УДК 517.927.7

УРАВНЕНИЕ КЛАССА ФУКСА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА[1]

© 2002 Х.А. Чиханов[2]

В статье даны 54 решения уравнения класса Фукса 3-го порядка с тремя правильными особыми точками.

По определению, дифференциальное уравнение 3-го порядка с правильной особой точкой $z = a$ имеет вид [3; гл. 1; 2.1.1]:

$$U''' + \frac{p(z)}{z-a}U'' + \frac{q(z)}{(z-a)^2}U' + \frac{r(z)}{(z-a)^3}U = 0. \qquad (1)$$

Здесь $p(z), q(z), r(z)$ — аналитические в окрестности точки $z = a$ функции. Для решений, имеющих вид обобщенного степенного ряда $U = \sum c_n z^{n+\lambda}$, характеристические показатели λ (ХП) удовлетворяют кубическому уравнению $\lambda^3 + (p(0)-3)\lambda^2 + (q(0) - p(0) + 2) + r = 0$. Несложный счет показывает, что уравнение класса Фукса 3-го порядка с тремя правильными особыми точками $0, 1, \infty$ имеет вид:

$$U''' + \left(\frac{3-A_0}{z} + \frac{3-A_1}{z-1}\right)U'' + \left(\frac{A_0-B_0-1}{z} + \frac{B_1-A_1+1}{z-1} - A_\infty - B_\infty - 1\right)\frac{U'}{z(z-1)} +$$
$$+ \left(-\frac{C_0}{z} - \frac{C_1}{z-1} + r_0 + C_\infty z\right)\frac{U}{z^2(z-1)^2} = 0. \qquad (2)$$

Здесь коэффициенты являются симметрическими функциями от ХП: $A_0 = \alpha_0 + \beta_0 + \delta_0, B_0 = \alpha_0\beta_0 + \beta_0\delta_0 + \delta_0\alpha_0, C_0 = \alpha_0\beta_0\delta_0$ и аналогично в точках $0, \infty$; причем выполняется тождество Фукса $A_0 + A_1 + A_\infty = 3$.

Уравнение (2) является естественным обобщением уравнения Римана [1; п. 2.6.1] и поэтому обладает достаточно богатой группой преобразований.

I_0. Группа ангармонических отношений (преобразование аргумента). Образы коэффициентов даны в табл. 1.

Таблица 1

$x = t$	A_0	B_0	C_0	A_1	B_1	C_1	A_∞	B_∞	C_∞	r_0
$1/t$	A_∞	B_∞	C_∞	A_1	B_1	C_1	A_0	B_0	C_0	$-r_0 - C_1$
$1-t$	A_1	B_1	C_1	A_0	B_0	C_0	A_∞	B_∞	C_∞	$-r_0 - C_\infty$
$1-1/t$	A_∞	B_∞	C_∞	A_0	B_0	C_0	A_1	B_1	C_1	$r_0 - C_0 + C_\infty$
$t/(t-1)$	A_0	B_0	C_0	A_∞	B_∞	C_∞	A_1	B_1	C_1	$C_0 - C_1 - C_\infty - r_0$
$1/(1-t)$	A_1	B_1	C_1	A_∞	B_∞	C_∞	A_0	B_0	C_0	$r_0 - C_0 - C_1$

II_0. Преобразования вида $U(z) = z^\lambda V(z)$.

[1]Представлена доктором физико-математических наук профессором Ю.Н. Радаевым.

[2]Чиханов Хамит Александрович, кафедра уравнений математической физики Самарского государственного университета, 443011, Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

Коэффициенты преобразуются следующим образом:

$$A_0^* = A_0 - 3\lambda,\ B_0^* = B_0 + 3\lambda^2 - 2\lambda A_0,\ C_0^* = C_0 - \lambda^3 + \lambda^2 A_0 - \lambda B_0,\ A_1^* = A_1,\ B_1^* = B_1,$$

$$C_1^* = C_1,\ B_\infty^* = B_\infty + 3\lambda^2 + (6 - 2A_0 - 2A_1),\ C_\infty^* = C_\infty + \lambda^3 + (3 - A_0 - A_1)\lambda^2 + \lambda B_\infty,$$

$$r_0^* = R(r_0, \lambda) \equiv r_0 - 2\lambda^3 + (2A_0 + A_1 - 3)\lambda^2 + (B_1 - B_0 - B_\infty - A_1 + 1)\lambda. \tag{3}$$

Несложный подсчет показывает инвариантность этих формул относительно повторного преобразования $V(z) = z^\mu W(z)$. Суперпозиция преобразований I_0 и II_0 дает преобразование вида $U(z) = (z-1)^\lambda V(z)$.

Аналогия с уравнением Римана позволяет построить достаточно стройную теорию уравнения класса Фукса 3-го порядка с тремя особыми точками. Напомним, что уравнение Римана сводится к гипергеометрическому уравнению. Аналогично, автоморфизмы II_0 уравнения (2) позволяют добиться того, чтобы существовали два решения, аналитических в точках $z = 0$ или $z = 1$ соответственно. Тогда с учетом тождества Фукса матрица ХП будет иметь вид : $K = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \beta_0 & 0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & 0 \\ \alpha_\infty & \beta_\infty & \delta_\infty \end{bmatrix}$, где $\delta_\infty = 3 - \alpha_0 - \beta_0 - \alpha_1 - \beta_1 - \alpha_\infty - \beta_\infty$.

