

МАТЕМАТИКА

УДК 519.21

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА УСЛОВНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ, ОТВЕЧАЮЩИХ ОБОБЩЕННЫМ СЛУЧАЙНЫМ ПОЛЯМ¹

© 2002 С.Я. Шатских²

В этой работе на основе свойств биортогональных случайных полей при сужении пространства пробных функций рассматриваются вопросы эквивалентности условных центрированных гауссовских мер, отвечающих обобщенным случайным полям. Кроме того, проведено построение преобразования независимости для бесконечномерных распределений, отвечающих обобщенным эллиптически контурированным случайным полям.

1. Предварительные сведения

В этой работе под *обобщенным случайным полем* (обобщенной случайной функцией) в открытой области $T \subseteq \mathbb{R}^d$ будем понимать линейное непрерывное отображение

$$u(t) \mapsto \xi(u)$$

пространства пробных функций $C_0^\infty(T)$ в пространство случайных величин, определенных на вероятностной тройке $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\}$, в частности, в гильбертово пространство случайных величин $L^2\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\}$. При этом "обычные" случайные поля $\xi(t)$, $t \in T \subseteq \mathbb{R}^d$, можно рассматривать как обобщенные:

$$\xi(u) = \int_{\mathbb{R}^d} \xi(t)u(t)dt.$$

Кратко приведем основные факты теории обобщенных случайных полей, которые будут использованы в этой работе. В основном мы будем следовать книгам Ю.А. Розанова [1, 2].³

Для обобщенного случайного поля $\xi(u)$, $u \in C_0^\infty(T)$ введем определения *среднего значения*

¹ Представлена доктором физико-математических наук профессором С.В. Асташкиным.

² Шатских Сергей Яковлевич (shatskih@ssu.samara.ru), кафедра функционального анализа и теории функций Самарского государственного университета, 443011, Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

³ Обобщенным случайным полям посвящена обширная литература (см., например, [3, 4]). Книга [1] содержит замечания исторического характера.

$$m(u) = \mathbb{M}\{\xi(u)\} = \int_{\Omega} \xi(u) d\mathbb{P}, \quad u \in C_0^\infty(T)$$

и ковариационного функционала

$$B(u, v) = \mathbb{M}\left\{[\xi(u) - m(u)][\overline{\xi(v) - m(v)}]\right\}, \quad u, v \in C_0^\infty(T).$$

Далее, с обобщенным случайным полем $\xi(u)$, $u \in C_0^\infty(T)$ для различных открытых областей $S \subseteq T$ будем связывать гильбертовы пространства, которые являются замкнутыми линейными оболочками случайных величин

$$\mathbb{H}(S) := \bigvee_{\text{supp } u \subseteq S} \xi(u) \subseteq L^2\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\}. \quad (1.1)$$

Определение 1. Говорят, что семейство пространств $\mathbb{H}(S)$, определенное соотношениями (1.1) по системе открытых областей $S \subseteq T$, обладает свойствами:

аддитивности, если для любых открытых областей $S_1, S_2 \subseteq T$ выполняется равенство

$$\mathbb{H}(S_1 \cup S_2) = \mathbb{H}(S_1) \vee \mathbb{H}(S_2); \quad (1.2)$$

непрерывности "изнутри", если

$$\mathbb{H}(S) = \bigvee_{n=1}^{\infty} \mathbb{H}(S_n), \quad S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n \quad (1.3)$$

для любой последовательности монотонно возрастающих открытых областей S_n , ($n = \overline{1, \infty}$, $S_n \subseteq S_{n+1}$); здесь символ $\vee$ означает замкнутую линейную оболочку указанных пространств;

непрерывности "извне" (*непрерывность обновления случайного поля*), если

$$\mathbb{H}_+(S) := \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathbb{H}(S^\varepsilon) = \mathbb{H}(S). \quad (1.4)$$

