

ВЛИЯНИЕ СКОРОСТЕЙ УПРУГИХ ДЕФОРМАЦИЙ НА ДОКРИТИЧЕСКИЙ РОСТ ТРЕЩИНЫ В УПРУГОМ НЕЛИНЕЙНО-ВЯЗКОМ МАТЕРИАЛЕ¹

© 2002 Л.В. Степанова, Ю.Н. Устина²

Предметом настоящего исследования является изучение влияния скоростей упругих деформаций на докритический рост трещины в упругом нелинейно-вязком материале в поврежденной среде (связка "упругость – ползучесть – поврежденность"). На основе проведенного асимптотического анализа полей напряжений, скоростей деформаций и скалярного параметра сплошности вблизи вершины подвижной трещины установлено, что скоростями упругих деформаций в непосредственной окрестности растущей трещины пренебрегать нельзя, поскольку скорости упругих деформаций имеют особенность вида $1/r$, где r — расстояние от кончика продвигающейся трещины, в то время как скорости деформаций ползучести являются ограниченными величинами. Исследована структура области, прилегающей к вершине трещины и ее берегам. Показано, что перед вершиной трещины имеется область активного накопления повреждений (зона, в которой справедливо кинетическое уравнение, постулирующее степенной закон накопления повреждений), а к берегам трещины примыкает область полностью поврежденного материала. Таким образом, процесс распространения макротрещины можно представить как продвижение целой области поврежденного материала. Определены границы областей активного накопления повреждений, отделяющие эти зоны от областей, в которых процессом накопления повреждений можно пренебречь. Дана оценка скорости распространения трещины в материале рассматриваемого типа.

Введение

Изучение напряженно-деформированного состояния вблизи вершины как стационарной, так и растущей трещины с учетом процесса накопления рассеянных повреждений является предметом многочисленных исследований. Особый интерес вызывает рассмотрение взаимного влияния распределения напряжений, деформаций, их скоростей и поля поврежденности, что приводит к необходимости формулировки связанных постановок задач (в различных комбинациях — "упругость – поврежденность", "пластичность – поврежденность", "ползучесть – поврежденность", "упругость – ползучесть – поврежденность" и других более сложных) и их решения.

¹Представлена доктором физико-математических наук профессором В.И. Астафьевым.

²Степанова Лариса Валентиновна (l1st@ssu.samara.ru), Устина Юлия Николаевна (ustina@ssu.samara.ru), кафедра механики сплошных сред Самарского государственного университета, 443011, Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

Предметом настоящего исследования является попытка оценить вклад скоростей упругих деформаций в общее поле скоростей деформаций в окрестностях вершин продвигающихся трещин антиплоского сдвига и нормального отрыва в предположении реализации плоского напряженного и плоского деформированного состояний в упругом нелинейно-вязком материале в поврежденной среде.

Необходимо отметить, что проблема влияния скоростей упругих деформаций на скорость докритического подрастания дефекта в упругом нелинейно-вязком материале (в условиях отсутствия накопления повреждений) и ранее привлекала внимание многих ученых, например, [1, 2].

В [1] приведен асимптотический анализ полей напряжений и скоростей деформаций у вершины медленно распространяющейся трещины в упругом нелинейно-вязком материале, деформирующемся по закону

$$\dot{\epsilon} = \dot{\sigma}/E + B\sigma^n.$$

Проведенное асимптотическое исследование распределений напряжений и скоростей деформаций для трещин типа I и III показало, что для $n < 3$ асимптотика поля напряжений обуславливается исключительно скоростями упругих деформаций. Для $n > 3$ установлена новая асимптотика компонент тензора напряжений и деформаций вблизи вершины трещины ($r \rightarrow 0$) $\sigma_{ij}, \epsilon_{ij} \sim r^{-1/(n-1)}$. Такое асимптотическое поведение напряжений и деформаций справедливо как для установившегося, так и для неустановившегося роста трещины и определяется совместным вкладом скоростей упругих деформаций и деформаций ползучести (показатель степени находится не в ходе численного анализа на собственные значения, как это часто происходит при решении данного класса задач механики разрушения, а путем приравнивания асимптотик скоростей упругих деформаций r^{s-1} и деформаций ползучести r^{sn} с неизвестным пока показателем s).

Таким образом, скорости упругих деформаций играют существенную роль и ими пренебрегать нельзя по сравнению со скоростями деформаций ползучести в ходе определения напряженно-деформированного состояния и, следовательно, при формулировке критерия разрушения. Найденные поля напряжений и скоростей деформаций получили название HR-распределения.

В следующей своей работе [2] Хьюи изучил процесс продвижения трещины типа I в условиях переходного режима (от времен, соответствующих маломасштабной ползучести, до времен, отвечающих развитым деформациям ползучести). Первый предельный случай называют K -контролируемым ростом трещины, где K — коэффициент интенсивности напряжений, второй — C^* -контролируемым ростом трещины, где C^* — инвариантный интеграл теории установившейся ползучести. Хьюи [2] показал, что при медленном росте трещины области доминирования HR-решения, HRR-распределения [3] и зона превалирования исключительно упругого решения (одна область внутри другой) вместе дают представление структуры кончика растущей трещины. Данное исследование построено на учете скоростей упругих деформаций и их вклада в общее поле скоростей деформаций и, в конечном итоге, в оценку скорости роста трещины.

В последнее время снова наблюдается большой интерес к проблемам докритического роста трещин в металлах при высокотемпературной ползучести. Однако сейчас моделирование основывается на необходимости описания процесса накопления повреждений (микротрещин, микропор, дислокаций). Безусловно, изучение характерных особенностей напряженно-деформированного состояния у вершины трещины началось с наиболее простых типов определяющих соотношений и для случая стационарной трещины.

Так, в [4], где исследовано поле повреждений у вершины неподвижной трещины для материала с определяющими соотношениями

$$\sigma = \begin{cases} E\varepsilon, & \varepsilon < \varepsilon_0, \\ E\varepsilon \left[\left(\frac{n\varepsilon}{\varepsilon_0} + \mu \right) / (n + \mu) \right]^{-1-1/n}, & \varepsilon \geq \varepsilon_0, \end{cases}$$

где $E, n, \varepsilon_0, \mu > 1$ — постоянные материала, можно видеть необходимость введения дополнительных гипотез и предположений, обусловленных желанием учесть процесс накопления повреждений.

