gamma\cdot} = -C_{\cdot\cdot k_2\cdot k_1}^{\gamma\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot}.$$

Откуда следует, что коэффициенты $C_{\cdot\cdot k_2\cdot k_1}^{\gamma\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}$ антисимметричны по паре греческих индексов α_1 , α_2 .

Аналогично доказывается, что коэффициенты $D_{\cdot\cdot k_3\cdot k_2\cdot k_1}^{\gamma\alpha_3\cdot\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}$ антисимметричны по любой паре греческих индексов,¹¹ и все остальные коэффициенты в (4.4) также антисимметричны по любой паре греческих индексов.

Таким образом, для любого, отличного от нуля, коэффициента в (4.4) все греческие индексы должны быть различны, но у греческих индексов может быть всего четыре различных значения 1, 2, 3, 4, и поэтому более четырех различных верхних индексов у коэффициентов в (4.4) быть не может, т.е. в разложении (4.4) невыписанные слагаемые на самом деле отсутствуют:

$$\begin{aligned} \Phi^\gamma = & A^\gamma + B_{\cdot\cdot k_1}^{\gamma\alpha_1\cdot}(\partial_{\alpha_1}\varphi^{k_1}) + C_{\cdot\cdot k_2\cdot k_1}^{\gamma\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}(\partial_{\alpha_1}\varphi^{k_1})(\partial_{\alpha_2}\varphi^{k_2}) + \\ & + D_{\cdot\cdot k_3\cdot k_2\cdot k_1}^{\gamma\alpha_3\cdot\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}(\partial_{\alpha_1}\varphi^{k_1})(\partial_{\alpha_2}\varphi^{k_2})(\partial_{\alpha_3}\varphi^{k_3}). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Рассмотрим теперь индивидуальные суммы в (4.5). Переставляя в сумме

$$C_{\cdot\cdot k_2\cdot k_1}^{\gamma\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}(\partial_{\alpha_1}\varphi^{k_1})(\partial_{\alpha_2}\varphi^{k_2})$$

у коэффициентов $C_{\cdot\cdot k_2\cdot k_1}^{\gamma\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}$ индексы α_1 , α_2 , находим:

¹¹ Последнее означает, что для коэффициентов $D_{\cdot\cdot k_3\cdot k_2\cdot k_1}^{\gamma\alpha_3\cdot\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}$ справедливо также следующее представление:

$$D_{\cdot\cdot k_3\cdot k_2\cdot k_1}^{\gamma\alpha_3\cdot\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot} = D_{k_3k_2k_1}\varepsilon^{\gamma\alpha_3\alpha_2\alpha_1},$$

где $D_{k_3k_2k_1}$ — антисимметричный 3-ковариантный пространственный тензор.

$$C_{\cdot\cdot k_2 k_1}^{\gamma\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}(\partial_{\alpha_1}\varphi^{k_1})(\partial_{\alpha_2}\varphi^{k_2}) = -C_{\cdot\cdot k_2\cdot k_1}^{\gamma\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot}(\partial_{\alpha_1}\varphi^{k_1})(\partial_{\alpha_2}\varphi^{k_2}),$$

и переименовывая по схеме $\alpha_1 \rightarrow \alpha_2$, $\alpha_2 \rightarrow \alpha_1$, $k_1 \rightarrow k_2$, $k_2 \rightarrow k_1$ немые латинские и греческие индексы, приходим к следующим равенствам:

$$C_{\cdot\cdot k_2 k_1}^{\gamma\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}(\partial_{\alpha_1}\varphi^{k_1})(\partial_{\alpha_2}\varphi^{k_2}) = -C_{\cdot\cdot k_2\cdot k_1}^{\gamma\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}(\partial_{\alpha_2}\varphi^{k_1})(\partial_{\alpha_1}\varphi^{k_2}) = -C_{\cdot\cdot k_1 k_2}^{\gamma\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}(\partial_{\alpha_1}\varphi^{k_1})(\partial_{\alpha_2}\varphi^{k_2}).$$

Следовательно, коэффициенты $C_{\cdot\cdot k_2 k_1}^{\gamma\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}$ антисимметричны по паре латинских индексов k_1, k_2 .

Аналогично доказывается, что коэффициенты $D_{\cdot\cdot k_3 k_2 k_1}^{\gamma\alpha_3\cdot\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}$ антисимметричны по любой паре латинских индексов.