Определение 2. Обобщенное случайное поле $\xi^*(u)$, $u \in C_0^\infty(T)$ называется *биортогональным* по отношению к полю $\xi(u)$, $u \in C_0^\infty(T)$, если выполняются соотношения

$$1^\circ) \mathbb{M}\{\xi(u)\overline{\xi^*(v)}\} = \int_T u(t)\overline{v(t)}dt, \quad u, v \in C_0^\infty(T);$$

$$2^\circ) \mathbb{H}(T) = \mathbb{H}^*(T), \quad \text{где } \mathbb{H}^*(S) := \bigvee_{\text{supp } u \subseteq S} \xi^*(u).$$

Определение 3. Говорят, что пара биортогональных случайных полей $\xi(u)$, $\xi^*(u)$, $u \in C_0^\infty(T)$ обладает свойством *сопряженности*, если для любой открытой области $S \subseteq T$, ограниченной или имеющей ограниченное дополнение в T , выполняется равенство

$$\mathbb{H}^*(S) = \mathbb{H}_+(S^c)^\perp, \quad \text{где } S^c = T \setminus S, \quad (1.5)$$

и для любого множества $W \subseteq T$

$$\mathbb{H}_+(W) := \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathbb{H}(W^\varepsilon);$$

здесь W^ε — ε -окрестность множества W в T .

Определение 4. Обобщенное случайное поле $\xi(u), u \in C_0^\infty(T)$ называется *гауссовским*, если относительно вероятности $\mathbf{P}$ гауссовскими являются совместные распределения вероятностей любых (взятых в конечном числе) случайных величин $\xi(u_1), \dots, \xi(u_n), u_k \in C_0^\infty(T), k = \overline{1, n}$.

Для гауссовских обобщенных случайных полей $\xi(u), u \in C_0^\infty(T)$ в книге [1, с. 132] установлено следующее утверждение: семейство гильбертовых пространств $\mathbf{H}(S)$, определенных по системе открытых областей $S \subseteq T$ равенством (1.1), обладает свойствами аддитивности (1.2) и непрерывности (1.3).

Кроме того, в книге [1] рассмотрены классы обобщенных случайных полей, которые обладают непрерывностью в смысле (1.4). В частности, "обычные" случайные поля, непрерывные в среднем квадратичном, обладают свойством непрерывности "извне".

Определение 5. Обобщенное случайное поле $\xi(u), u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ называется *стационарным* (однородным), если среднее значение $m(\cdot)$ и ковариационный функционал $B(\cdot, \cdot)$ этого поля инвариантны относительно сдвигов (см. [1]).

Для обобщенных стационарных случайных полей существует *среднее* $M = \text{const}$ и σ -конечная мера на борелевской σ -алгебре пространства $\mathbb{R}^d$, называемая *спектральной мерой*, такие, что

$$m(u) = M \cdot \int_{\mathbb{R}^d} u(t) dt;$$

$$B(u, v) = \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{u}(\lambda) \overline{\tilde{v}(\lambda)} F(d\lambda), \lambda \in \mathbb{R}^d,$$

где

$$\tilde{u}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^d} \exp[i\langle \lambda, t \rangle] u(t) dt$$

— преобразование Фурье функции $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, а спектральная мера F удовлетворяет условию

$$\int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\lambda|^2)^{-n} F(d\lambda) < \infty$$

при некотором $n > 0$.

В следующей теореме приведены основные утверждения о биортогональных стационарных случайных полях, рассмотренные в книгах [1, гл. 3, § 2, пп. 2 и 3], [2, гл. 4, § 1 и 2].