Антиплоский сдвиг пространства с неподвижной полубесконечной трещиной в изотропном упругом материале в связанной постановке

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{E(1 - \omega)} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E(1 - \omega)} \sigma_{kk} \delta_{ij},$$

где $\omega = 1 - \psi$ — параметр поврежденности, введенный в [5], ψ — параметр сплошности, введенный в [6], был исследован в [7]. Определяющие соотношения такого типа, построенные на основе концепции эффективного напряжения, обсуждались ранее, например, в [8, 9]. Аналитическое решение в [7] найдено с помощью метода годографа, дающего возможность определить структуру области, примыкающей к вершине трещины. Установлено, что устье трещины охватывается областью насыщения, внутри которой скалярный параметр поврежденности достиг своего критического значения и поврежденность более не накапливается. Зона насыщения целиком находится внутри области активного накопления повреждений (или области процесса), которая, в свою очередь, охвачена неповрежденным материалом.

Следует отметить, что к подобным выводам независимо пришли авторы [10], где приведен асимптотический анализ усталостного роста трещины в упругом материале в среде с поврежденностью в связанной постановке. В [10] показано, что в непосредственной окрестности вершины трещины существует область процесса — регион, где происходит активное накопление микродефектов, а к берегам трещины примыкает область полностью поврежденного материала, таким образом, процесс распространения трещины можно представить как продвижение целой области, окружающей магистральную, главную трещину. Установлено, что влияние накопления повреждений приводит к качественно новому распределению напряжений — существенному снижению показателя сингулярности или к полному исчезновению сингулярности поля напряжений.

К весьма сходным результатам приводят исследования полей напряжений, скоростей деформаций и сплошности в нелинейно-вязком материале в связанной постановке (связка "ползучесть — поврежденность") [11–16].

В [14] получены распределения компонент тензоров напряжений, скоростей деформаций ползучести и скалярного параметра поврежденности у кончика трещины типа I в предположении реализации плоского напряженного состояния в связанной постановке с определяющими соотношениями вида

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{3}{2} \frac{B}{(1 - \omega)^n} s_{ij} \sigma^{n-1}.$$

Авторы установили, что влияние процесса накопления повреждений проявляется в релаксации напряжений, иными словами, компоненты тензора напряжений ведут

себя как $\sigma_{ij} \sim r^{s-2}$, где $s > 2$. Для всех наборов исследованных параметров материала и констант кинетического уравнения напряжения и скорости деформаций не являются сингулярными.

Вычислительные аспекты механики разрушения и механики поврежденности применительно к проблеме роста трещины в нелинейно-вязком материале (вновь со степенной зависимостью между скоростями деформаций ползучести и эффективными напряжениями) в среде с поврежденностью обсуждаются в [15, 16]. Мураками с соавторами, апеллируя к экспериментальным наблюдениям установившегося роста трещины нормального отрыва в меди при 250° С, вводит в рассмотрение зону активного накопления повреждений и априори задает ее форму с помощью дуги эллипса и двух прямых, параллельных берегам трещины. Проведенный авторами асимптотический анализ полей повреждений, напряжений и скоростей деформаций, а также численный анализ собственных значений, основанный на использовании метода Рунге–Кутты для решения нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, показали, что свойственная полям напряжений и скоростей деформаций ползучести сингулярность либо отсутствует, либо значительно уменьшается.

Естественным развитием полученных результатов является желание рассмотреть более сложные определяющие соотношения — соотношения упругого нелинейно-вязкого материала

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \dot{s}_{ij} + \frac{1-2\nu}{3E} \dot{\sigma}_{kk} \delta_{ij} + \frac{3}{2} B \tilde{\sigma}^{n-1} \tilde{s}_{ij},$$

где

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{1-\omega}, \quad \tilde{s}_{ij} = \frac{s_{ij}}{1-\omega}.$$

Однако в большинстве случаев, например в [17, 18], авторы, выписывая определяющие уравнения упругого нелинейно-вязкого материала, в силу сложности задачи ограничиваются рассмотрением лишь скоростей деформаций ползучести.

Данное исследование представляет собой попытку включения скоростей упругих деформаций в анализ напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины растущей трещины в поврежденной среде в связанной постановке (в комбинации "упругость – ползучесть – поврежденность").

1. Постановка задачи для трещины антиплоского сдвига

Рассматривается задача о докритическом подрастании трещины антиплоского сдвига в среде с поврежденностью. Для этого вводится параметр сплошности материала ψ [6], для которого известно, что $\psi(t=0) = 1$, то есть начальное состояние является неповрежденным (в [5] введен параметр поврежденности ω , связанный с ψ соотношением $\omega = 1 - \psi$). Определяющие соотношения для среды с поврежденностью с введением гипотезы эффективного напряжения в случае антиплоского сдвига представляются в следующем виде:

$$\dot{\gamma}_i = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\dot{\tau}_i}{\psi} \right) + \frac{3}{2} B \left(\frac{\tau}{\psi} \right)^{n-1} \frac{\tau_i}{\psi}, \quad (1.1)$$

где $\dot{\gamma}_i$ – скорость деформаций сдвига, здесь точка означает дифференцирование по времени, а сами деформации сдвига складываются из упругих деформаций γ_i^e и

деформаций ползучести γ_i^c , то есть $\gamma_i = \gamma_i^e + \gamma_i^c$, τ_i/ψ – компоненты тензора эффективных напряжений, $\tau = \sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2}$ – интенсивность касательных напряжений, μ – модуль сдвига, B, n – постоянные степенного закона установившейся ползучести, $i = 1, 2$ в декартовой системе координат и $i = r, \theta$ в полярной системе координат.

Материальная производная по времени в подвижной системе координат $x_1 O x_2$, начало которой совпадает с вершиной трещины, имеет вид

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} - v \frac{\partial}{\partial x_1},$$

где v – скорость роста трещины, или в полярной системе координат

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} - v \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right). \quad (1.2)$$

В случае установившегося роста трещины материальная производная по времени будет принимать вид:

$$\frac{d}{dt} = -v \frac{\partial}{\partial x_1} = -v \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right). \quad (1.3)$$

Тогда определяющие соотношения (1.1) могут быть представлены в виде:

$$\dot{\gamma}_i = -\frac{v}{2\mu} \left[\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\tau_i}{\psi} \right) - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\tau_i}{\psi} \right) \right] + \frac{3}{2} B \left(\frac{\tau}{\psi} \right)^{n-1} \frac{\tau_i}{\psi}, \quad (1.4)$$

Полная система уравнений, описывающая рост трещины в среде с поврежденностью, представляется в следующем виде:

уравнение равновесия

$$\frac{\partial}{\partial r} (r \tau_r) + \frac{\partial \tau_\theta}{\partial \theta} = 0, \quad (1.5)$$

условие совместности, сформулированное для скоростей деформаций

$$\frac{\partial}{\partial r} (r \dot{\gamma}_\theta) = \frac{\partial \dot{\gamma}_r}{\partial \theta}, \quad (1.6)$$

кинетическое уравнение, постулирующее степенной закон накопления повреждений:

$$\frac{d\psi}{dt} = -A \left(\frac{\tau}{\psi} \right)^m \quad (1.7)$$

или с учетом (1.3)

$$-v \left(\cos \theta \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) = -A \left(\frac{\tau}{\psi} \right)^m, \quad (1.8)$$

где A, m – постоянные материала, определяемые экспериментально.