Обозначим через $U_1(z) = \Phi(K, r_0, z)$ решение уравнения (2), аналитическое в точке $z = 0$ (с нормировкой $U_1(0) = 1$). В окрестности этой точки

$$\Phi(K, r_0, z) = 1 - \frac{\alpha_\infty\beta_\infty\delta_\infty}{2(\alpha_0 - 2)(\beta_0 - 2)} z^2 + \frac{\alpha_\infty\beta_\infty\delta_\infty r_1}{6(\alpha_0 - 2)(\beta_0 - 2)(\alpha_0 - 3)(\beta_0 - 3)} z^3 + O(z^4), \tag{4}$$

$r_1 = r_0 - 26 - 2\alpha_0\beta_0 + 2\alpha_1\beta_1 + 8\alpha_0 + 8\beta_0 + 2\alpha_1 + 2\beta_1 - 2\alpha_\infty\beta_\infty - 2\beta_\infty\delta_\infty - 2\delta_\infty\alpha_\infty$.

Два других решения выражаются через U_1:

$$U_2(z) = z^{\alpha_0}\Phi(K_2, R(r_0, \alpha), z), \quad U_3(z) = z^{\beta_0}\Phi(K_3, R(r_0, \beta), z).$$

Здесь

$$K_2 = \begin{bmatrix} -\alpha_0 & \beta_0 - \alpha_0 & 0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & 0 \\ \alpha_\infty - \alpha_0 & \beta_\infty - \alpha_0 & \delta_\infty - \alpha_0 \end{bmatrix}, \quad K_3 = \begin{bmatrix} \alpha_0 - \beta_0 & -\beta_0 & 0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & 0 \\ \alpha_\infty - \beta_0 & \beta_\infty - \beta_0 & \delta_\infty - \beta_0 \end{bmatrix}.$$

Хотелось бы сделать замечание общего характера. Часто мы имеем дело с аналитическими функциями от аргументов и параметров. Естественно, существуют особые кривые и поверхности, на которых параметры не могут находиться. Однако пространственная мера множества особых точек равна нулю. Поэтому естественно изучать ситуацию общего положения, находясь вне особых точек и не загромождая изложение излишними деталями. Разумеется, предполагается определенная математическая культура читателя. С учетом вышесказанного общее решение уравнения (2) имеет вид $k_1U_1(z) + k_2U_2(z) + k_3U_3(z)$.

Группа I_0 дает еще 5 решений: $U_4(z) = z^{-\alpha_\infty}\Phi(K_4, R4, 1/z)$,
$U_5(z) = \Phi(S_{213}K, R5, 1 - z)$, $\quad U_6(z) = \Phi(S_{231}K, R6, 1 - 1/z)$,
$U_7(z) = \Phi(S_{132}K, R7, z/(z-1))$, $\quad U_8(z) = (1-z)^{-\alpha_\infty}\Phi(K_8, R8, 1/(1-z))$, где S — оператор перестановки строк в матрице K . Здесь

$R4 = -2\alpha_\infty^3 + (2A_\infty + A_1 - 3)\alpha_\infty^2 + (B_1 - B_\infty - B_0 - A_1 + 1)\alpha_\infty - r_0$,
$R5 = -2\alpha_\infty^3 + (2A_1 + A_0 - 3)\alpha_\infty^2 + (B_0 - B_\infty - B_1 - A_0 + 1)\alpha_\infty - r_0 - C_\infty$,
$R6 = -2\alpha_\infty^3 + (2A_1 + A_\infty - 3)\alpha_\infty^2 + (B_\infty - B_1 - B_0 - A_\infty + 1)\alpha_\infty + r_0 + C_\infty$,
$R7 = -2\alpha_\infty^3 + (2A_0 + A_\infty - 3)\alpha_\infty^2 + (B_\infty - B_1 - B_0 - A_\infty + 1)\alpha_\infty - r_0 - C_\infty$,

$$R8=-2\alpha_\infty^3+(2A_\infty+A_0-3)\alpha_\infty^2+(B_0-B_\infty-B_1-A_0+1)\alpha_\infty+r_0,$$

$$K_4=\begin{bmatrix}-\alpha_\infty & \beta_\infty-\alpha_\infty & 0\\ \alpha_1 & \beta_1 & 0\\ \alpha_\infty+\alpha_0 & \alpha_\infty+\beta_0 & \alpha_\infty\end{bmatrix},\quad K_8=\begin{bmatrix}\beta_\infty-\alpha_\infty & -\alpha_\infty & 0\\ \alpha_0 & \beta_0 & 0\\ \alpha_1+\alpha_\infty & \beta_1+\alpha_\infty & \alpha_\infty\end{bmatrix}.$$