Теорема 1.1. Если у стационарного обобщенного случайного поля $\xi(u), u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ существует спектральная плотность

$$f(\lambda) = \frac{F(d\lambda)}{d\lambda},$$

то

1°) неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\lambda|^2)^{-m} f^{-1}(\lambda) d\lambda < \infty$$

при некотором $m > 0$ является необходимым и достаточным условием для существования биортогонального поля $\xi^*(u), u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$;

2°) биортогональное случайное поле $\xi^*(u)$, $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ является стационарным случайным полем (стационарно связанным с полем $\xi(u)$, $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$) со спектральной плотностью вида

$$f^*(\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^{2d}} f^{-1}(\lambda);$$

3°) для биортогональных случайных полей $\xi(u)$, $\xi^*(u)$, $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ всегда выполняется условие сопряженности (0.5) по отношению к системе всех открытых областей $S \subseteq \mathbb{R}^d$, ограниченных или имеющих ограниченное дополнение.

Перейдем к вопросам эквивалентности гауссовских распределений, отвечающих обобщенным случайным полям. Под эквивалентными мерами мы понимаем меры с одинаковым набором "нулевых" множеств.

Рассмотрим $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$ — две вероятностные меры на измеримом пространстве $\{\Omega, \mathcal{F}\}$, относительно которых случайное поле $\xi(u)$, $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ является центрированным однородным и гауссовским:

$$m_i(u) = 0, \quad B_i(u, v) = \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{u}(\lambda) \overline{\tilde{v}(\lambda)} f_i(\lambda) d\lambda,$$

где $f_i(\lambda)$, $(i = 1, 2)$ — спектральные плотности.

Обозначим через $\mathcal{F}_\xi^S$ σ -алгебру, порожденную всеми случайными величинами $\xi(u)$, $u \in C_0^\infty(S)$, $S \subseteq \mathbb{R}^d$, и пусть $\mathbb{P}_i^S$ — сужение мер $\mathbb{P}_i$, $i = 1, 2$, на σ -алгебру $\mathcal{F}_\xi^S$.

Приведем формулировку известного критерия эквивалентности гауссовских распределений, отвечающих обобщенным однородным случайным полям (см., например, [5, 7, 8]).

Положим

$$b(u, v) := B_1(u, v) - B_2(u, v).$$

Теорема 1.2. Для эквивалентности гауссовских мер $\mathbb{P}_1^S$ и $\mathbb{P}_2^S$ необходимо и достаточно, чтобы разность корреляционных функционалов $b(u, v)$ допускала представление

$$b(u, v) = \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \tilde{u}(\lambda) \overline{\tilde{v}(\mu)} G(\lambda, \mu) f_1(\lambda) f_2(\mu) d\lambda d\mu$$

для всех $u(t), v(t) \in C_0^\infty(S)$, где функция $G(\lambda, \mu)$ интегрируема с квадратом на пространстве $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ по мере $f_1(\lambda) f_2(\mu) d\lambda d\mu$.

В следующем утверждении устанавливается свойство эквивалентности гауссовских мер, отвечающих парам биортогональных случайных полей (см., например, [1, 9]).

Теорема 1.3. Если $\{\xi_1(u), \xi_1^*(u)\}, \{\xi_2(u), \xi_2^*(u)\}$ — две пары биортогональных гауссовских полей на $C_0^\infty(S)$ и $\mathbb{P}_{\xi_k}, \mathbb{P}_{\xi_k^*}$ ($k = 1, 2$) — соответствующие им гауссовские распределения вероятностей, то условие эквивалентности распределений

$$\mathbb{P}_{\xi_1} \sim \mathbb{P}_{\xi_2}$$

равносильно условию

$$\mathbb{P}_{\xi_1^*} \sim \mathbb{P}_{\xi_2^*}.$$

2. Сужение пары биортогональных полей на подпространство пробных функций

Рассмотрим пару биортогональных случайных полей

$$\xi(u), \xi^*(u), u \in C_0^\infty(T). \quad (2.1)$$

В этом параграфе нас будет интересовать поведение пары (2.1) при переходе от пространства пробных функций $C_0^\infty(T)$ к пространству $C_0^\infty(S)$, когда $S \subseteq T$.