Граничные условия рассматриваемой задачи имеют вид:

условие отсутствия поверхностных усилий на берегах трещины

$$\tau_\theta(\theta = \pm\pi) = 0; \quad (1.9)$$

условие симметрии на ее продолжении (если исследуется в силу симметрии задачи одна из полуплоскостей)

$$\tau_r(\theta = 0) = 0. \quad (1.10)$$

2. Метод разложения по собственным функциям. Асимптотический анализ поля скоростей деформаций

Целью настоящего исследования является асимптотический анализ полей напряжений, скоростей деформаций и параметра сплошности в окрестности вершины растущей трещины ($r \rightarrow 0$) в среде с поврежденностью. Будем искать напряжения и параметр сплошности в виде разложения по собственным функциям:

$$\frac{\tau_i}{\psi}(r, \theta, t) = r^s f_i(\theta, t), \quad \psi(r, \theta, t) = r^\nu g(\theta, t), \quad (\nu > 0). \quad (2.1)$$

Вид уравнений будет определяться тремя существующими возможностями, а именно:

1. Если скорости деформаций ползучести в окрестности вершины трещины являются доминирующими, то определяющие соотношения (1.4) примут вид

$$\dot{\gamma}_i = \frac{3}{2} B \left(\frac{\tau}{\psi} \right)^{n-1} \frac{\tau_i}{\psi}. \quad (2.2)$$

2. Если скорости упругих деформаций и деформаций ползучести являются величинами одного порядка при $r \rightarrow 0$, то определяющие соотношения (1.4) остаются прежними, и следует учитывать оба слагаемых.
3. Если скорости упругих деформаций превалируют при $r \rightarrow 0$, то

$$\dot{\gamma}_i = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\dot{\tau}_i}{\psi} \right). \quad (2.3)$$

Рассмотрим каждый из описанных случаев:

1. Если скорости деформаций ползучести доминируют по сравнению со скоростями упругих деформаций в окрестности вершины трещины, то изучается докритический рост трещины в нелинейно-вязком материале, и распределение напряжений и параметра сплошности при $r \rightarrow 0$ имеет вид [11]:

$$\psi = \varkappa^m \left(\frac{C^*}{BI_n} \right)^{m/(n+1-m)} \left(\frac{A}{v} \right)^{(n+1)/(n+1-m)} rg(\theta) \quad (0 < \theta < \pi/2),$$

$$\frac{\tau_\alpha}{\psi} = \varkappa \left(\frac{AC^*}{vBI_n} \right)^{1/(n+1-m)} f_\alpha(\theta) \quad (0 < \theta < \pi/2).$$

Как видно, у вершины трещины отсутствует характерное для теории трещин сингулярное поле напряжений (эффективные напряжения τ_α/ψ ограничены, а сами напряжения τ_α и сплошность линейно падают до нуля в окрестности вершины трещины). Однако, как вытекает из (1.1), это противоречит принятой гипотезе о доминировании скоростей деформаций ползучести. Действительно, в этом случае $\tau_i \sim r$, $\tau_i/\psi \sim O(1)$, тогда $\dot{\gamma}_i^e \sim 1/r$, $\dot{\gamma}_i^c \sim O(1)$, т.е. скорости упругих деформаций имеют особенность вида $1/r$, и это слагаемое является главным членом асимптотического разложения скоростей деформаций и его отбрасывать нельзя.

2. Принимая предположение о равном вкладе как скоростей упругих деформаций, так и скоростей деформаций ползучести, можно ввести безразмерные величины

$$\hat{x}_i = \frac{x_i}{L}, \quad \hat{t} = \frac{t}{T}, \quad \hat{\tau}_i = \frac{\tau_i}{\tau_B},$$

где L, T, τ_B – некоторые характерные длина, время и напряжение соответственно. Тогда $s = -1/(n-1)$ и поле напряжений может быть представлено в форме

$$\frac{\tau_i}{\psi}(\hat{r}, \theta, \hat{t}) = \left(\frac{v}{BL\mu} \right)^{1/(n-1)} \hat{r}^{-1/(n-1)} \frac{\hat{\tau}_i}{\hat{\psi}}(\theta, \hat{t}).$$

Асимптотическое решение этой задачи может быть получено путем разложения искомых функций $\tau_i(r, \theta), \psi(r, \theta)$ по собственным функциям

$$\begin{aligned} \frac{\tau_r}{\psi}(r, \theta) &= \left(\frac{v}{B\mu} \right)^{1/(n-1)} r^{-1/(n-1)} f_r(\theta), \\ \frac{\tau_\theta}{\psi}(r, \theta) &= \left(\frac{v}{B\mu} \right)^{1/(n-1)} r^{-1/(n-1)} f_\theta(\theta), \\ \psi(r, \theta) &= \frac{A}{v} \left(\frac{v}{B\mu} \right)^{m/(n-1)} r^\nu g(\theta), \end{aligned} \quad (2.4)$$

причем анализ кинетического уравнения позволяет сделать вывод, что $\nu = 1 - m/(n-1)$. Тогда для представленного случая

$$\tau_i(r, \theta) = \frac{A}{v} \left(\frac{v}{B\mu} \right)^{(m+1)/(n-1)} r^{(n-m-2)/(n-1)} f_i(\theta) g(\theta), \quad (i = r, \theta). \quad (2.5)$$

Подстановка соотношений (2.4), (2.5) в систему уравнений (1.5) – (1.8) приводит к системе трех обыкновенных дифференциальных уравнений относительно трех неизвестных функций $f_r(\theta), f_\theta(\theta), g(\theta)$:

уравнение равновесия:

$$f'_\theta g + f_\theta g' + \left(2 - \frac{m+1}{n-1} \right) f_r g = 0, \quad (2.6)$$

кинетическое уравнение:

$$\sin \theta g'(\theta) - \left(1 - \frac{m}{n-1} \right) \cos \theta g(\theta) = -f^m(\theta), \quad f = \sqrt{f_r^2 + f_\theta^2}, \quad (2.7)$$