Резюмируя сказанное, имеем, что коэффициенты $B_{\cdot\cdot k_1}^{\gamma\alpha_1\cdot}$ антисимметричны по греческим индексам, коэффициенты $C_{\cdot\cdot k_2 k_1}^{\gamma\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}$, $D_{\cdot\cdot k_3 k_2 k_1}^{\gamma\alpha_3\cdot\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}$ антисимметричны по любой паре греческих и любой паре латинских индексов.

Вычисляя дивергенцию Φ^γ , после ряда преобразований получим выражение для Лагранжиана пустого пространства в случае 4-мерного пространственно-временного многообразия:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' = \frac{\partial\Phi^\gamma}{\partial X^\gamma} = & \left(\frac{\partial A^\gamma}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}} + \left(\frac{\partial A^{\alpha_1}}{\partial X^{k_1}} + \left(\frac{\partial B_{\cdot\cdot k_1}^{\gamma\alpha_1\cdot}}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}} \right) (\partial_{\alpha_1}\varphi^{k_1}) + \\ & + \left(\frac{\partial B_{\cdot\cdot k_1}^{\alpha_2\alpha_1\cdot}}{\partial X^{k_2}} + \left(\frac{\partial C_{\cdot\cdot k_2 k_1}^{\gamma\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}} \right) (\partial_{\alpha_1}\varphi^{k_1})(\partial_{\alpha_2}\varphi^{k_2}) + \\ & + \left(\frac{\partial C_{\cdot\cdot k_2 k_1}^{\alpha_3\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}}{\partial X^{k_3}} + \left(\frac{\partial D_{\cdot\cdot k_3 k_2 k_1}^{\gamma\alpha_3\cdot\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}} \right) (\partial_{\alpha_1}\varphi^{k_1})(\partial_{\alpha_2}\varphi^{k_2})(\partial_{\alpha_3}\varphi^{k_3}) + \\ & + \frac{\partial D_{\cdot\cdot k_3 k_2 k_1}^{\gamma\alpha_3\cdot\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}}{\partial X^{k_4}} (\partial_{\alpha_1}\varphi^{k_1})(\partial_{\alpha_2}\varphi^{k_2})(\partial_{\alpha_3}\varphi^{k_3})(\partial_\gamma\varphi^{k_4}). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Последнее слагаемое в (4.6) в силу

$$D_{\cdot\cdot k_3 k_2 k_1}^{\gamma\alpha_3\cdot\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot} = D_{k_3 k_2 k_1} \varepsilon^{\gamma\alpha_3\alpha_2\alpha_1}$$

и при условии, что число физических полевых величин также равно четырём, приводится к следующему виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_{\cdot\cdot k_3 k_2 k_1}^{\gamma\alpha_3\cdot\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}}{\partial X^{k_4}} (\partial_{\alpha_1}\varphi^{k_1})(\partial_{\alpha_2}\varphi^{k_2})(\partial_{\alpha_3}\varphi^{k_3})(\partial_\gamma\varphi^{k_4}) = \\ = (\partial_{\alpha_1}\varphi^{k_1})(\partial_{\alpha_2}\varphi^{k_2})(\partial_{\alpha_3}\varphi^{k_3})(\partial_\gamma\varphi^{k_4}) \varepsilon^{\gamma\alpha_3\alpha_2\alpha_1} \frac{\partial D_{k_3 k_2 k_1}}{\partial X^{k_4}} = \\ = J \varepsilon^{k_4 k_3 k_2 k_1} \frac{\partial D_{k_3 k_2 k_1}}{\partial X^{k_4}}, \end{aligned}$$

где J — якобиан отображения $(X^1, X^2, X^3, X^4) \rightarrow (x^1, x^2, x^3, x^4)$.