Примем следующие обозначения:

$$\widehat{\xi}(u) := \pi_{H_+(S^c)} \xi(u),$$

где $\pi_{H_+(S^c)}$ — ортопроектор на замкнутое подпространство $H_+(S^c)$;

$$\zeta(u) := \xi(u) - \widehat{\xi}(u).$$

Теорема 2.1. Если $\xi(u)$ — ”обычное” случайное поле, непрерывное в среднем квадратичном, такое, что $\xi(u), \xi^*(u), u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ — пара стационарных биортогональных случайных полей, то пара случайных полей $\{\zeta(u), \xi^*(u)\}$ биортогональна на пространстве $C_0^\infty(S)$, когда $S \subseteq \mathbb{R}^d$.

Доказательство. Вначале установим равенство

$$\mathbb{M} \{ \widehat{\xi}(u) \overline{\xi^*(v)} \} = 0, \quad u, v \in C_0^\infty(S).$$

Это следует из того, что $\widehat{\xi}(u) \in H_+(S^c)$, а $\xi^*(v) \in H^*(S) = H_+(S^c)^\perp$ по свойству сопряженности. Поэтому для $u, v \in C_0^\infty(S) \subseteq C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$

$$\mathbb{M} \{ \zeta(u) \overline{\xi^*(v)} \} = \mathbb{M} \{ \xi(u) \overline{\xi^*(v)} \} = \int_{\mathbb{R}^d} u(t) \overline{v(t)} dt$$

по свойству биортогональности на $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Далее обозначим

$$H_\zeta(S) := \bigvee_{\text{supp } u \subseteq S} \zeta(u)$$

и покажем, что

$$H_\zeta(S) = H^*(S).$$

Действительно, из свойства непрерывности ”извне” для поля $\xi(u)$ следует равенство

$$H(S) \vee H_+(S^c) = H(\mathbb{R}^d),$$

поэтому (см. [10, с. 258])

$$H_\zeta(S) = \overline{\pi_{H_+(S^c)^\perp} H(S)} = H_+(S^c)^\perp = H^*(S).$$

Теорема доказана.

Используя эту теорему и известный признак эквивалентности гауссовских мер, отвечающих парам биортогональных случайных полей (см. теорему 1.3), можно получать новые признаки эквивалентности гауссовских мер.

В качестве примера использования теоремы 2.1 будем рассматривать стационарные гауссовские процессы $\xi_k(t)$ ($k = 1, 2$) с нулевыми средними и спектральными плотностями:

$$f_k(\lambda) = \frac{1}{k + \lambda^2},$$

и пусть область S есть интервал $] -a, a[$.

В этом случае [6, с. 188]

$$\zeta_k(t) = \xi_k(t) - \frac{\text{sh}(a+t)}{\text{sh}2a} \xi_k(a) - \frac{\text{sh}(a-t)}{\text{sh}2a} \xi_k(a), \quad t \in [-a, a].$$

Докажем эквивалентность гауссовских мер $\tilde{\mathbf{P}}_k$, отвечающих случайным процессам $\zeta_k(t)$, $t \in [-a, a]$, $k = 1, 2$.

Для этого рассмотрим обобщенные случайные процессы $\xi_k^*(u)$, биортогональные случайным процессам $\xi_k(t)$ ($k = 1, 2$) на всей вещественной оси $] -\infty, +\infty[$, $u = u(t) \in C_0^\infty] -\infty, +\infty[$.

Используя теорему 1.2, можно записать разность ковариационных функционалов обобщенных случайных процессов $\xi_k^*(u)$, $u \in C_0^\infty] -\infty, +\infty[$ ($k = 1, 2$) в следующем виде:

$$\begin{aligned} b^*(u, v) &= B_2^*(u, v) - B_1^*(u, v) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}(\lambda) \overline{\tilde{v}(\lambda)} (2 + \lambda^2) d\lambda - \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}(\lambda) \overline{\tilde{v}(\lambda)} (1 + \lambda^2) d\lambda = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}(\lambda) \overline{\tilde{v}(\lambda)} d\lambda = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \overline{v(t)} dt, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $u, v \in C_0^\infty] -\infty, +\infty[$.