условие совместности:

$$\begin{aligned} (1-n) \sin \theta f_r'' + (n-2) \sin \theta f_\theta' - n \cos \theta f_r' + n(n-2)/(n-1) \cos \theta f_\theta = \\ = -f^{n-1} f_\theta + (n-1)^2 f^{n-3} f_r (f_r f_r' + f_\theta f_\theta') + (n-1) f^{n-1} f_r'. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Система трех обыкновенных дифференциальных уравнений (2.6) – (2.8) должна быть исследована с учетом граничных условий:

условия симметрии:

$$f_r(\theta = 0) = 0; \quad (2.9)$$

условия отсутствия поверхностных усилий на верхнем берегу трещины:

$$f_\theta(\theta = \pi) = 0; \quad (2.10)$$

условия регулярности решения уравнения (2.7) (уравнение (2.7) является сингулярно возмущенным, так как коэффициент при старшей производной обращается в нуль при значении аргумента $\theta = 0$):

$$g(\theta = 0) = \frac{(f_\theta(0))^m}{\mu}; \quad (2.11)$$

условия регулярности для уравнения совместности:

$$f'_r(\theta = 0) = \frac{-(f_\theta(0))^n + n(n-2)/(n-1)f_\theta(0)}{1 + (n-1)(1 + (f_\theta(0))^{n-1})}. \quad (2.12)$$

Таким образом, осталось подобрать значение $f_\theta(\theta = 0) = a$ методом пристрелки так, чтобы удовлетворить условию $f_\theta(\theta = \pi) = 0$.

Численное исследование системы уравнений (2.6)–(2.8) с граничными условиями (2.9)–(2.12) осуществлялось методом Рунге-Кутты-Фельдберга 5-го порядка точности [20] в сочетании с методом пристрелки. Оно показывает, что не удается подобрать значение a , приводящее к выполнению граничного условия на верхнем берегу трещины. Можно попытаться сформулировать граничные условия не на берегах трещины непосредственно, а при некотором значении угла $\theta = \theta_d$ (такое предположение часто принимается при исследовании данного класса задач [10–13]), то есть предположить, что при $\theta > \theta_d$ функция $g(\theta)$ принимает лишь нулевые значения, что означает, в свою очередь, то, что материал полностью поврежден при $\theta > \theta_d$. Тогда вместо условия отсутствия поверхностных усилий на берегах трещины $f_\theta(\theta = \pi) = 0$ будут использованы следующие граничные условия $f_\theta(\theta = \theta_d) = 0$, $g(\theta = \theta_d) = 0$.

Численное решение этой задачи показывает, что не существует такого значения угла $0 < \theta_d < \pi$, для которого выполняются указанные выше условия. Это свидетельствует о том, что принятое предположение, согласно которому оба слагаемых в определяющем соотношении (1.4) вносят одинаковый вклад, не является справедливым.

3. Рассмотрим оставшийся случай (доминирование линейной части определяющих соотношений (1.4)):

$$\gamma_i = \frac{1}{2\mu} \frac{\tau_i}{\psi}. \quad (2.13)$$

Можно ввести безразмерные величины

$$\hat{x}_i = \frac{x_i}{L}, \quad \hat{t} = \frac{t}{T}, \quad \hat{\tau}_i = \frac{\tau_i}{\mu},$$

где L, T – некоторые характерные длина, время соответственно. Из проведенного анализа размерностей следует, что

$$L = \frac{v}{A\mu^m}, \quad T = \frac{L}{v}.$$

Поля эффективных напряжений и параметра поврежденности представим в виде:

$$\frac{\hat{\tau}_i}{\psi}(\hat{r}, \theta) = \hat{r}^s f_i(\theta), \quad \psi(\hat{r}, \theta) = \hat{r}^\nu g(\theta). \quad (2.14)$$

Тогда полная система уравнений может быть сформулирована следующим образом: уравнение равновесия:

$$f'_\theta g + f_\theta g' + (s + \nu + 1)f_r g = 0, \quad (2.15)$$

кинетическое уравнение:

$$\sin \theta g' - \nu \cos \theta g = -f^m(\theta), \quad (2.16)$$

условие совместности:

$$(s + 1)f_\theta = f'_r. \quad (2.17)$$

Решение системы (2.15)–(2.17) — системы трех обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций f_r, f_θ, g — подчиняется следующим граничным условиям:

условию симметрии:

$$f_r(\theta = 0) = 0, \quad (2.18)$$

условию отсутствия поверхностных усилий на берегах трещины:

$$f_\theta(\theta = \pi) = 0, \quad (2.19)$$

условию регулярности решения уравнения (2.16):

$$g(0) = \frac{(f_\theta(0))^m}{\nu}. \quad (2.20)$$

Так как система обыкновенных дифференциальных уравнений (2.6), (2.7), (2.17) является однородной, то наряду с функциями $f_r(\theta)$, $f_\theta(\theta)$, $g(\theta)$ функции $\varkappa f_r(\theta)$, $\varkappa f_\theta(\theta)$, $\varkappa^m g(\theta)$, где $\varkappa = \varkappa(t)$ — некоторый постоянный коэффициент, также являются решениями. Поэтому, сводя задачу к начальной, вместо условия отсутствия поверхностных усилий на берегах трещины $f_\theta(\theta = \pi) = 0$ сформулируем условие нормировки

$$f_\theta(0) = 1. \quad (2.21)$$

Численное решение этой задачи методом Рунге-Кутты-Фельдберга показывает, что невозможно подобрать собственное значение s такое, чтобы выполнялось граничное условие (2.19), причем, начиная с некоторого значения угла $\theta = \theta_d$, функция $g(\theta)$ принимает отрицательные значения, что, вообще говоря, противоречит физическому смыслу параметра сплошности. Для выхода из этой проблемы предлагается следующая модификация постановки задачи. Вводим некоторое значение угла $\theta = \theta_d$ и предполагаем, что при $\theta_d < \theta \leq \pi$ значения функций $f_r(\theta)$, $f_\theta(\theta)$ и $g(\theta)$ нулевые, причем требование непрерывности решения приводит к дополнительным условиям

$$f_\theta(\theta = \theta_d) = 0, \quad (2.22)$$

$$g(\theta = \theta_d) = 0. \quad (2.23)$$

Численное решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений (2.6), (2.7), (2.17) на отрезке $[0, \theta_d]$ с граничными условиями (2.18), (2.22), (2.23) позволяет сделать заключение о том, что поставленным граничным условиям удастся удовлетворить при значении угла $\theta_d = \pi/2$ и $s = 0$.