Суперпозиция групповых преобразований позволяет выписать 54 решения (с точностью до перестановки ХП):

$$F_1(z)=\Phi\left(\begin{bmatrix}\alpha_0 & \beta_0 & 0\\ \alpha_1 & \beta_1 & 0\\ \alpha_2 & \beta_2 & \delta_2\end{bmatrix},R_1,z\right),$$

$$F_2(z)=z^{-\alpha_2}\,\Phi\left(\begin{bmatrix}\beta_2-\alpha_2 & \delta_2-\alpha_2 & 0\\ \alpha_1 & \beta_1 & 0\\ \alpha_0+\alpha_2 & \beta_0+\alpha_2 & \alpha_2\end{bmatrix},R_2,\frac{1}{z}\right),$$

$$F_3(z)=\Phi\left(\begin{bmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & 0\\ \alpha_0 & \beta_0 & 0\\ \alpha_2 & \beta_2 & \delta_2\end{bmatrix},R_3,1-z\right),$$

$$F_4(z)=z^{-\alpha_2}\,\Phi\left(\begin{bmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & 0\\ \beta_2-\alpha_2 & \delta_2-\alpha_2 & 0\\ \alpha_0+\alpha_2 & \beta_0+\alpha_2 & \alpha_2\end{bmatrix},R_4,\frac{z-1}{z}\right),$$

$$F_5(z)=(1-z)^{-\delta_2}\,\Phi\left(\begin{bmatrix}\alpha_2-\delta_2 & \beta_2-\delta_2 & 0\\ \alpha_0 & \beta_0 & 0\\ \delta_2 & \delta_2+\alpha_1 & \delta_2+\beta_1\end{bmatrix},R_5,\frac{1}{1-z}\right),$$

$$F_6(z)=(1-z)^{-\alpha_2}\,\Phi\left(\begin{bmatrix}\alpha_0 & \beta_0 & 0\\ \beta_2-\alpha_2 & \delta_2-\alpha_2 & 0\\ \alpha_2 & \alpha_1+\alpha_2 & \beta_1+\alpha_2\end{bmatrix},R_6,\frac{z}{z-1}\right),$$

$$F_7(z)=z^{-\beta_1-\alpha_2}\,(1-z)^{\beta_1}\,\Phi\left(\begin{bmatrix}-\beta_1 & \alpha_1-\beta_1 & 0\\ \beta_2-\alpha_2 & \delta_2-\alpha_2 & 0\\ \beta_1+\alpha_2 & \alpha_0+\beta_1+\alpha_2 & \beta_1+\beta_0+\alpha_2\end{bmatrix},R_7,\frac{z-1}{z}\right),$$

$$F_8(z)=z^{\beta_0}\,\Phi\left(\begin{bmatrix}-\beta_0 & \alpha_0-\beta_0 & 0\\ \alpha_1 & \beta_1 & 0\\ \delta_2+\beta_0 & \beta_0+\alpha_2 & \beta_0+\beta_2\end{bmatrix},R_8,z\right),$$

$$F_9(z)=z^{-}\delta_2\,\Phi\left(\begin{bmatrix}\alpha_2-\delta_2 & \beta_2-\delta_2 & 0\\ \alpha_1 & \beta_1 & 0\\ \delta_2 & \delta_2+\alpha_0 & \delta_2+\beta_0\end{bmatrix},R_9,\frac{1}{z}\right),$$

$$F_{10}(z)=z^{\alpha_0}\,(1-z)^{\beta_1}\,\Phi\left(\begin{bmatrix}-\beta_1 & \alpha_1-\beta_1 & 0\\ \beta_0-\alpha_0 & -\alpha_0 & 0\\ \alpha_0+\beta_1+\alpha_2 & \beta_2+\alpha_0+\beta_1 & \beta_1+\delta_2+\alpha_0\end{bmatrix},R_{10},1-z\right),$$

$$F_{11}(z)=z^{\beta_0}\,(1-z)^{-\beta_0-\alpha_2}\,\Phi\left(\begin{bmatrix}-\beta_0 & \alpha_0-\beta_0 & 0\\ \beta_2-\alpha_2 & \delta_2-\alpha_2 & 0\\ \beta_0+\alpha_2 & \beta_0+\alpha_1+\alpha_2 & \beta_1+\beta_0+\alpha_2\end{bmatrix},R_{11},\frac{z}{z-1}\right),$$

$$F_{12}(z)=(1-z)^{-\alpha_0-\delta_2}\,z^{\alpha_0}\,\Phi\left(\begin{bmatrix}\alpha_2-\delta_2 & \beta_2-\delta_2 & 0\\ \beta_0-\alpha_0 & -\alpha_0 & 0\\ \delta_2+\alpha_0 & \delta_2+\alpha_1+\alpha_0 & \beta_1+\delta_2+\alpha_0\end{bmatrix},R_{12},\frac{1}{1-z}\right),$$

$$F_{13}(z) = (1-z)^{-\beta_2}\,\Phi\left(\begin{bmatrix} \delta_2-\beta_2 & \alpha_2-\beta_2 & 0\\ \alpha_0 & \beta_0 & 0\\ \beta_1+\beta_2 & \beta_2 & \beta_2+\alpha_1 \end{bmatrix},\, R_{13},\, \frac{1}{1-z}\right),$$