Легко видеть, что в этом примере разность

$$b^*(u, v) = B_2^*(u, v) - B_1^*(u, v)$$

задается дельта-функцией Дирака:

$$\begin{aligned} b^*(u, v) &= 2\pi(\delta, u(s) * \overline{v(-s)}) = \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \int_{-\infty}^{+\infty} u(t+s) \overline{v(s)} ds dt = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \overline{v(t)} dt, \end{aligned}$$

где $u, v \in C_0^\infty] -\infty, +\infty[$.

Рассматривая сужение пары обобщенных случайных процессов $\xi_1^*(u)$, $\xi_2^*(u)$ с пространства $C_0^\infty] -\infty, +\infty[$ на пространство $C_0^\infty[-a, a]$, в силу теоремы 1.3 мы получим процессы, биортогональные паре $\zeta_1(t)$, $\zeta_2(t)$, $t \in [-a, a]$.

Далее, используя равенство

$$\tilde{u}(\lambda) = \int_{-a}^a u(t) e^{i\lambda t} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}(\mu) \frac{\sin(\mu - \lambda)a}{\mu - \lambda} d\mu,$$

для функций $u, v \in C_0^\infty[-a, a]$ нетрудно получить соотношение

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \tilde{u}(\lambda) \overline{\tilde{v}(\mu)} \frac{\sin(\mu - \lambda)a}{\mu - \lambda} d\lambda d\mu = 2\pi^2 \int_{-a}^a u(t) \overline{v(t)} dt.$$

Введем функцию

$$G(\lambda, \mu) := \frac{\sin(\mu - \lambda)a}{\pi(\mu - \lambda)(1 + \lambda^2)(2 + \mu^2)},$$

для которой выполняется неравенство

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |G(\lambda, \mu)|^2 f_1(\lambda) f_2(\mu) d\lambda d\mu < +\infty.$$

Тогда, ввиду соотношения (2.2), будем иметь

$$b^*(u, v) = B_2^*(u, v) - B_1^*(u, v) = \iint_{\mathbb{R}^2} \tilde{u}(\lambda) \overline{\tilde{v}(\mu)} G(\lambda, \mu) f_1(\lambda) f_2(\mu) d\lambda d\mu.$$

Отсюда, используя теорему 1.2, получаем эквивалентность гауссовских распределений, соответствующих обобщенным случайным процессам $\xi_k^*(u)$, $u \in C_0^\infty[-a, a]$, $k = 1, 2$.

Наконец, применяя теорему 1.1, устанавливаем эквивалентность гауссовских мер $\mathbb{P}_k$, отвечающих случайным процессам $\zeta_k(t)$, $t \in [-a, a]$, $k = 1, 2$.

Замечание 1. В этом примере содержится ответ на один вопрос Р. Л. Добрушина (1980 г.): можно ли считать, что у эквивалентных (условных центрированных) гауссовских мер $\mathbb{P}_k$ разность обобщенных функций $B_1^*(u, v) - B_2^*(u, v)$ всегда задается "обычной" функцией? Интерес к вопросам эквивалентности условных гауссовских мер появился в связи с изучением гауссовских случайных полей с гиббсовской точки зрения (см. [11]).

Замечание 2. Использование ковариационных функционалов $B_k^*(u, v)$ биортогональных полей $\xi_k^*(u)$ ($k = 1, 2$) позволяет записать в несколько ином виде известное условие эквивалентности гауссовских мер [12]. Именно, если $\mathbb{P}_1$ и $\mathbb{P}_2$ — гауссовские меры, относительно которых случайное поле $\xi(u)$ имеет нулевые математические ожидания и ковариационные функционалы $B^{(k)}(u, v)$, $k = 1, 2$, то $\mathbb{P}_1$ эквивалентна $\mathbb{P}_2$ тогда и только тогда, когда

$$B_1^*(u, v) - B_2^*(u, v) \in V_1^*(S) \otimes V_1^*(S),$$

где $V_1^*(S)$ — замыкание $C_0^\infty(S)$ по норме $\|\cdot\|_1 = B^{(1)}(\cdot, \cdot)^{1/2}$, $\otimes$ — знак тензорного произведения линейных пространств.