С целью оптимизации записи дальнейших рассуждений введем обозначения

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{\partial A^\gamma}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}}, \\ L_{\cdot k_1}^{\alpha_1\cdot} &= \frac{\partial A^{\alpha_1}}{\partial X^{k_1}} + \left(\frac{\partial B_{\cdot\cdot k_1}^{\gamma\alpha_1\cdot}}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{\cdot k_2 \cdot k_1}^{\alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} &= \frac{\partial B_{\cdot k_1}^{\alpha_2 \alpha_1 \cdot}}{\partial x^{k_2}} + \left(\frac{\partial C_{\cdot k_2 \cdot k_1}^{\gamma \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot}}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}}, \\
L_{\cdot k_3 \cdot k_2 \cdot k_1}^{\alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} &= \frac{\partial C_{\cdot k_2 \cdot k_1}^{\alpha_3 \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot}}{\partial x^{k_3}} + \left(\frac{\partial D_{\cdot k_3 \cdot k_2 \cdot k_1}^{\gamma \alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot}}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}}, \\
L_{\cdot k_4 \cdot k_3 \cdot k_2 \cdot k_1}^{\alpha_4 \cdot \alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} &= \frac{\partial D_{\cdot k_3 \cdot k_2 \cdot k_1}^{\alpha_4 \alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot}}{\partial x^{k_4}}
\end{aligned}$$

и представим Лагранжиан пустого 4-мерного пространственно-временного многообразия в форме

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}' = A + L_{\cdot k_1}^{\alpha_1 \cdot} (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) + L_{\cdot k_2 \cdot k_1}^{\alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) (\partial_{\alpha_2} \varphi^{k_2}) + L_{\cdot k_3 \cdot k_2 \cdot k_1}^{\alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) (\partial_{\alpha_2} \varphi^{k_2}) (\partial_{\alpha_3} \varphi^{k_3}) + \\
+ L_{\cdot k_4 \cdot k_3 \cdot k_2 \cdot k_1}^{\alpha_4 \cdot \alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) (\partial_{\alpha_2} \varphi^{k_2}) (\partial_{\alpha_3} \varphi^{k_3}) (\partial_{\alpha_4} \varphi^{k_4}).
\end{aligned} \quad (4.7)$$

Заметим, что в этом представлении нулевого Лагранжиана все коэффициенты могут быть антисимметризованы по нижним латинским индексам, поскольку, как нетрудно проверить, все указанные коэффициенты антисимметричны по любой паре латинских индексов.

Подставляя (4.7) в уравнение Эйлера—Лагранжа (1.4) и приравнявая нулю последовательно суммы коэффициентов при одинаковых степенях градиентов полевых величин φ^k , можно получить условия совместности для коэффициентов в разложении (4.7).

Так, условие равенства нулю суммы коэффициентов при нулевой степени градиентов есть:

$$\frac{\partial A}{\partial x^{k_1}} - \left(\frac{\partial}{\partial X^{\alpha_1}} L_{\cdot k_1}^{\alpha_1 \cdot} \right)_{\text{expl}} = 0, \quad (4.8)$$

или также

$$\frac{\partial}{\partial x^{k_1}} \left(\frac{\partial A^\gamma}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}} - \frac{\partial}{\partial X^{\alpha_1}} \left(\frac{\partial A^{\alpha_1}}{\partial x^{k_1}} + \left(\frac{\partial B_{\cdot k_1}^{\gamma \alpha_1 \cdot}}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}} \right)_{\text{expl}} = 0. \quad (4.9)$$

Ясно, что это условие совместности тождественно удовлетворяется в силу

$$\frac{\partial}{\partial x^{k_1}} \left(\frac{\partial A^\gamma}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}} = \left(\frac{\partial}{\partial X^{\alpha_1}} \frac{\partial A^{\alpha_1}}{\partial x^{k_1}} \right)_{\text{expl}}$$

и, поскольку тензор $B_{\cdot k_1}^{\gamma \alpha_1 \cdot}$ антисимметричен по верхним индексам,

$$\left(\frac{\partial^2 B_{\cdot k_1}^{\gamma \alpha_1 \cdot}}{\partial X^{\alpha_1} \partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}} = 0.$$

Следующим в ряду условий совместности будет

$$\frac{\partial L_{\cdot k_1}^{\alpha_1 \cdot}}{\partial x^{k_2}} - \frac{\partial L_{\cdot k_2}^{\alpha_1 \cdot}}{\partial x^{k_1}} + \left(\frac{\partial}{\partial X^{\alpha_2}} L_{\cdot k_1 \cdot k_2}^{\alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} \right)_{\text{expl}} - \left(\frac{\partial}{\partial X^{\alpha_2}} L_{\cdot k_2 \cdot k_1}^{\alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} \right)_{\text{expl}} = 0, \quad (4.10)$$