$$F_{14}(z) = (1-z)^{\beta_1}\,\Phi\left(\begin{bmatrix} -\beta_1 & \alpha_1-\beta_1 & 0\\ \alpha_0 & \beta_0 & 0\\ \delta_2+\beta_1 & \beta_1+\alpha_2 & \beta_1+\beta_2 \end{bmatrix},\, R_{14},\, 1-z\right),$$

$$F_{15}(z) = (1-z)^{-\beta_2}\,\Phi\left(\begin{bmatrix} \alpha_0 & \beta_0 & 0\\ \delta_2-\beta_2 & \alpha_2-\beta_2 & 0\\ \beta_1+\beta_2 & \beta_2 & \beta_2+\alpha_1 \end{bmatrix},\, R_{15},\, \frac{z}{z-1}\right),$$

$$F_{16}(z) = z^{-\delta_2-\alpha_1}\,(1-z)^{\alpha_1}\,\Phi\left(\begin{bmatrix} \alpha_2-\delta_2 & \beta_2-\delta_2 & 0\\ \beta_1-\alpha_1 & -\alpha_1 & 0\\ \beta_0+\delta_2+\alpha_1 & \delta_2+\alpha_1 & \delta_2+\alpha_1+\alpha_0 \end{bmatrix},\, R_{16},\, \frac{1}{z}\right),$$

$$F_{17}(z) = (1-z)^{\alpha_1}\,\Phi\left(\begin{bmatrix} \alpha_0 & \beta_0 & 0\\ \beta_1-\alpha_1 & -\alpha_1 & 0\\ \delta_2+\alpha_1 & \alpha_1+\alpha_2 & \beta_2+\alpha_1 \end{bmatrix},\, R_{17},\, z\right),$$

$$F_{18}(z) = (1-z)^{\beta_1}\,z^{-\beta_2-\beta_1}\Phi\left(\begin{bmatrix} -\beta_1 & \alpha_1-\beta_1 & 0\\ \delta_2-\beta_2 & \alpha_2-\beta_2 & 0\\ \beta_1+\beta_2 & \beta_2+\alpha_0+\beta_1 & \beta_1+\beta_0+\beta_2 \end{bmatrix},\, R_{18},\, \frac{z-1}{z}\right),$$

$$F_{19}(z) = (1-z)^{\alpha_1}\,z^{\beta_0}\,\Phi\left(\begin{bmatrix} -\beta_0 & \alpha_0-\beta_0 & 0\\ \beta_1-\alpha_1 & -\alpha_1 & 0\\ \beta_0+\delta_2+\alpha_1 & \beta_0+\alpha_1+\alpha_2 & \beta_0+\beta_2+\alpha_1 \end{bmatrix},\, R_{19},\, z\right),$$

$$F_{20}(z) = z^{-\beta_2-\alpha_1}\,(1-z)^{\alpha_1}\,\Phi\left(\begin{bmatrix} \beta_1-\alpha_1 & -\alpha_1 & 0\\ \delta_2-\beta_2 & \alpha_2-\beta_2 & 0\\ \beta_2+\alpha_1 & \beta_2+\alpha_1+\alpha_0 & \beta_0+\beta_2+\alpha_1 \end{bmatrix},\, R_{20},\, \frac{z-1}{z}\right),$$

$$F_{21}(z) = z^{\alpha_0}\,(1-z)^{\alpha_1}\,\Phi\left(\begin{bmatrix} \beta_0-\alpha_0 & -\alpha_0 & 0\\ \beta_1-\alpha_1 & -\alpha_1 & 0\\ \delta_2+\alpha_1+\alpha_0 & \alpha_1+\alpha_0+\alpha_2 & \beta_2+\alpha_1+\alpha_0 \end{bmatrix},\, R_{21},\, z\right),$$

$$F_{22}(z) = z^{-\beta_2-\alpha_1}\,(1-z)^{\alpha_1}\,\Phi\left(\begin{bmatrix} \delta_2-\beta_2 & \alpha_2-\beta_2 & 0\\ \beta_1-\alpha_1 & -\alpha_1 & 0\\ \beta_2+\alpha_1 & \beta_2+\alpha_1+\alpha_0 & \beta_0+\beta_2+\alpha_1 \end{bmatrix},\, R_{22},\, \frac{1}{z}\right),$$

$$F_{23}(z) = (1-z)^{-\beta_2-\alpha_0}\,z^{\alpha_0}\Phi\left(\begin{bmatrix} \delta_2-\beta_2 & \alpha_2-\beta_2 & 0\\ \beta_0-\alpha_0 & -\alpha_0 & 0\\ \beta_2+\alpha_0+\beta_1 & \beta_2+\alpha_0 & \beta_2+\alpha_1+\alpha_0 \end{bmatrix},\, R_{23},\, \frac{1}{1-z}\right),$$

$$F_{24}(z) = z^{-\alpha_1-\alpha_2}\,(1-z)^{\alpha_1}\,\Phi\left(\begin{bmatrix} \beta_1-\alpha_1 & -\alpha_1 & 0\\ \beta_2-\alpha_2 & \delta_2-\alpha_2 & 0\\ \beta_0+\alpha_1+\alpha_2 & \alpha_1+\alpha_2 & \alpha_1+\alpha_0+\alpha_2 \end{bmatrix},\, R_{24},\, \frac{z-1}{z}\right),$$

