КРИТЕРИЙ КАФЬЕРО НА ОРТОМОДУЛЯРНОМ ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННОМ МНОЖЕСТВЕ¹

© 2002 Т.А. Срибная²

Критерий Кафьеро равномерной исчерпываемости доказан для случая, когда функции заданы на ортомодулярном частично упорядоченном множестве и принимают значения в произвольном топологическом пространстве, не наделенном никакими алгебраическими операциями.

Введение

Критерий равномерной исчерпываемости последовательности конечных обобщенных мер, заданных на σ -кольце множеств, принадлежит Ф. Кафьеро [1]. В работе [2] этот критерий был доказан для семейства аддитивных функций, заданных на σ -кольце множеств, со значениями в топологической абелевой группе, в работе [3] — для последовательности аддитивных функций, заданных на ортомодулярной решетке, со значениями в равномерной полугруппе.

Одной из причин возросшего в настоящее время интереса к распространению классических результатов теории меры на случай, когда функции заданы на ортомодулярной решетке, а в более общем случае на ортомодулярном частично упорядоченном множестве (см., например, работы [4–6]), является применение таких функций в квантовой механике.

Действительно, если математическое описание статистических моделей для классической механической системы может быть осуществлено в терминах вероятностных пространств $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, где Ω — некоторое множество элементарных событий, $\mathcal{A}$ — булева σ -алгебра подмножеств множества Ω , P — вероятностная мера на $\mathcal{A}$, то в случае, когда речь идет о квантово-механической системе, такого математического описания недостаточно. Квантово-механические утверждения не удается сформулировать на булевой σ -алгебре подмножеств, более того, их не удается сформулировать на абстрактной булевой алгебре. Современная квантовая теория работает с функциями, заданными на ортомодулярных частично упорядоченных множествах ([7, гл. 2, § 2, с. 112–118]; [8, гл. 1, § 2, с. 30]).

В предлагаемой работе рассматриваются функции, заданные на ортомодулярном частично упорядоченном множестве, со значениями в произвольном топологическом пространстве. Для семейства таких функций доказано обобщение критерия Кафьеро равномерной исчерпываемости. Кроме этого, показано, что в случае, когда функции принимают значения в хаусдорфовой равномерной полугруппе, справедлив еще один

¹Представлена доктором физико-математических наук профессором С.В. Асташкиным.

²Срибная Татьяна Аркадьевна, кафедра функционального анализа и теории функций Самарского государственного университета, 443011, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

если $\mu(a) \in V$, $\mu(b) \in V$, то $\mu(a \vee b) \in U$;
 если $\mu(a) \in V$, $\mu(a \vee b) \in V$, то $\mu(b) \in U$.

Будем говорить, что функция $\mu : L \rightarrow X$, $\mu \in \mathcal{M}$, *исчерпывающая*, если для любой ортогональной последовательности $\{e_n\} \subset L$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(e_n) = x. \quad (1.1)$$

Будем говорить, что функции семейства $\mathcal{M} = \{\mu\}$, $\mu : L \rightarrow X$, *равномерно исчерпывающие*, если для любой ортогональной последовательности $\{e_n\} \subset L$ соотношение (1.1) выполняется равномерно относительно $\mu \in \mathcal{M}$.

Для любого элемента $a \in L$ положим

$$\tilde{\mu}(a) = \{\mu(b), b \in L, b \leq a\}.$$

2. Критерии равномерной исчерпываемости

Лемма 1. Пусть L — σ -ортополное ортомодулярное частично упорядоченное множество, X — хаусдорфово топологическое пространство, $\mathcal{H}$ — фундаментальная система окрестностей точки $x \in X$. Пусть $\{\mu_n\}$, $\mu_n : L \rightarrow X$, — последовательность исчерпывающих функций. Для любой окрестности $U \in \mathcal{H}$ и любой ортогональной последовательности $\{e_n\}$ из L существует такая ортогональная подпоследовательность $\{e_{k_i}\} \subset \{e_k\}$, что для любого номера m справедливо

$$\tilde{\mu}_{k_m} \left(\bigvee_{i=m+1}^{\infty} e_{k_i} \right) \subset U.$$

Доказательство. Пусть $U \in \mathcal{H}$, а $\{e_n\}$ — ортогональная последовательность из L . Рассмотрим $(M_k)_{k \in N}$ — разбиение множества $N = \{1, 2, \dots\}$ такое, что каждое множество M_k , $k = 1, 2, \dots$, бесконечно.