или

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial X^{k_2}} \left(\frac{\partial A^{\alpha_1}}{\partial X^{k_1}} + \left(\frac{\partial B^{\gamma \alpha_1}}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}} \right) - \\
& \quad - \frac{\partial}{\partial X^{\alpha_2}} \left(\frac{\partial B^{\alpha_2 \alpha_1}}{\partial X^{k_1}} + \left(\frac{\partial C^{\gamma \alpha_2 \alpha_1}}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}} \right)_{\text{expl}} + \\
& \quad + \frac{\partial}{\partial X^{\alpha_2}} \left(\frac{\partial B^{\alpha_2 \alpha_1}}{\partial X^{k_1}} + \left(\frac{\partial C^{\gamma \alpha_2 \alpha_1}}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}} \right)_{\text{expl}} - \\
& \quad - \frac{\partial}{\partial X^{k_1}} \left(\frac{\partial A^{\alpha_1}}{\partial X^{k_2}} + \left(\frac{\partial B^{\gamma \alpha_1}}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}} \right)_{\text{expl}} = 0.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Это условие тождественно удовлетворяется в силу перестановочности частного дифференцирования и антисимметрии тензора $C^{\gamma \alpha_2 \alpha_1}_{\cdot k_1 \cdot k_2}$ по любой паре греческих индексов.

Используя квадратные скобки для обозначения операции альтернирования по заключенным в них индексам, условие совместности (4.10) представим в форме

$$\frac{\partial L^{\alpha_1}_{\cdot [k_1]}}{\partial X^{k_2}} = \left(\frac{\partial}{\partial X^{\alpha_2}} L^{\alpha_2 \alpha_1}_{\cdot [k_2 \cdot k_1]} \right)_{\text{expl}}. \tag{4.12}$$

Аналогично могут быть найдены еще два условия совместности:

$$-\frac{\partial L^{\alpha_2 \alpha_1}_{\cdot [k_1 \cdot k_2]}}{\partial X^{k_3}} = \left(\frac{\partial}{\partial X^{\alpha_3}} L^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1}_{\cdot [k_3 \cdot k_2 \cdot k_1]} \right)_{\text{expl}}, \tag{4.13}$$

$$-\frac{\partial L^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1}_{\cdot [k_1 \cdot k_2 \cdot k_3]}}{\partial X^{k_4}} = \left(\frac{\partial}{\partial X^{\alpha_4}} L^{\alpha_4 \alpha_3 \alpha_2 \alpha_1}_{\cdot [k_4 \cdot k_3 \cdot k_2 \cdot k_1]} \right)_{\text{expl}}. \tag{4.14}$$

Приведем также необходимые для понимания формул (4.12)–(4.14) соотношения:

$$\begin{aligned}
P^{\alpha_1}_{k_1 k_2} &= \frac{\partial L^{\alpha_1}_{\cdot k_1}}{\partial X^{k_2}}, \quad \frac{\partial L^{\alpha_1}_{\cdot [k_1]}}{\partial X^{k_2}} = P^{\alpha_1}_{[k_1 k_2]} = \frac{1}{2}(P^{\alpha_1}_{k_1 k_2} - P^{\alpha_1}_{k_2 k_1}); \\
P^{\alpha_2 \alpha_1}_{k_1 k_2 k_3} &= \frac{\partial L^{\alpha_2 \alpha_1}_{\cdot k_1 \cdot k_2}}{\partial X^{k_3}}, \quad \frac{\partial L^{\alpha_2 \alpha_1}_{\cdot [k_1 \cdot k_2]}}{\partial X^{k_3}} = P^{\alpha_2 \alpha_1}_{[k_1 k_2 k_3]}, \\
P^{\alpha_2 \alpha_1}_{[k_1 k_2 k_3]} &= \frac{1}{3!}(P^{\alpha_2 \alpha_1}_{k_1 k_2 k_3} - P^{\alpha_2 \alpha_1}_{k_2 k_1 k_3} - P^{\alpha_2 \alpha_1}_{k_3 k_2 k_1} - P^{\alpha_2 \alpha_1}_{k_1 k_3 k_2} + P^{\alpha_2 \alpha_1}_{k_2 k_3 k_1} + P^{\alpha_2 \alpha_1}_{k_3 k_1 k_2}); \\
P^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1}_{k_1 k_2 k_3 k_4} &= \frac{\partial L^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1}_{\cdot k_1 \cdot k_2 \cdot k_3}}{\partial X^{k_4}}, \quad \frac{\partial L^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1}_{\cdot [k_1 \cdot k_2 \cdot k_3]}}{\partial X^{k_4}} = P^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1}_{[k_1 k_2 k_3 k_4]}, \\
P^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1}_{[k_1 k_2 k_3 k_4]} &= \frac{1}{4!}(P^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1}_{k_1 k_2 k_3 k_4} - P^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1}_{k_3 k_2 k_1 k_4} - P^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1}_{k_1 k_3 k_2 k_4} - P^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1}_{k_2 k_1 k_3 k_4} + P^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1}_{k_2 k_3 k_1 k_4} + P^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1}_{k_3 k_1 k_2 k_4} + \\
& \quad + P^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1}_{k_4 k_2 k_1 k_3} + P^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1}_{k_1 k_4 k_2 k_3} + P^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1}_{k_2 k_1 k_4 k_3} - P^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1}_{k_4 k_1 k_2 k_3} - P^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1}_{k_1 k_2 k_4 k_3} - P^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1}_{k_2 k_4 k_1 k_3} - \\
& \quad - P^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1}_{k_4 k_3 k_1 k_2} - P^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1}_{k_1 k_4 k_3 k_2} - P^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1}_{k_3 k_1 k_4 k_2} + P^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1}_{k_3 k_4 k_1 k_2} + P^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1}_{k_1 k_3 k_4 k_2} + P^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1}_{k_4 k_1 k_3 k_2} + \\
& \quad + P^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1}_{k_4 k_3 k_2 k_1} + P^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1}_{k_2 k_4 k_3 k_1} + P^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1}_{k_3 k_2 k_4 k_1} - P^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1}_{k_3 k_4 k_2 k_1} - P^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1}_{k_2 k_3 k_4 k_1} - P^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1}_{k_4 k_2 k_3 k_1}).
\end{aligned}$$

5. Вычисление нулевого Лагранжиана пространства произвольной размерности

Приведенные выше рассуждения о форме Лагранжиана пустого пространства без труда обобщаются на случай произвольного числа пространственно-временных координат X^β ($\beta = 1, 2, \dots, n+1$): векторное поле Φ^γ определяется в виде

$$\Phi^\gamma = A^\gamma + A^{\gamma\alpha_1}_{\cdot k_1} (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) + A^{\gamma\alpha_2\alpha_1}_{\cdot k_2 \cdot k_1} (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) (\partial_{\alpha_2} \varphi^{k_2}) + \dots + A^{\gamma\alpha_n\alpha_{n-1}\dots\alpha_1}_{\cdot k_n \cdot k_{n-1} \dots k_1} (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) \dots (\partial_{\alpha_{n-1}} \varphi^{k_{n-1}}) (\partial_{\alpha_n} \varphi^{k_n}), \quad (5.1)$$

где тензоры

$$A^\gamma(X^\beta, x^s), A^{\gamma\alpha_1}_{\cdot k_1}(X^\beta, x^s), A^{\gamma\alpha_2\alpha_1}_{\cdot k_2 \cdot k_1}(X^\beta, x^s), A^{\gamma\alpha_n\alpha_{n-1}\dots\alpha_1}_{\cdot k_n \cdot k_{n-1} \dots k_1}(X^\beta, x^s)$$