$$F_{25}(z) = z^{\alpha_0}\,(1-z)^{\alpha_1}\,\Phi\left(\begin{bmatrix} \beta_1-\alpha_1 & -\alpha_1 & 0\\ \beta_0-\alpha_0 & -\alpha_0 & 0\\ \delta_2+\alpha_1+\alpha_0 & \alpha_1+\alpha_0+\alpha_2 & \beta_2+\alpha_1+\alpha_0 \end{bmatrix},\, R_{25},\, 1-z\right),$$

$$F_{26}(z) = (1-z)^{-\beta_2-\beta_0}\,z^{\beta_0}\Phi\left(\begin{bmatrix} -\beta_0 & \alpha_0-\beta_0 & 0\\ \delta_2-\beta_2 & \alpha_2-\beta_2 & 0\\ \beta_1+\beta_0+\beta_2 & \beta_0+\beta_2 & \beta_0+\beta_2+\alpha_1 \end{bmatrix},\, R_{26},\, \frac{z}{z-1}\right),$$

$$F_{27}(z)=z^{\alpha_0}\,\Phi\left(\begin{bmatrix}\beta_0-\alpha_0 & -\alpha_0 & 0\\ \alpha_1 & \beta_1 & 0\\ \beta_2+\alpha_0 & \delta_2+\alpha_0 & \alpha_0+\alpha_2\end{bmatrix},\,R_{27},\,z\right),$$

$$F_{28}(z)=z^{-\beta_2}\,\Phi\left(\begin{bmatrix}\delta_2-\beta_2 & \alpha_2-\beta_2 & 0\\ \alpha_1 & \beta_1 & 0\\ \beta_0+\beta_2 & \beta_2 & \beta_2+\alpha_0\end{bmatrix},\,R_{28},\,\frac{1}{z}\right),$$

$$F_{29}(z)=z^{\alpha_0}\,(1-z)^{-\alpha_0-\alpha_2}\,\Phi\left(\begin{bmatrix}\beta_0-\alpha_0 & -\alpha_0 & 0\\ \beta_2-\alpha_2 & \delta_2-\alpha_2 & 0\\ \alpha_0+\beta_1+\alpha_2 & \alpha_0+\alpha_2 & \alpha_1+\alpha_0+\alpha_2\end{bmatrix},\,R_{29},\,\frac{z}{z-1}\right),$$

$$F_{30}(z)=z^{\beta_0}\,(1-z)^{\alpha_1}\,\Phi\left(\begin{bmatrix}\beta_1-\alpha_1 & -\alpha_1 & 0\\ -\beta_0 & \alpha_0-\beta_0 & 0\\ \beta_0+\alpha_1+\alpha_2 & \beta_0+\beta_2+\alpha_1 & \beta_0+\delta_2+\alpha_1\end{bmatrix},\,R_{30},\,1-z\right),$$

$$F_{31}(z)=z^{\alpha_0}\,(1-z)^{-\alpha_0-\beta_2}\,\Phi\left(\begin{bmatrix}\beta_0-\alpha_0 & -\alpha_0 & 0\\ \delta_2-\beta_2 & \alpha_2-\beta_2 & 0\\ \beta_2+\alpha_0 & \beta_2+\alpha_1+\alpha_0 & \beta_2+\alpha_0+\beta_1\end{bmatrix},\,R_{31},\,\frac{z}{z-1}\right),$$

$$F_{32}(z)=(1-z)^{-\beta_0-\beta_2}\,z^{\beta_0}\Phi\left(\begin{bmatrix}\delta_2-\beta_2 & \alpha_2-\beta_2 & 0\\ -\beta_0 & \alpha_0-\beta_0 & 0\\ \beta_0+\beta_2 & \beta_0+\beta_2+\alpha_1 & \beta_1+\beta_0+\beta_2\end{bmatrix},\,R_{32},\,\frac{1}{1-z}\right),$$

$$F_{33}(z)=(1-z)^{-\beta_0-\delta_2}\,z^{\beta_0}\Phi\left(\begin{bmatrix}\alpha_2-\delta_2 & \beta_2-\delta_2 & 0\\ -\beta_0 & \alpha_0-\beta_0 & 0\\ \delta_2+\beta_1+\beta_0 & \delta_2+\beta_0 & \beta_0+\delta_2+\alpha_1\end{bmatrix},\,R_{33},\,\frac{1}{1-z}\right),$$

$$F_{34}(z)=(1-z)^{\beta_1}\,z^{\beta_0}\Phi\left(\begin{bmatrix}-\beta_1 & \alpha_1-\beta_1 & 0\\ -\beta_0 & \alpha_0-\beta_0 & 0\\ \delta_2+\beta_1+\beta_0 & \beta_1+\beta_0+\alpha_2 & \beta_1+\beta_0+\beta_2\end{bmatrix},\,R_{34},\,1-z\right),$$