При этом логарифм отношения правдоподобия гауссовских мер $\mathbb{P}_1$ и $\mathbb{P}_2$ можно представить в виде некоторой операции спаривания элементов $B_1^*(u, v) - B_2^*(u, v)$ и $\xi(u)\xi(v) - B^{(1)}(u, v)$, и, таким образом, получить выражение, аналогичное конечномерному случаю (см. [13]).

3. Преобразование независимости для бесконечномерных распределений, отвечающих обобщенным случайным полям

В этом параграфе будет показано, что для бесконечномерных распределений, отвечающих обобщенным эллиптически контурированным случайным полям, мож-

но строить преобразование независимости аналогично тому, как это было сделано в работе [15] для эллиптически контурированных мер в гильбертовом пространстве.

Мы ограничимся анализом устойчивых эллиптически контурированных случайных полей. Рассмотрение общих эллиптически контурированных обобщенных случайных полей проводится совершенно аналогично и не вызывает больших затруднений.

Рассмотрим на измеримом пространстве $\{\Omega, \mathcal{F}\}$ две σ -аддитивные вероятностные меры $\mathbb{P}_2$ и $\mathbb{P}_\alpha$, где $\alpha \in]0, 2[$.

Будем считать, что

1) относительно меры $\mathbb{P}_2$ действительное случайное поле

$$\xi(u), \quad u \in C_0^\infty(S), \quad \text{где } S \text{ — открытая область в } \mathbb{R}^d,$$

— гауссово с нулевым средним, ковариационным функционалом⁴

$$B(u, v) = \mathbb{M}_2 \{ \xi(u) \xi(v) \} = \int_{\Omega} \xi(u) \xi(v) d\mathbb{P}_2,$$

и конечномерными гауссовскими распределениями

$$\mu_2 \{x_1, \dots, x_n; 0, B_n\} := \mathbb{P}_2 \{ \xi(u_1) \leq x_1, \dots, \xi(u_n) \leq x_n \},$$

где $B_n := [B(u_i, u_j)]_{i,j=1,n}$;

2) относительно меры $\mathbb{P}_\alpha$ случайное поле $\xi(u)$ имеет устойчивое эллиптически контурированное распределение с показателем α :

$$\mathbb{P}_\alpha \{ \xi(u_1) \leq x_1, \dots, \xi(u_n) \leq x_n \} = \int_0^\infty \mu_2 \{x_1, \dots, x_n; 0, r^2 B_n\} g\left(\frac{r^2}{2}; \frac{\alpha}{2}, 1\right) r dr,$$

где $g(\cdot; \frac{\alpha}{2}, 1)$ — плотность одномерного крайнего устойчивого распределения с показателем $\frac{\alpha}{2}$ (см. [14]).

Таким образом, характеристические функционалы случайного поля $\xi(u)$, $u \in C_0^\infty(S)$ относительно вероятностных мер $\mathbb{P}_2$ и $\mathbb{P}_\alpha$ имеют вид

$$\psi_2(u) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} B(u, u) \right\},$$

$$\psi_\alpha(u) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} B(u, u)^{\alpha/2} \right\}.$$

Перейдем к построению стандартного продолжения (см., например, [1, 2]) обобщенного случайного поля $\xi(u)$, $u \in C_0^\infty(S)$ на более широкое пространство пробных функций.