Анализ численного исследования показывает, что существует аналитическое решение этой задачи:

$$f_\theta(\theta) = \cos \theta, \quad f_r(\theta) = \sin \theta, \quad g(\theta) = \cos \theta \quad (2.24)$$

при $0 \leq \theta \leq \theta_d$. Тогда компоненты тензора напряжений можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\tau_r}{\psi} &= \mu \varkappa(t) \sin \theta, & \frac{\tau_\theta}{\psi} &= \mu \varkappa(t) \cos \theta, \\ \psi &= \frac{A}{\nu} \mu^m \varkappa^m(t) r \cos \theta. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Впервые эти поля напряжений и сплошности найдены в [11].

3. Асимптотический анализ "дальнего" поля напряжений

Рассмотрим соотношения для скоростей деформаций при достаточно больших r ($r \rightarrow \infty$). С этой целью оценим вклад упругого и вязкого слагаемых.

Предположим, что скоростями упругих деформаций можно пренебречь. Тогда поле напряжений имеет известное распределение Хатчинсона – Райса – Розенгрена и $\sigma_{ij} \sim r^\alpha$, где $\alpha = -1/(n+1)$. Принимая во внимание следующее из кинетического уравнения соотношение $\mu = 1 + \alpha t$, получаем, что $\mu > 0$ при $r \rightarrow \infty$, что, вообще говоря, противоречит физическому смыслу параметра сплошности. Следовательно, предположение о том, что доминируют скорости деформаций ползучести, не является верным, и скоростями упругих деформаций пренебрегать нельзя.

Предположим теперь, что при достаточно больших r скорости упругих деформаций преобладают. В этом случае асимптотики будут совпадать с асимптотиками для линейно упругого тела, т.е. $\alpha = -1/2$. Как следует из определяющего соотношения, это предположение справедливо для $n > 3$, что соответствует большинству материалов, поскольку $3 < n < 12$. Следовательно, при достаточном удалении от вершины растущей трещины скоростями деформаций ползучести можно пренебречь.

4. Оценка скорости роста трещины

Для оценки скорости роста трещины проанализируем выражения для параметра сплошности ψ , используя найденное решение в окрестности вершины трещины и граничные условия в бесконечно удаленной точке. В соответствии с полученным ранее решением задачи сформулируем выражение для параметра сплошности ψ в окрестности вершины трещины. Итак, при $r \rightarrow 0$

$$\psi = \frac{A}{v} \left(\frac{v}{BG} \right)^{m/(n-1)} r \cos \theta. \quad (4.1)$$

При достаточно больших r ($r \rightarrow \infty$) справедливо

$$\tau_r = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2}, \quad \tau_\theta = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2}, \quad (4.2)$$

так что можно сформулировать выражение для параметра сплошности ψ , полученное путем интегрирования кинетического уравнения:

$$\psi = 1 - A \left(\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi}} \right)^m r^{-m/2} t. \quad (4.3)$$

На границе этих двух областей (область, примыкающая к вершине подвижной трещины, где справедливо решение (4.1), и область, где имеет место распределение (4.2)) при некотором значении $r = r_*$ значения параметра ψ должны быть равны. Математическая формулировка этого условия представима в виде:

$$\psi^i(r_*) = \psi^e(r_*), \quad (\psi^i)'(r_*) = (\psi^e)'(r_*),$$

где ψ^i – решение, определяемое формулой (4.1), ψ^e – решение, определяемое формулой (4.3), штрих означает дифференцирование по r .

Проведя ряд преобразований, получаем следующую оценку скорости роста трещины:

$$v = \left[\frac{1}{(B\mu)^m} \frac{K_{III}^4}{m\pi} \left(\frac{A(m+2)}{2} \right)^{(mn+2n-2)/m} t^{\frac{2}{m(n+1)}} \right]^{1/q}, \quad (4.4)$$

где $q = n - m - 1$.

5. Трещина нормального отрыва

Рассмотрим задачу о докритическом подрастании трещины нормального отрыва в условиях плоского деформированного состояния в среде с поврежденностью.

По аналогии с трещиной типа III в случае трещины нормального отрыва определяющие соотношения для упругого нелинейно-вязкого материала в среде с поврежденностью в рамках связанной постановки задачи представим в виде:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \left(\frac{\dot{\sigma}_{ij}}{\psi} \right) - \frac{\nu}{E} \left(\frac{\dot{\sigma}_{kk}}{\psi} \right) \delta_{ij} + \frac{3}{2} B \left(\frac{\sigma}{\psi} \right)^{n-1} \frac{s_{ij}}{\psi}, \quad (5.1)$$

где $\dot{\varepsilon}_{ij}$ — компоненты тензора скорости деформаций, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, B, n — постоянные степенного закона ползучести, δ_{ij} — символ Кронекера, $s_{ij} = \sigma_{ij} - (1/3)\sigma_{kk}\delta_{ij}$ — девиатор тензора напряжений, $\sigma = \sqrt{(3/2)s_{ij}s_{ij}}$ — интенсивность напряжений. Введенный таким образом в рассмотрение параметр сплошности материала ψ [5, 6], для которого известно, что $0 \leq \psi \leq 1$ и $\psi(t=0) = 1$ удовлетворяет кинетическому уравнению, постулирующему степенной закон накопления повреждений:

$$\frac{d\psi}{dt} = -A \left(\frac{\tau}{\psi} \right)^m, \quad (5.2)$$

где A, m — постоянные материала, определяемые экспериментально.

Найдем асимптотическое решение этой задачи, положив

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{rr}}{\psi}(r, \theta) &= \alpha r^s f_{rr}(\theta), & \frac{\sigma_{\theta\theta}}{\psi}(r, \theta) &= \alpha r^s f_{\theta\theta}(\theta), \\ \frac{\sigma_{r\theta}}{\psi}(r, \theta) &= \alpha r^s f_{r\theta}(\theta), & \psi(r, \theta) &= \beta r^\mu g(\theta), \end{aligned} \quad (5.3)$$

где $\beta = A\alpha^m/v$. Выпишем для этого необходимые уравнения и сформулируем граничные условия.