$$F_{35}(z)=(1-z)^{-\alpha_2}\,\Phi\left(\begin{bmatrix}\beta_2-\alpha_2 & \delta_2-\alpha_2 & 0\\ \alpha_0 & \beta_0 & 0\\ \alpha_1+\alpha_2 & \beta_1+\alpha_2 & \alpha_2\end{bmatrix},\,R_{35},\,\frac{1}{1-z}\right),$$

$$F_{36}(z)=(1-z)^{\alpha_1}\,\Phi\left(\begin{bmatrix}\beta_1-\alpha_1 & -\alpha_1 & 0\\ \alpha_0 & \beta_0 & 0\\ \beta_2+\alpha_1 & \delta_2+\alpha_1 & \alpha_1+\alpha_2\end{bmatrix},\,R_{36},\,1-z\right),$$

$$F_{37}(z)=(1-z)^{-\delta_2}\,\Phi\left(\begin{bmatrix}\alpha_0 & \beta_0 & 0\\ \alpha_2-\delta_2 & \beta_2-\delta_2 & 0\\ \delta_2+\alpha_1 & \delta_2+\beta_1 & \delta_2\end{bmatrix},\,R_{37},\,\frac{z}{z-1}\right),$$

$$F_{38}(z)=z^{-\delta_2-\beta_1}\,(1-z)^{\beta_1}\,\Phi\left(\begin{bmatrix}\alpha_2-\delta_2 & \beta_2-\delta_2 & 0\\ -\beta_1 & \alpha_1-\beta_1 & 0\\ \beta_1+\delta_2+\alpha_0 & \delta_2+\beta_1+\beta_0 & \delta_2+\beta_1\end{bmatrix},\,R_{38},\,\frac{1}{z}\right),$$

$$F_{39}(z)=(1-z)^{\beta_1}\,\Phi\left(\begin{bmatrix}\alpha_0 & \beta_0 & 0\\ -\beta_1 & \alpha_1-\beta_1 & 0\\ \beta_1+\beta_2 & \delta_2+\beta_1 & \beta_1+\alpha_2\end{bmatrix},\,R_{39},\,z\right),$$

$$F_{40}(z)=(1-z)^{\beta_1}\,z^{-\delta_2-\beta_1}\Phi\left(\begin{bmatrix}-\beta_1 & \alpha_1-\beta_1 & 0\\ \alpha_2-\delta_2 & \beta_2-\delta_2 & 0\\ \delta_2+\beta_1+\beta_0 & \delta_2+\beta_1 & \beta_1+\delta_2+\alpha_0\end{bmatrix},\,R_{40},\,\frac{z-1}{z}\right),$$

$$F_{41}(z) = z^{\beta_0}\,(1-z)^{\beta_1}\,\Phi\left(\begin{bmatrix} -\beta_0 & \alpha_0-\beta_0 & 0 \\ -\beta_1 & \alpha_1-\beta_1 & 0 \\ \beta_1+\beta_0+\beta_2 & \delta_2+\beta_1+\beta_0 & \beta_1+\beta_0+\alpha_2 \end{bmatrix},\, R_{41},\, z\right),$$

$$F_{42}(z) = (1-z)^{\alpha_1}\,z^{-\delta_2-\alpha_1}\,\Phi\left(\begin{bmatrix} \beta_1-\alpha_1 & -\alpha_1 & 0 \\ \alpha_2-\delta_2 & \beta_2-\delta_2 & 0 \\ \delta_2+\alpha_1 & \delta_2+\alpha_1+\alpha_0 & \beta_0+\delta_2+\alpha_1 \end{bmatrix},\, R_{42},\, \frac{z-1}{z}\right),$$

$$F_{43}(z) = (1-z)^{\beta_1}\,z^{\alpha_0}\,\Phi\left(\begin{bmatrix} \beta_0-\alpha_0 & -\alpha_0 & 0 \\ -\beta_1 & \alpha_1-\beta_1 & 0 \\ \beta_1+\delta_2+\alpha_0 & \alpha_0+\beta_1+\alpha_2 & \beta_2+\alpha_0+\beta_1 \end{bmatrix},\, R_{43},\, z\right),$$

$$F_{44}(z) = (1-z)^{\beta_1}\,z^{-\beta_2-\beta_1}\,\Phi\left(\begin{bmatrix} \delta_2-\beta_2 & \alpha_2-\beta_2 & 0 \\ -\beta_1 & \alpha_1-\beta_1 & 0 \\ \beta_1+\beta_2 & \beta_2+\alpha_0+\beta_1 & \beta_1+\beta_0+\beta_2 \end{bmatrix},\, R_{44},\, \frac{1}{z}\right),$$

$$F_{45}(z) = z^{\beta_0}\,(1-z)^{-\beta_0-\delta_2}\,\Phi\left(\begin{bmatrix} -\beta_0 & \alpha_0-\beta_0 & 0 \\ \alpha_2-\delta_2 & \beta_2-\delta_2 & 0 \\ \delta_2+\beta_1+\beta_0 & \delta_2+\beta_0 & \beta_0+\delta_2+\alpha_1 \end{bmatrix},\, R_{45},\, \frac{z}{z-1}\right),$$