Введем в пространстве $C_0^\infty(S)$ скалярное произведение и норму

$$\langle u, v \rangle_B = B(u, v), \quad |u|_B = \langle u, u \rangle_B^{1/2}, \quad u, v \in C_0^\infty(S).$$

По определению случайное поле $\xi(u)$, $u \in C_0^\infty(S)$ непрерывно в среднем квадратичном относительно вероятностной меры $\mathbb{P}_2$. Поэтому скалярное произведение $\langle u, v \rangle_B$ и норма $|u|_B$ непрерывны относительно топологии пространства $C_0^\infty(S)$.

⁴ Считаем, что $B(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$.

Рассмотрим замыкание $W = [C_0^\infty(S)]$ пространства $C_0^\infty(S)$ по норме $|\cdot|_B$. Как известно (см. [2, с. 47]), пространство $C_0^\infty(S)$ *сепарабельно*, поэтому, проводя ортогонализацию счетного всюду плотного множества функций из $C_0^\infty(S)$, можно утверждать, что W — сепарабельное гильбертово пространство, в котором существует ортонормированный базис $\{e_n(t)\}_{n=1, \infty}$:

$$\langle e_n(t), e_m(t) \rangle_B = B(e_n, e_m) = \delta_{ij}, \quad (3.1)$$

состоящий из функций $e_n(t) \in C_0^\infty(S)$, $n = \overline{1, \infty}$.

Рассмотрим поведение средних

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi^2(e_i)$$

при $n \rightarrow \infty$.

Отметим, что ввиду (3.1) для любого $r > 0$ относительно меры $\mathbb{P}_2$ случайные величины $\{r\xi(e_n)\}_{n=1, \infty}$ образуют последовательность независимых $(0, r^2)$ -гауссовских случайных величин:

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_2 \{r\xi(e_i)\} &= 0, \quad i = \overline{1, \infty}; \\ \mathbb{M}_2 \{ |r\xi(e_i)|^2 \} &= r^2 B(e_i, e_i) = r^2 |e_i|_B^2 = r^2, \quad i = \overline{1, \infty}; \\ \mathbb{M}_2 \{ r\xi(e_i) r\xi(e_j) \} &= 0, \quad i \neq j. \end{aligned}$$

Теперь, как и в работе [15], можно воспользоваться усиленным законом больших чисел в форме Колмогорова и, буквально повторяя доказательство цитируемой статьи, установить следующее предложение.

Теорема 3.1. Для любого $\alpha \in]0, 2[$:

1°) существует случайная величина s_∞^2 такая, что

$$\mathbb{P}_\alpha \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi^2(e_i) = s_\infty^2 \right\} = 1;$$

2°) случайная величина s_∞^2 измерима относительно "хвостовой" σ -алгебры

$$\mathcal{F}_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n^\infty,$$

где $\mathcal{F}_n^\infty = \sigma(\xi(e_n), \xi(e_{n+1}), \dots)$ — σ -алгебра, порожденная случайными величинами $\xi(e_n), \xi(e_{n+1}), \dots$ и

$$\mathbb{P}_\alpha \{ s_\infty^2 \leq u \} = \int_0^{u/2} g(y; \alpha/2, 1) dy;$$

3°) относительно вероятностной меры $\mathbb{P}_\alpha$ система случайных величин

$$s_\infty^2, \frac{\xi(e_1)}{s_\infty}, \frac{\xi(e_2)}{s_\infty}, \dots, \frac{\xi(e_n)}{s_\infty}, \dots$$

независима в совокупности, причем случайные величины

$$\frac{\xi(e_n)}{s_\infty} \quad (n = \overline{1, \infty})$$

имеют гауссовское распределение с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией.

Будем рассматривать обобщенное случайное поле $\xi(u)$, $u \in W$ на вероятностной тройке $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_\alpha\}$.