Анализ, аналогичный проведенному для трещины типа III, позволяет сделать вывод о том, что в определяющем соотношении (5.1) нельзя пренебрегать скоростями упругих деформаций. В связи с этим рассмотрим предположение, согласно которому линейное слагаемое является доминирующим, тогда определяющее соотношение представим в виде:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \frac{\sigma_{ij}}{\psi} - \frac{\nu}{E} \frac{\sigma_{kk}}{\psi} \delta_{ij}. \quad (5.4)$$

Исходя из этого, сформулируем условие совместности деформаций, которое при данном предположении будет выглядеть следующим образом:

$$f''_{\theta\theta} - f''_{rr} - 2(f'_{rr} - f'_{\theta\theta}) + (s^2 + 2s - 2)(f_{rr} - f_{\theta\theta}) + 4sf_{r\theta} = 0. \quad (5.5)$$

Уравнения равновесия $\nabla \cdot \sigma = 0$ в полярной системе координат примут вид:

$$((s + \mu + 1)f_{rr} - f_{\theta\theta})g + g'f_{rr} + gf'_{rr} = 0, \quad (5.6)$$

$$((s + \mu + 2)f_{r\theta} + f'_{\theta\theta})g + g'f_{\theta\theta} = 0. \quad (5.7)$$

Кинетическое уравнение сохраняет свою форму:

$$\sin\theta g'(\theta) - \mu \cos\theta g(\theta) = -f^m(\theta), \quad (5.8)$$

где $f = (\sqrt{3}/2)\sqrt{(f_{rr} - f_{\theta\theta})^2 + 4f_{r\theta}^2}$ и $\mu = 1 + sm$. Система (5.5)–(5.8) представляет собой систему четырех обыкновенных дифференциальных уравнений. Сформулируем для нее граничные условия:

условия отсутствия поверхностных усилий:

$$f_{\theta\theta}(\pi) = 0, \quad f_{r\theta}(\pi) = 0; \quad (5.9)$$

условия симметрии:

$$f_{r\theta}(0) = 0, \quad f'_{rr}(0) = 0; \quad (5.10)$$

условие регулярности, вытекающее из кинетического уравнения:

$$g(0) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^m \frac{(f_{rr}(0) - f_{\theta\theta}(0))^m}{\mu}. \quad (5.11)$$

Методом пристрелки можно свести задачу к начальной. С этой целью заменим условия (5.9) на требования:

$$f_{\theta\theta}(0) = a_1, \quad f_{r\theta}(0) = a_2. \quad (5.12)$$

Поскольку полученная система уравнений (5.5) – (5.8) является однородной, условия (5.12) можно, нормируя, заменить на условия

$$f_{r\theta}(0) = a_1, \quad f_{\theta\theta}(0) = 1. \quad (5.13)$$

По аналогии со случаем трещины антиплоского сдвига приходим к необходимости изменения постановки задачи [10, 11], которая заключается в следующем: область, характеризующаяся значениями угла $\theta_d \leq \theta \leq \pi$, является областью полностью разрушенного материала, и равенства (5.9) должны быть заменены соотношениями:

$$f_{\theta\theta}(\theta_d) = 0, \quad f_{r\theta}(\theta_d) = 0. \quad (5.14)$$

Численное решение полученной системы дифференциальных уравнений (5.5)–(5.8) с граничными условиями (5.10), (5.11), (5.14) позволяет удовлетворить требуемым условиям лишь при значениях $\theta_d = \pi/2$ и $s = 0$.

Анализ численного решения позволяет сделать вывод о существовании аналитического решения задачи:

при $0 \leq \theta \leq \pi/2$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{rr}}{\psi}(r, \theta) &= 2G\kappa(t) \sin^2 \theta, & \frac{\sigma_{r\theta}}{\psi}(r, \theta) &= 2G\kappa(t) \sin 2\theta, \\ \frac{\sigma_{\theta\theta}}{\psi}(r, \theta) &= 2G\kappa(t) \cos^2 \theta, & \psi(r, \theta) &= \frac{A}{v} G^m \kappa^m(t) r \cos \theta. \end{aligned} \quad (5.15)$$

6. Область процесса накопления повреждений

Полученное решение задачи о докритическом росте трещин типа I и III в связанной постановке позволяет построить области процесса накопления повреждений.

Учитывая, что на границе области процесса накопления повреждений напряжения в окрестности вершины трещины (τ^i) и в бесконечно удаленной точке (τ^e) равны, получим уравнение границы области накопления повреждений.

Так, для трещины антиплоского сдвига $\tau = \sqrt{\tau_r^2 + \tau_\theta^2}$ и

$$\tau^i = \mu\kappa(t).$$

С другой стороны, как следует из известного решения линейной механики разрушения, имеем:

$$\tau^e = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}}.$$

Тогда, приравняв правые части этих уравнений, запишем следующее соотношение для границы области при $0 \leq \theta \leq \pi/2$:

$$\hat{r} = 1,$$

где $\hat{r} = 2\pi r \left(\frac{\mu\kappa(t)}{K_{III}} \right)^2$ – безразмерная переменная. Очевидно, что полученное уравнение для границы области накопления повреждений является дугой окружности.

Поскольку трещина распространяется, то граница области полностью поврежденного материала представляет собой дугу окружности и две прямые, параллельные линии трещины (рис. 1).

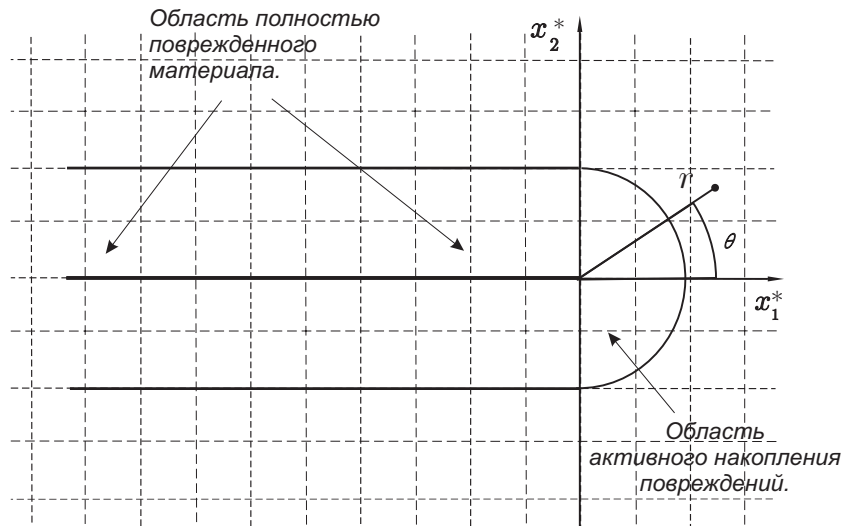


Рис. 1. Область процесса накопления повреждений, охватывающая вершину трещины и ее берега, для трещины типа III, где $x_1^* = 2\pi x_1 \left(\frac{\mu\kappa(t)}{K_{III}} \right)^2$, $x_2^* = 2\pi x_2 \left(\frac{\mu\kappa(t)}{K_{III}} \right)^2$