$$F_{46}(z) = z^{-\delta_2}\,\Phi\left(\begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 \\ \alpha_2-\delta_2 & \beta_2-\delta_2 & 0 \\ \delta_2 & \delta_2+\alpha_0 & \delta_2+\beta_0 \end{bmatrix},\, R_{46},\, \frac{z-1}{z}\right),$$

$$F_{47}(z) = z^{-\beta_1-\alpha_2}\,(1-z)^{\beta_1}\,\Phi\left(\begin{bmatrix} \beta_2-\alpha_2 & \delta_2-\alpha_2 & 0 \\ -\beta_1 & \alpha_1-\beta_1 & 0 \\ \beta_1+\alpha_2 & \alpha_0+\beta_1+\alpha_2 & \beta_1+\beta_0+\alpha_2 \end{bmatrix},\, R_{47},\, \frac{1}{z}\right),$$

$$F_{48}(z) = z^{\beta_0}\,(1-z)^{-\beta_0-\alpha_2}\,\Phi\left(\begin{bmatrix} \beta_2-\alpha_2 & \delta_2-\alpha_2 & 0 \\ -\beta_0 & \alpha_0-\beta_0 & 0 \\ \beta_1+\beta_0+\alpha_2 & \beta_0+\alpha_2 & \beta_0+\alpha_1+\alpha_2 \end{bmatrix},\, R_{48},\, \frac{1}{1-z}\right),$$

$$F_{49}(z) = z^{-\beta_2}\,\Phi\left(\begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 \\ \delta_2-\beta_2 & \alpha_2-\beta_2 & 0 \\ \beta_0+\beta_2 & \beta_2 & \beta_2+\alpha_0 \end{bmatrix},\, R_{49},\, \frac{z-1}{z}\right),$$

$$F_{50}(z) = z^{\beta_0}\,\Phi\left(\begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 \\ -\beta_0 & \alpha_0-\beta_0 & 0 \\ \delta_2+\beta_0 & \beta_0+\alpha_2 & \beta_0+\beta_2 \end{bmatrix},\, R_{50},\, 1-z\right),$$

$$F_{51}(z) = (1-z)^{-\delta_2-\alpha_0}\,z^{\alpha_0}\,\Phi\left(\begin{bmatrix} \beta_0-\alpha_0 & -\alpha_0 & 0 \\ \alpha_2-\delta_2 & \beta_2-\delta_2 & 0 \\ \beta_1+\delta_2+\alpha_0 & \delta_2+\alpha_0 & \delta_2+\alpha_1+\alpha_0 \end{bmatrix},\, R_{51},\, \frac{z}{z-1}\right),$$

$$F_{52}(z) = z^{\alpha_0}\,(1-z)^{-\alpha_0-\alpha_2}\,\Phi\left(\begin{bmatrix} \beta_2-\alpha_2 & \delta_2-\alpha_2 & 0 \\ \beta_0-\alpha_0 & -\alpha_0 & 0 \\ \alpha_0+\beta_1+\alpha_2 & \alpha_0+\alpha_2 & \alpha_1+\alpha_0+\alpha_2 \end{bmatrix},\, R_{52},\, \frac{1}{1-z}\right),$$

$$F_{53}(z) = z^{-\alpha_1-\alpha_2}\,(1-z)^{\alpha_1}\,\Phi\left(\begin{bmatrix} \beta_2-\alpha_2 & \delta_2-\alpha_2 & 0 \\ \beta_1-\alpha_1 & -\alpha_1 & 0 \\ \beta_0+\alpha_1+\alpha_2 & \alpha_1+\alpha_2 & \alpha_1+\alpha_0+\alpha_2 \end{bmatrix},\, R_{53},\, \frac{1}{z}\right),$$

$$F_{54}(z) = z^{\alpha_0}\,\Phi\left(\begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 \\ \beta_0-\alpha_0 & -\alpha_0 & 0 \\ \beta_2+\alpha_0 & \delta_2+\alpha_0 & \alpha_0+\alpha_2 \end{bmatrix},\, R_{54},\, 1-z\right). \tag{5}$$

Выражения для R_k достаточно громоздкие (их можно восстановить). Каждое из решений можно рассматривать как преобразование уравнения (2). Следует отметить, что суперпозиция двух преобразований $F_k@F_j$ может быть внутренней (когда последующее преобразование F_k производится над старыми параметрами и старым аргументом преобразования) и внешней (когда преобразуются новые параметры и аргументы). Например, преобразование F_{54} имеет старый аргумент z , а новый — $1-z$. Мы рассматриваем здесь внешние преобразования. Решения F_2, F_3 и F_4 являются образующими группы G из 54 преобразований. Порядки элементов даются в табл. 2.