Обозначим через

$$F_{i|1\dots i\dots n}^{(\alpha)}(x_i | x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_n)$$

условную функцию распределения случайной величины $\xi(e_i)$ относительно случайных величин $\xi(e_1), \dots, \widehat{\xi(e_i)}, \dots, \xi(e_n)$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.2. Для любого $\alpha \in]0, 2[$

$$\mathbb{P}_\alpha \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} F_{i|1\dots i\dots n}^{(\alpha)}(\xi(e_i) | \xi(e_1), \dots, \widehat{\xi(e_i)}, \dots, \xi(e_n)) = \Phi \left(\frac{\xi(e_i)}{s_\infty} \right) \right\} = 1,$$

и относительно вероятностной меры $\mathbb{P}_\alpha$ случайная величина

$$\frac{\xi(e_i)}{s_\infty}$$

не зависит от семейства случайных величин

$$\xi(e_1), \dots, \widehat{\xi(e_i)}, \dots, \xi(e_n), \dots$$

Доказательство этой теоремы проводится совершенно аналогично доказательствам подобных утверждений, рассмотренных в работе [15].

Литература

- [1] Розанов Ю.А. Марковские случайные поля. М: Наука, 1981. 256 с.
- [2] Розанов Ю.А. Случайные поля и стохастические уравнения с частными производными. М: Физматлит, 1995. 256 с.
- [3] Гельфанд И.М., Виленкин Н.Я. Обобщенные функции. Выпуск 4. Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства. М.: Физматгиз, 1961. 472 с.
- [4] Добрушин Р.Л., Минлос Р.А. Исследование свойств обобщенных гауссовских полей // В сб.: Задачи механики и математической физики. М.: Наука, 1976. С. 117–165.
- [5] Розанов Ю.А. Гауссовские бесконечномерные распределения. М.: Наука, 1968. 136 с.
- [6] Розанов Ю.А. Стационарные случайные процессы. М.: Физматгиз, 1963. 284 с.
- [7] Ибрагимов И.А., Розанов Ю.А. Гауссовские случайные процессы. М.: Наука, 1970. 384 с.
- [8] Краснитский С.М. Условия эквивалентности распределений гауссовских однородных полей // Теория вероятностей и ее применения. 1989. Т.34. Вып.4. С. 786–791.
- [9] Соколова С.Д. Об эквивалентности гауссовских мер, отвечающих решениям стохастических дифференциальных уравнений // Теория вероятностей и ее применения. 1983. Т.38. Вып.2. С. 429–433.
- [10] Никольский Н.К. Лекции об операторе сдвига. М.: Наука, 1983. 384 с.

- [11] Dobrushin R.L. Gaussian random fields — Gibbsian point of view // Multicomponent random system. N.-Y., 1980. P. 119–154.
- [12] Голосов Ю.И. Об одном способе вычисления производной Радона—Никодима двух гауссовских мер // Докл. АН СССР. 1966. Т.170. №2. С. 242–245.
- [13] Шатских С.Я. Об эквивалентности условных ”центрированных” гауссовских мер, соответствующих обобщенным случайным полям // Четвертая международная вильнюсская конференция по теории вероятностей и математической статистике: Тезисы докладов. Вильнюс, 1985. Т.3. С. 308–309.
- [14] Золотарев В.М. Одномерные устойчивые распределения. М.: Наука, 1983. 300 с.
- [15] Шатских С.Я. Устойчивые эллиптически контурированные меры в гильбертовом пространстве: асимптотические свойства условных распределений // Изв. РАН, сер. МММИУ. 1999. Т.3. №3. С. 41–81.

PROPERTIES OF CONDITIONAL DISTRIBUTIONS CORRESPONDING TO GENERALIZED RANDOM FIELDS⁵

© 2002 S.Ya. Shatskih⁶

The paper is devoted to problem of equivalency of conditional centered Gaussian measures corresponding to random fields. Transformation of independency for infinite-dimensional distributions corresponding to elliptically contoured random fields is obtained.

Поступила в редакцию 28/X/2002;
в окончательном варианте — 11/XI/2002.

⁵ Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. S.V. Astashkin.

⁶ Shatskih Sergey Yakovlevich (shatskih@ssu.samara.ru), Dept. of Functional Analysis and Theory of Functions, Samara State University, Samara, 443011, Russia.