Для трещины нормального отрыва в условиях плоского деформированного состояния интенсивность напряжений определяется формулой:

$$\sigma = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + 4\sigma_{r\theta}^2}.$$

Тогда, в силу решения (5.15), при $0 \leq \theta \leq \pi/2$ справедливо

$$\sigma^i = 2\sqrt{3}G\kappa(t),$$

а из линейной механики разрушения известно, что

$$\sigma^e = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \theta.$$

Приравнивая эти выражения для интенсивностей напряжений, получаем уравнение границы области процесса:

$$\hat{r} = \sin^2 \theta,$$

где $\hat{r} = \left(\frac{4\sqrt{3}\pi G\kappa(t)}{K_I} \right)^2 r$ – безразмерная переменная.

Известно, что для трещины нормального отрыва в условиях плоского напряженного состояния интенсивность напряжений определяется формулой:

$$\sigma = \sqrt{3} \sqrt{\sigma_{rr}^2 - \sigma_{rr}\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\theta\theta}^2 + 3\sigma_{r\theta}^2}.$$

Тогда, проводя аналогичный анализ, найдем уравнение границы области процесса:

$$\hat{r} = \left(1 + 3 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \cos^2 \frac{\theta}{2},$$

где $\hat{r} = \left(\frac{16\pi\sqrt{3}G\kappa(t)}{K_I} \right)^2 r$.

Области процессов накопления повреждений представлены на рис. 2, 3.

Заключение

1. Проанализированы поля напряжений, скоростей упругих деформаций и деформаций ползучести, а также скалярный параметр сплошности в окрестности растущих трещин антиплоского сдвига и нормального отрыва в упругом нелинейно-вязком материале.

2. Показано, что скоростями упругих деформаций в окрестности вершины растущей трещины пренебрегать нельзя по сравнению со скоростями деформаций ползучести.

3. Проведено исследование "дальнего" поля напряжений (распределение напряжений при больших расстояниях от вершины трещины). Для чего дан сравнительный анализ скоростей упругих деформаций и деформаций ползучести при $r \rightarrow \infty$. Установлено, что скорости упругих деформаций вносят основной вклад в асимптотическое поле скоростей деформаций.

4. Дана оценка скорости роста трещины.

5. Определена конфигурация области накопления повреждений в окрестности вершины трещины типа III и типа I в условиях плоского деформированного и плоского напряженного состояния.

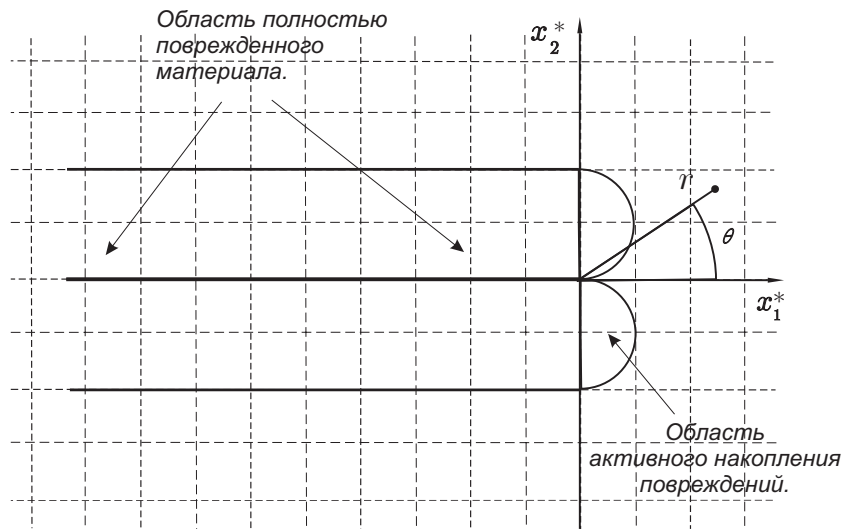


Рис. 2. Область процесса накопления повреждений, охватывающая вершину трещины и ее берега, для трещины нормального отрыва в условиях плоского деформированного состояния, где $x_1^* = \left(\frac{4\sqrt{3}\pi G \varkappa(t)}{K_I} \right)^2 x_1$, $x_2^* = \left(\frac{4\sqrt{3}\pi G \varkappa(t)}{K_I} \right)^2 x_2$

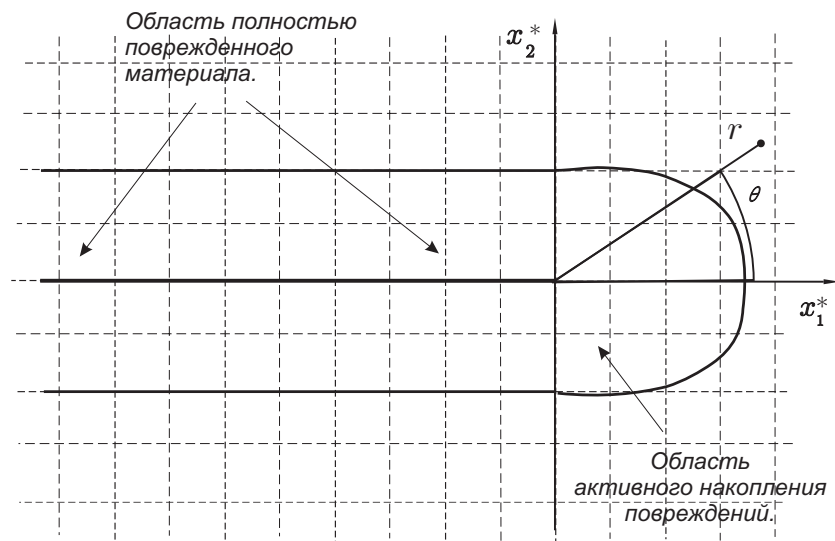


Рис. 3. Область процесса накопления повреждений, охватывающая вершину трещины и ее берега, для трещины нормального отрыва в условиях плоского напряженного состояния, где $x_1^* = \left(\frac{16\pi\sqrt{3}G \varkappa(t)}{K_I} \right)^2 x_1$, $x_2^* = \left(\frac{16\pi\sqrt{3}G \varkappa(t)}{K_I} \right)^2 x_2$

Литература

- [1] Hui C.Y., Riedel H. The asymptotic stress and strain field near the tip of a growing crack under creep conditions// Int. J. of Fracture. 1981. V. 17. P. 409–425.