Пусть

$$a_k = \bigvee_{i \in M_k} e_i, \quad k \in N.$$

Покажем, что $\{a_k\}$ — ортогональная последовательность из L . Пусть $i \neq j$. По условию $e_k \leq e_{p'}$ для любых $k \in M_i$ и $p \in M_j$. Зафиксируем некоторый номер $p \in M_j$, тогда $\bigvee_{k \in M_i} e_k \leq e_{p'}$. Так как последнее соотношение справедливо для любого $p \in M_j$, то

$$\bigvee_{k \in M_i} e_k \leq \bigwedge_{p \in M_j} e_{p'} = \left(\bigvee_{p \in M_j} e_p \right)',$$

что означает ортогональность элементов a_i и a_j .

Так как функция $\mu_1 : L \rightarrow X$ — исчерпывающая, то существует номер $k_0 \in N$ такой, что

$$\tilde{\mu}_1(a_{k_0}) \subset U.$$

Пусть $e_{k_1} \in \{e_i, i \in M_{k_0}\}$, $k_1 > 1$. К ортогональной последовательности $\{e_n^1\} = \{e_i, i \in M_{k_0}\}$ и функции μ_{k_1} применим предыдущее рассуждение. Получим ортогональную подпоследовательность $\{e_n^2\} \subset \{e_n^1\}$, для которой

$$\tilde{\mu}_{k_1} \left(\bigvee_{n=1}^{\infty} e_n^2 \right) \subset U.$$

Пусть $e_{k_2} \in \{e_n^2\}$, $k_2 > k_1$. Продолжив процесс по индукции, построим подпоследовательность номеров $\{k_m\}$ и элементов $\{e_{k_m}\} \subset L$, для которых

$$\tilde{\mu}_{k_m} \left(\bigvee_{n=1}^{\infty} e_n^{m+1} \right) \subset U$$

и

$$\tilde{\mu}_{k_m} \left(\bigvee_{i=m+1}^{\infty} e_{k_i} \right) \subset U, \quad m = 1, 2, \dots$$

Теорема 1. Пусть L — σ -ортополное ортомодулярное частично упорядоченное множество, X — хаусдорфово топологическое пространство, x — некоторая фиксированная точка пространства X . Пусть $M = \{\mu\}$, $\mu : L \rightarrow X$, $\mu(0) = x$, — семейство исчерпывающих равномерно квазитреугольных функций.

Для равномерной исчерпываемости функций семейства $M = \{\mu\}$, $\mu : L \rightarrow X$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:

(I) для любой окрестности U точки $x \in X$ и для любой ортогональной последовательности $\{e_n\} \subset L$ существует элемент $e_{k_0} \in \{e_n\}$ такой, что множество функций

$$\{\mu \in M : \mu(e_{k_0}) \notin U\}$$

конечно.

Доказательство. Достаточность. Предположим противное. Обозначим через $\mathcal{H}$ фундаментальную систему окрестностей точки $x \in X$. По предположению существуют окрестность $U \in \mathcal{H}$, ортогональная последовательность $\{e_n\} \subset L$ и последовательность функций $\mu_n \in M$, для которых

$$\mu_n(e_n) \notin U, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

Для окрестности $U \in \mathcal{H}$ в силу равномерной квазитреугольности функций семейства $M = \{\mu\}$, $\mu : L \rightarrow X$, найдется окрестность $V_0 \in \mathcal{H}$, $V_0 = V(U)$. Построим последовательность окрестностей точки $x \in X$: $\{V_n\} \subset \mathcal{H}$, $V_n = V_{n-1} \cap V(V_{n-1})$, $n = 1, 2, \dots$

Переходя, если нужно, к подпоследовательности, в силу леммы 1 можем считать, что

$$\tilde{\mu}_m \left(\bigvee_{k=m+1}^{\infty} e_k \right) \subset V_1, \quad m = 1, 2, \dots \quad (2.2)$$

По условию (I) существуют такие номера p_1 и N_1 , что $\mu_n(e_{p_1}) \in V_2$, $n > N_1$.

Аналогично найдем номера p_2 и N_2 такие, что $p_2 > p_1$, $p_2 > N_1$, $N_2 > N_1$ и

$$\mu_n(e_{p_2}) \in V_3, \quad n > N_2.$$

Продолжив процесс, по индукции построим подпоследовательности номеров $\{p_k\}$ и $\{N_k\}$ такие, что $p_k > p_{k-1}$, $p_k > N_{k-1}$, $k = 2, 3, \dots$,

$$\mu_{p_m}(e_{p_k}) \in V_{k+1}, \quad m > k, \quad (2.3)$$

$$\mu_{p_k}(e_{p_k}) \notin U, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.4)$$