антисимметричны по любой паре латинских и любой паре греческих индексов.¹²

Вычисляя дивергенцию поля Φ^γ , определенного согласно (5.1), находим выражение для Лагранжиана пустого пространства в случае $(n+1)$ -мерного пространственно-временного многообразия:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' = \frac{\partial \Phi^\gamma}{\partial X^\gamma} = & \left(\frac{\partial A^\gamma}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}} + \left(\frac{\partial A^{\alpha_1}}{\partial x^{k_1}} + \left(\frac{\partial A^{\gamma\alpha_1}_{\cdot k_1}}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}} \right) (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) + \\ & + \left(\frac{\partial A^{\alpha_2\alpha_1}_{\cdot k_2 \cdot k_1}}{\partial x^{k_2}} + \left(\frac{\partial A^{\gamma\alpha_2\alpha_1}_{\cdot k_2 \cdot k_1}}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}} \right) (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) (\partial_{\alpha_2} \varphi^{k_2}) + \dots + \\ & + \left(\frac{\partial A^{\alpha_n\alpha_{n-1}\dots\alpha_1}_{\cdot k_n \cdot k_{n-1} \dots k_1}}{\partial x^{k_n}} + \left(\frac{\partial A^{\gamma\alpha_n\alpha_{n-1}\dots\alpha_1}_{\cdot k_n \cdot k_{n-1} \dots k_1}}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}} \right) (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) \dots (\partial_{\alpha_{n-1}} \varphi^{k_{n-1}}) (\partial_{\alpha_n} \varphi^{k_n}) + \\ & + \frac{\partial A^{\gamma\alpha_n\alpha_{n-1}\dots\alpha_1}_{\cdot k_n \cdot k_{n-1} \dots k_1}}{\partial x^{k_{n+1}}} (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) \dots (\partial_{\alpha_{n-1}} \varphi^{k_{n-1}}) (\partial_{\alpha_n} \varphi^{k_n}) (\partial_\gamma \varphi^{k_{n+1}}). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Здесь последнее слагаемое при условии, что число физических полевых величин в точности равно $n+1$, может быть представлено в форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial A^{\gamma\alpha_n\alpha_{n-1}\dots\alpha_1}_{\cdot k_n \cdot k_{n-1} \dots k_1}}{\partial x^{k_{n+1}}} (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) \dots (\partial_{\alpha_{n-1}} \varphi^{k_{n-1}}) (\partial_{\alpha_n} \varphi^{k_n}) (\partial_\gamma \varphi^{k_{n+1}}) = \\ = (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) \dots (\partial_{\alpha_{n-1}} \varphi^{k_{n-1}}) (\partial_{\alpha_n} \varphi^{k_n}) (\partial_\gamma \varphi^{k_{n+1}}) \varepsilon^{\gamma\alpha_n\alpha_{n-1}\dots\alpha_1} \frac{\partial A_{k_n k_{n-1} \dots k_1}}{\partial x^{k_{n+1}}} = \\ = J \varepsilon^{k_{n+1} k_n k_{n-1} \dots k_1} \frac{\partial A_{k_n k_{n-1} \dots k_1}}{\partial x^{k_{n+1}}}, \end{aligned}$$

где J — якобиан отображения $(X^1, X^2, \dots, X^{n+1}) \rightarrow (x^1, x^2, \dots, x^{n+1})$.

6. Нулевые Лагранжианы, инвариантные относительно сдвигов физических полей

Поставим далее задачу о разыскании наиболее общей формы Лагранжиана пустого пространства, инвариантного относительно сдвигов полевых величин φ^s .

¹² Применительно к тензору $A^{\gamma\alpha_n\alpha_{n-1}\dots\alpha_1}_{\cdot k_n \cdot k_{n-1} \dots k_1}$ антисимметричность по любой паре греческих индексов означает, что

$$A^{\gamma\alpha_n\alpha_{n-1}\dots\alpha_1}_{\cdot k_n \cdot k_{n-1} \dots k_1} = A_{k_n k_{n-1} \dots k_1} \varepsilon^{\gamma\alpha_n\alpha_{n-1}\dots\alpha_1},$$

где $A_{k_n k_{n-1} \dots k_1}$ — антисимметричный n -ковариантный пространственный тензор.

Эта проблема особенно интересна в связи с представлением нелинейно упругого поля в поврежденной среде, когда Лагранжиан заведомо явно будет зависеть от материальных переменных X^β .

Сформулированная проблема сразу же решается в случае, когда число пространственно-временных координат X^β равно трем и имеется три полевых величины φ^s , которые в применении к нелинейной теории упругости мы, как обычно, отождествим с переменными Эйлера x^s . Действительно, скалярные и тензорные поля A , $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, D в выражении (3.1) для Лагранжиана пустого трехмерного пространства необходимо должны удовлетворять соотношениям совместности (3.15)

$$\text{grad}_{\text{expl}} A = \text{Div}_{\text{expl}} \mathbf{B}, \quad (\text{Rot}_{\text{expl}} \mathbf{C})^T = -\text{rot}_{\text{expl}} \mathbf{B}^T, \quad \text{Grad}_{\text{expl}} D = \text{div}_{\text{expl}} \mathbf{C}^T.$$

Учитывая, что A , $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ не зависят от переменных x^s , приходим к уравнениям

$$\text{Div}_{\text{expl}} \mathbf{B} = \mathbf{0}, \quad \text{Rot}_{\text{expl}} \mathbf{C} = \mathbf{0}, \quad \text{Grad}_{\text{expl}} D = \mathbf{0},$$