- [2] Hui C.Y. The mechanics of self-similar crack growth in an elastic power-law creeping material//Int. J. Solids Structures. 1986. V. 22. No. 4. P. 357–372.
- [3] Rice J.R., Rosengren G.F. Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material // J. Mech. Phys. Solids. 1968. V. 16. P. 32–48.
- [4] Gao Y.C., Bui H.D. Damage field near a stationary crack tip//Int. J. Solids Structures. 1995. V. 32. No. 14. P. 1979–1987.
- [5] Работнов Ю. Н. О механизме длительного разрушения/ Вопросы прочности материалов и конструкций. М.: Изд-во АН СССР, 1959. С. 5–7.
- [6] Качанов Л. М. О времени разрушения в условиях ползучести// Изв. АН СССР. ОТИ. 1958. С. 26–31.
- [7] Jin Z.H., Batra R.C. Crack shielding and material deterioration in damaged materials: an antiplane shear fracture problem// Arch. Appl. Mech. 1998. No. 68. P. 247–258.
- [8] Kachanov L.M. Introduction to Continuum Damage Mechanics. Dordrecht, Boston: Martinus Nijhoff, 1986. 135 pp.
- [9] Lemaitre J. Coupled elasto-plasticity and damage constitutive equation// Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 1985. V. 51. P. 31–49.
- [10] Zhao J., Zhang X. The asymptotic study of fatigue crack growth based on damage mechanics// Engn. Fracture Mechanics. 1995. V. 50. No. 1. P. 131–141.
- [11] Астафьев В. И., Григорова Т. В., Пастухов В. А. Влияние поврежденности материала на напряженно-деформированное состояние в окрестности вершины трещины при ползучести// ФХММ. 1992. Т. 28. No. 1. С. 5–11.
- [12] Астафьев В. И., Григорова Т. В. Распределение напряжений и поврежденности у вершины растущей в процессе ползучести трещины// Изв. РАН. Мех. тверд. тела. 1995. No. 3. С. 160–166.
- [13] Zhao J., Zhang X. On the process zone of a quasi-static growing tensile crack with power-law elastic-plastic damage // Int. J. of Fracture. 2001. V. 108. P. 383–395.
- [14] Jin-Young Kim, Soon-Bok Lee. A tensile crack in creeping solids with large damage near the crack tip// Int. J. of Fracture. 2001. V. 112. P. 43–55.
- [15] Murakami S., Liu Y., Mizuno M. Computational methods for creep fracture analysis by damage mechanics// Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 2000. V. 183. P. 15–33.
- [16] Murakami S., Hirano T., Liu Y. Asymptotic fields of stress and damage of a mode I creep crack in steady-state growth//Int. J. Solids Struct. 2000. V. 37. P. 6203–6220.
- [17] Lee S.B., Lu M., Kim J.Y. An asymptotic analysis of a tensile crack in creeping solids coupled with cumulative damage. Part I. Small damage region around the crack tip//Int. J. Solids Struct. 1997. V. 34. No. 24. P. 3163–3178.
- [18] Lee S.B., Lu M., Kim J.Y., Mai H.C. An asymptotic analysis of a tensile crack in creeping solids coupled with cumulative damage. Part II. Large damage region around the crack tip//Int. J. Solids Struct. 1997. V. 34. No. 10. P. 1183–1197.
- [19] Hutchinson J.W. Plastic stress and strain fields at a crack tip// J. Mech. Phys. Solids. 1968. V. 16. P. 337–349.
- [20] Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. М.: Мир. 1980. 280 с.

ON THE EFFECT OF THE ELASTIC STRAIN RATE ON THE CRACK GROWTH IN ELASTIC NONLINEAR-VISCOUS DAMAGED MATERIALS³

© 2002 L.V. Stepanova, Y.N. Ustina⁴

In the present paper, asymptotic fields of stress, strain rate and integrity (continuity) parameter near the tip of Mode III and Mode I cracks in steady-state growth are analyzed on the basis of Continuum Damage Mechanics for elastic nonlinear-viscous materials, which deform according to the damage coupled elastic nonlinear-viscous constitutive equation $\dot{\epsilon} = (1/E)\dot{\sigma} + B\tilde{\sigma}^n$, where $\tilde{\sigma} = \sigma/\psi$, ψ is the continuity parameter. The nonlinear-viscous term describes power-law creep. The conventional Kachanov-Rabotnov creep damage theory is utilized and the scalar continuity parameter is incorporated into the elastic nonlinear-viscous constitutive equation. The asymptotic stress, strain rate and integrity fields are analyzed by solving a two-point boundary value problem of nonlinear differential equations. Three kinds of the two-point boundary value problems of different nonlinear differential equations are studied. These three types of the boundary value problems correspond to the following cases. 1. The asymptotic stress, strain and damage fields are dominated solely by nonlinear creep terms in the constitutive equation. 2. The linear term of the constitutive relation governs the asymptotic behaviour as $r \rightarrow 0$. 3. The linear elastic and nonlinear creep terms of the constitutive equations combine to determine the asymptotic behaviour near the crack tip. The analytical and numerical analysis given clearly indicate that the second case is realized. Thus, it is shown that the elastic strain rate cannot be neglected for a growing crack in elastic nonlinear-viscous damaged materials and the asymptotic stress and damage fields are determined by the elastic strain rates which have singularity of the type $\dot{\epsilon} \sim 1/r$, where r is the distance from the current crack tip. It is found that the stress has no singularity in the vicinity of the growing crack. The non-singular stress field is obtained, as the damage has such a substantial influence on the material behaviour that the high stress are relaxed at the crack tip. An analytical expression is obtained which explicitly shows the variation of stresses while approaching the crack tip. Thus, the asymptotic solution for stress and strain rate shows quite a different behaviour compared with those of HRR- and HR-problems. The shapes of the damage process zone and the totally damaged zone are also determined. These shapes for the Mode I crack under plane stress and plane strain condition and the Mode III crack are presented. The contours of the damage fields are represented by the curves determined analytically for the Mode III crack tip and numerically for the Mode I crack tip in front of the crack ($-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$) and a wake parallel to the crack plane behind the crack. The law of crack growth is formulated as well.

Поступила в редакцию 31/X/2002.

³Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. V.I. Astaf'ev.

⁴Stepanova Larisa Valentinovna (1st@ssu.samara.ru), Ustina Yulia Nickolaevna (ustina@ssu.samara.ru), Dept. of Continuum Mechanics, Samara State University, Samara, 443011, Russia.