В силу (2.2), (2.3) и построения последовательности $\{V_n\} \subset \mathcal{H}$, получим для $m = 2, 3, \dots$

$$\mu_{p_m} \left(\bigvee_{k=1}^{m-1} e_{p_k} \right) \in V_1, \quad (2.5)$$

$$\mu_{p_m} \left(\bigvee_{k=m+1}^{\infty} e_{p_k} \right) \in V_1. \quad (2.6)$$

Из (2.5) и (2.6) в силу выбора окрестности $V_1 \in \mathcal{H}$ для $m = 2, 3, \dots$ следует

$$\mu_{p_m} \left(\bigvee_{k \neq m} e_{p_k} \right) \in V_0. \quad (2.7)$$

Положим $a = \bigvee_{k=1}^{\infty} e_{p_k}$. Из (2.4) и (2.7), в силу выбора окрестности $V_0 \in \mathcal{H}$, следует для $m = 2, 3, \dots$

$$\mu_{p_m}(a) \notin V_0. \quad (2.8)$$

Таким образом, для любой ортогональной последовательности $\{e_n\} \subset L$, удовлетворяющей условию (2.1), можно найти такой элемент $a \in L$ и выделить такую подпоследовательность $\{\mu_{p_m}\}$, что

$$\mu_{p_m}(a) \notin V_0.$$

Пусть $\{e_n\} \subset L$ — ортогональная последовательность, удовлетворяющая условию (2.1). Рассмотрим $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ — разбиение множества $N = \{1, 2, \dots\}$ на попарно непересекающиеся множества такое, что каждое множество M_k , $k = 1, 2, \dots$, бесконечно. Возьмем счетную систему попарно непересекающихся ортогональных последовательностей

$$\{e_n, n \in M_1\}, \{e_n, n \in M_2\}, \dots, \{e_n, n \in M_k\}, \dots,$$

для которых выполняются условия

$$\mu_n(e_n) \notin U, n \in M_k, k = 1, 2, \dots$$

Для каждой ортогональной последовательности $\{e_n, n \in M_k\}$, $k = 1, 2, \dots$ построим соответствующий элемент и выделим подпоследовательность функций, удовлетворяющих условию (2.8). Полученную последовательность элементов из L обозначим через $\{a_n\}$.

По построению последовательность элементов $\{a_k\}$ ортогональна, причем для этой последовательности и окрестности $V_0 \in \mathcal{H}$ условие (I) теоремы не выполняется.

Необходимость. Пусть функции семейства $M = \{\mu\}$, $\mu : L \rightarrow X$, равномерно исчерпывающие. Тогда для любой ортогональной последовательности $\{e_n\} \subset L$ и для любой окрестности $U \in \mathcal{H}$ существует номер n_0 такой, что для любого номера $n > n_0$

$$\mu(e_n) \in U$$

для любой функции $\mu \in M$. Положим $k_0 = n_0 + 1$, тогда $\mu(e_{k_0}) \in U$ для любой функции $\mu \in M$. Теорема доказана.

Пусть $(S, +, \Theta)$ — абелева полугруппа с нулем Θ , а $\mathcal{U}$ — равномерность на S . Полугруппу $S = (S, +, \Theta, \mathcal{U})$ называют равномерной полугруппой, если операция сложения $(x, y) \rightarrow x + y$, действующая из $S \times S$ в S , равномерно непрерывна. Если $S = (S, +, \Theta, \mathcal{U})$ — равномерная полугруппа, то равномерность $\mathcal{U}$ порождается семейством $\mathcal{D} = \{d\}$ непрерывных псевдометрик d на S таких, что $d(x + z, y + z) \leq d(x, y)$ для любых $x, y, z \in S$ (свойство полуинвариантности).

Пусть $S = (S, +, \Theta, \mathcal{U})$ — хаусдорфова равномерная полугруппа, $\mu : L \rightarrow S$. Следуя [3], будем говорить, что функция μ

- *аддитивная*, если $\mu(0) = \Theta$ и $\mu(a \vee b) = \mu(a) + \mu(b)$ для любых ортогональных элементов a и b из L ;
- *исчерпывающая*, если для любой ортогональной последовательности $\{e_k\}$ из L $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(e_k) = 0$.

Символом $sa(L, S)$ обозначим множество всех исчерпывающих аддитивных функций, заданных на ортомодулярном частично упорядоченном множестве L со значениями в хаусдорфовой равномерной полугруппе S [3–4].

Если M — непустое подмножество $sa(L, S)$, то говорят, что M равномерно исчерпывающее, если

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(e_k) = 0$$

равномерно относительно $\mu \in M$.