из которых следует, что Лагранжиан пустого трехмерного пространства будет инвариантен относительно сдвигов Эйлеровых переменных x^s , только если $A = A(X^\beta)$, D есть некоторая постоянная, и найдутся 1-ковариантное пространственное 1-ковариантное отсчетное тензорное поле $E_{k\alpha} = E_{k\alpha}(X^\beta)$ и ковариантное пространственное векторное поле $A^k = A^k(X^\beta)$ такие, что

$$\mathbf{B} = \text{Rot}_{\text{expl}} \mathbf{E} = (\mathbf{E} \times \nabla_{\mathbf{x}})_{\text{expl}}, \quad \mathbf{C} = \text{Grad}_{\text{expl}} \mathbf{A} = (\mathbf{A} \otimes \nabla_{\mathbf{x}})_{\text{expl}}, \quad (6.1)$$

или в координатной записи —

$$B_k^\beta = \varepsilon^{\beta\alpha\gamma} \frac{\partial E_{k\alpha}}{\partial X^\gamma}, \quad C_{\beta}^k = \partial_\beta A^k. \quad (6.2)$$

Таким образом, наиболее общая форма Лагранжиана пустого трехмерного пространства, инвариантного относительно сдвигов Эйлеровых переменных x^s , есть¹³

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'(\partial_\beta \varphi^k, X^\beta) = & A(X^\lambda) + \varepsilon^{\beta\alpha\gamma} \frac{\partial E_{k\alpha}(X^\lambda)}{\partial X^\gamma} \partial_\beta \varphi^k + \\ & + (\partial_\beta A^k(X^\lambda)) J \partial_k X^\beta + D_0 J. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Переходим к нахождению наиболее общей формы Лагранжиана пустого четырехмерного пространства, инвариантного относительно сдвигов полевых величин φ^s .

Исходя из представления Лагранжиана (4.7) и учитывая условия совместности¹⁴

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial X^{\alpha_1}} L_{\cdot k_1}^{\alpha_1 \cdot} \right)_{\text{expl}} &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial X^{\alpha_2}} L_{\cdot [k_2 \cdot k_1]}^{\alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} \right)_{\text{expl}} &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial X^{\alpha_3}} L_{\cdot [k_3 \cdot k_2 \cdot k_1]}^{\alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} \right)_{\text{expl}} &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial X^{\alpha_4}} L_{\cdot [k_4 \cdot k_3 \cdot k_2 \cdot k_1]}^{\alpha_4 \cdot \alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} \right)_{\text{expl}} &= 0, \end{aligned} \quad (6.4)$$

¹³ Заметим, что тензор $E_{k\alpha}$ по существу совпадает с тензором $K_{k\alpha}$ в формуле (3.13).

¹⁴ Коэффициент A в (4.7) может, очевидно, зависеть лишь от пространственно-временных координат X^β .

сразу же заключаем относительно коэффициентов в разложении (4.7), что

$$\begin{aligned} L_{\cdot k_1}^{\alpha_1 \cdot} &= \left(\frac{\partial}{\partial X^\gamma} M_{\cdot k_1}^{\gamma \alpha_1 \cdot} \right)_{\text{expl}}, \\ L_{\cdot k_2 \cdot k_1}^{\alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} &= \left(\frac{\partial}{\partial X^\gamma} M_{\cdot k_2 \cdot k_1}^{\gamma \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} \right)_{\text{expl}}, \\ L_{\cdot k_3 \cdot k_2 \cdot k_1}^{\alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} &= \left(\frac{\partial}{\partial X^\gamma} M_{\cdot k_3 \cdot k_2 \cdot k_1}^{\gamma \alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} \right)_{\text{expl}}, \\ L_{\cdot k_4 \cdot k_3 \cdot k_2 \cdot k_1}^{\alpha_4 \cdot \alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} &= \varepsilon^{\alpha_4 \alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} M_{k_4 k_3 k_2 k_1}, \end{aligned} \quad (6.5)$$

где все тензоры не зависят от полей φ^k ; $M_{\cdot k_1}^{\gamma \alpha_1 \cdot}$ антисимметричен по верхним индексам; $M_{\cdot k_2 \cdot k_1}^{\gamma \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot}$ антисимметричен по парам верхних индексов γ и α_2 , α_1 и α_2 ,¹⁵ и по паре нижних латинских индексов; $M_{\cdot k_3 \cdot k_2 \cdot k_1}^{\gamma \alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot}$ антисимметричен по паре верхних индексов γ и α_3 и любой паре верхних индексов, не содержащей индекс γ ,¹⁶ и по любой паре нижних латинских индексов; $M_{k_4 k_3 k_2 k_1}$ — постоянные величины, антисимметричные по любой паре нижних латинских индексов.