Таблица 2

Порядок	Число преобраз.	Преобразования
1	1	F_1
2	7	$F_3, F_6, F_{10}, F_{15}, F_{28}, F_{30}, F_{37}$
3	18	$F_8, F_{12}, F_{13}, F_{17}, F_{18}, F_{19}, F_{21}, F_{24}, F_{27},$ $F_{32}, F_{33}, F_{39}, F_{40}, F_{41}, F_{42}, F_{43}, F_{49}, F_{52}$
6	20	$F_2, F_9, F_{11}, F_{14}, F_{16}, F_{22}, F_{25}, F_{26}, F_{29}, F_{31}$ $F_{34}, F_{36}, F_{38}, F_{44}, F_{45}, F_{47}, F_{50}, F_{51}, F_{53}, F_{54}$
9	8	$F_4, F_5, F_7, F_{20}, F_{23}, F_{35}, F_{46}, F_{48}$

Помимо этих преобразований существует еще группа P перестановок ХП в каждой особой точке, состоящая из 24 преобразований. Поэтому полная группа $G_{\text{полн}}$ содержит $54 * 24 = 1296$ преобразований, а указанные 54 преобразования являются элементами соответствующей фактор-группы $G = G_{\text{полн}}/P$. Стационарная подгруппа точки $z = 0$ в G содержит 18 преобразований. Шесть из них сохраняют аналитичность решения в точке $z = 0$. Таким образом, мы имеем 5 автоморфизмов решения F_1 в себя :

$$F_1 \equiv F_6 \equiv F_{15} \equiv F_{17} \equiv F_{37} \equiv F_{39}. \tag{6}$$

Также совпадают решения, имеющие в нуле точку ветвления вида z^{α_0} или z^{β_0} :

$$F_{21} \equiv F_{27} \equiv F_{29} \equiv F_{31} \equiv F_{43} \equiv F_{51}, \quad F_8 \equiv F_{11} \equiv F_{19} \equiv F_{26} \equiv F_{41} \equiv F_{45}. \tag{7}$$

Аналогично выписываются еще 6 групп автоморфизмов :

$$F_3 \equiv F_4 \equiv F_{46} \equiv F_{49} \equiv F_{50} \equiv F_{54}, \quad F_{20} \equiv F_{24} \equiv F_{25} \equiv F_{30} \equiv F_{36} \equiv F_{42},$$

$$F_7 \equiv F_{10} \equiv F_{14} \equiv F_{18} \equiv F_{34} \equiv F_{40}, \quad F_2 \equiv F_{35} \equiv F_{47} \equiv F_{48} \equiv F_{52} \equiv F_{53},$$

$$F_{13} \equiv F_{22} \equiv F_{23} \equiv F_{28} \equiv F_{32} \equiv F_{44}, \quad F_5 \equiv F_9 \equiv F_{12} \equiv F_{16} \equiv F_{33} \equiv F_{38}. \tag{8}$$

Итак, 54 решения (5) фактически сводятся к 9 решениям (по 3 разложения в каждой из 3 особых точек) , каждое из которых может быть записано в 6 формах. В частности, основные 3 решения в окрестности нуля — это F_1, F_8 и F_{27}. Ясно, что они линейно независимы (в ситуации общего положения).

Любые 4 решения из этих 9 линейно зависимы. Следовательно, существуют $C_9^4 = 126$ формул аналитического продолжения. В частности, $F_3 = A_1F_1 + A_2F_8 + A_3F_{27}$. Коэффициенты A_k являются аналитическими функциями от ХП.

Отметим связь с функцией ${}_3F_2$. Функция ${}_3F_2\left[\begin{matrix} a, b_1, b_2 \\ c_1, c_2 \end{matrix}\middle| z\right]$ является решением полного уравнения (2) в случае матрицы ХП вида

$$\begin{bmatrix} 1 & -c_2+1 & 1-c_1 \\ 1 & 5+a+b_1+b_2-c_1-c_2 & 0 \\ \alpha_\infty & \beta_\infty & -6-\alpha_\infty-\beta_\infty+2c_1+2c_2-a-b_1-b_2 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Таким образом, функция ${}_3F_2$ связана с уравнением Фукса 3-го порядка, у которого существуют 2 решения, аналитических в точке $z=1$, и одно решение, аналитическое в точке $z=0$. В частности, ряд Заалшютца $(a+b_1+b_2+1=c_1+c_2)$ соответствует уравнению Фукса, у которого ХП в точке $z=1$ суть $0,1,4$; то есть особая точка $z=1$ просто исчезает!

Отметим, наконец, что уравнение (2) при некоторых ограничениях на коэффициенты сводится к фуксовой системе 3-го порядка с помощью замены $U_1=U$, $U_2=$ $=zU'$, $U_3=z^2U''$ (также см. [2–4]).

Литература

[1] Бейтмен Г., Эрдейи. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М.: Наука, 1973. 296 с.

[2] Голубева В.А. Гипергеометрические функции двух переменных Аппеля и Кампе де Ферье// Сиб. мат. журн. 1979. Т.20 №5. С. 997–1014.

[3] Федорюк М.В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983. 352 с.

[4] Чиханов Х.А. Гипергеометрические ряды и фуксовы системы// Дифференциальные уравнения. 1989. Т.25 №10. С. 1727–1730.

ON THE FUCHS CLASS THIRD ORDER EQUATION[3]

 Ch.A. Chikhanov[4]

In this paper 54 solutions of Fuchs class third order equation with three correct singular points are given.

Поступила в редакцию — $12/IX/2002$;
в окончательном варианте — $10/X/2002$.

[3]Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. Yu.N. Radayev.

[4]Chikhanov Chamit Alexandrovich, Dept. of Partial Differential Equations, Samara State University, Samara, 443011, Russia.