Полученные результаты позволяют вычислить конфигурационную силу f_λ^{inh} , обусловленную неоднородностью поля.

Если ограничиться силами, пропорциональными первым градиентам поля, то, поскольку

$$f_\lambda^{\text{inh}} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial X^\lambda} \right)_{\text{expl}},$$

для трех- и четырехмерного пространства соответственно имеем:

$$\begin{aligned} f_\lambda^{\text{inh}} &= \varepsilon^{\beta \alpha \gamma} (\partial_\beta \varphi^k) \frac{\partial^2 K_{k\alpha}}{\partial X^\gamma \partial X^\lambda}, \\ f_\lambda^{\text{inh}} &= (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) \frac{\partial^2 M_{\cdot k_1}^{[\gamma \alpha_1] \cdot}}{\partial X^\gamma \partial X^\lambda}, \end{aligned}$$

причем все девять компонент $K_{k\alpha}$ независимы, а среди 64 компонент $M_{\cdot k_1}^{[\gamma \alpha_1] \cdot}$ независимых лишь 24.

Квадратичные по градиентам поля конфигурационные силы вычисляются соответственно в форме

$$\begin{aligned} f_\lambda^{\text{inh}} &= \frac{1}{2} (\partial_{\gamma \lambda}^2 A^k) \varepsilon^{\gamma \alpha \beta} \varepsilon_{klm} (\partial_\alpha \varphi^l) (\partial_\beta \varphi^m), \\ f_\lambda^{\text{inh}} &= (\partial_{\gamma \lambda}^2 M_{\cdot [k_2 \cdot k_1]}^{[\gamma \alpha_2 \cdot \alpha_1] \cdot}) (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) (\partial_{\alpha_2} \varphi^{k_2}). \end{aligned}$$

Литература

- [1] Maugin G. A. Material Inhomogeneities in Elasticity. London: Chapman & Hall, 1993. 276 pp.
- [2] Silhavy M. The Mechanics and Thermodynamics of Continuous Media. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1997. 506 pp.

¹⁵ Следовательно, антисимметричен по индексам γ и α_1 .

¹⁶ Следовательно, антисимметричен по парам индексов γ и α_2 , γ и α_1 .

- [3] Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М: Мир, 1989. 639 с.
- [4] Мак-Коннел А.Дж. Введение в тензорный анализ с приложениями к геометрии, механике и физике. М.: Физматгиз, 1963. 412 с.

ON THE NULL LAGRANGIANS OF NONLINEAR ELASTIC FIELDS

© 2002 Y.N. Radayev, V.A. Gudkov¹⁷

In the present study the null Lagrangian theory for n -dimensional manifold (including 4-dimensional Minkowski space-time) is developed in an attempt to extend the canonical formalism of nonlinear field theory. All developments are presented in the frame of finite strains. By the aid of divergence formula for the null Lagrangians regular in n -dimensional star-shaped domains, a general representation of the null Lagrangian depending as maximum on the first order field gradients is obtained. A method of systematic derivation of the null Lagrangians in n -dimensional manifold is proposed. It is shown that in the case of nonlinear elastic field in 3-dimensional space the null Lagrangian is represented via 15 arbitrary independent field functions. The dual null Lagrangians, corresponding to the Piola inverse-motion description, are derived in the case of 3-dimensional space. Null Lagrangians of 4-dimensional material manifold are then analysed. Invariant under actual placement translations null Lagrangians are obtained. Finally, material forces acting on empty 4-dimensional manifold are studied.

Поступила в редакцию 14/XI/2002;
в окончательном варианте — 11/XII/2002.

¹⁷ Radayev Yuri Nickolaevich (radayev@ssu.samara.ru), Gudkov Vasily Alexandrovich, Dept. of Continuum Mechanics, Samara State University, Samara, 443011, Russia.