Следствие 1. Пусть L — σ -ортополное ортомодулярное частично упорядоченное множество. Последовательность функций $\{\mu_n\}$ из $sa(L, S)$ является равномерно исчерпывающей тогда и только тогда, когда для любой окрестности U нуля в S и для любой ортогональной последовательности $\{e_n\} \subset L$ существуют такой номер p и такой элемент $e_{k_0} \in \{e_n\}$, что

$$\mu_n(e_{k_0}) \in U, \quad n > p.$$

Доказательство. Пусть $S = (S, +, \Theta, \mathcal{U})$ — хаусдорфова равномерная полугруппа. Обозначим через $\tau(\mathcal{U})$ топологию, соответствующую равномерности $\mathcal{U}$. Функции последовательности $\mu_n : L \rightarrow S$, $n = 1, 2, \dots$, рассматриваемые как функции со значениями в топологическом пространстве $(S, \tau(\mathcal{U}))$, являются равномерно квазитреугольными. Осталось применить теорему 1 к семейству функций $M = \{\mu_n\}$, $n = 1, 2, \dots$.

Приведем еще один пример семейства функций, для которого справедлива теорема 1. Пусть G — топологическая абелева группа. Следуя [10], функцию $\varphi : L \rightarrow G$ будем называть k -внешней мерой, $k \in \mathbb{N}$, если $\varphi(0) = \Theta$ и для любой окрестности нуля V в G и любых ортогональных элементов $a, b \in L$ справедливо утверждение: если $\varphi(a) \in V$, то $\varphi(a \vee b) - \varphi(b) \in k \cdot V$, где $k \cdot V = \{v_1 + v_2 + \dots + v_k, v_i \in V, i = \overline{1, k}\}$.

Примерами k -внешних мер являются аддитивные функции, внешние числовые меры, квазилишницевые функции.

Семейство k -внешних мер является семейством равномерно квазитреугольных функций.

Следствие 2. Пусть L — σ -ортополное ортомодулярное частично упорядоченное множество, G — топологическая абелева группа, $M = \{\mu\}$, $\mu : L \rightarrow G$, — семейство исчерпывающих k -внешних мер.

Для того чтобы функции семейства $M = \{\mu\}$ были равномерно исчерпывающими, необходимо и достаточно, чтобы для любой окрестности U нуля в G и любой ортогональной последовательности $\{e_n\} \subset L$ существовал элемент $e_{k_0} \in \{e_n\}$, для которого множество функций

$$\{\mu \in M : \mu(e_{k_0}) \notin U\}$$

конечно.

Теорема 2. Пусть L — ортомодулярное частично упорядоченное множество, S — хаусдорфова равномерная полугруппа. Пусть каждая функция $\varphi_n : L \rightarrow S$, $n = 1, 2, \dots$, является исчерпывающей.

Для того чтобы функции последовательности $\{\varphi_n\}$ обладали свойством равномерной исчерпываемости, необходимо и достаточно, чтобы для любой возрастающей последовательности номеров $\{p_k\}$ функции множества последовательности $\{\mu_k\}$, где

$$\mu_k(e) = \varphi_{p_k}(e) + \varphi_{p_{k+1}}(e), \quad e \in L,$$

были равномерно исчерпывающими.

Доказательство. Достаточность. Предположим противное. Тогда существуют псевдометрика $d \in \mathcal{D}$, число $\varepsilon > 0$ и ортогональная последовательность $\{e_n\} \subset L$ такие, что

$$d(\varphi_n(e_n), 0) > 2\varepsilon, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.9)$$

Положим $p_1 = 1$. Так как функция φ_{p_1} исчерпывающая, то существует номер $p_2 > p_1$ такой, что

$$d(\varphi_{p_1}(e_{p_2}), 0) < \varepsilon. \quad (2.10)$$

Используя свойство полуинвариантности псевдометрики d , получим для любых $x, y \in S$

$$d(0, x) \leq d(0, x + y) + d(y, 0). \quad (2.11)$$

Из (2.8) – (2.11) следует

$$d(\varphi_{p_2}(e_{p_2}) + \varphi_{p_1}(e_{p_2}), 0) > \varepsilon.$$

Продолжив процесс, построим подпоследовательность номеров $\{p_k\}$, $p_{k+1} > p_k$, $k = 1, 2, \dots$ такую, что

$$d(\varphi_{p_{k+1}}(e_{p_{k+1}}) + \varphi_{p_k}(e_{p_{k+1}}), 0) > \varepsilon, \quad k = 1, 2, \dots,$$

что противоречит условию.

Так как необходимость очевидна, то теорема доказана.

Замечание 1. В случае, когда L — ортомодулярная решетка со свойством субсеквенциальной интерполяции, следствие 1 доказано в работе [3, с. 518] (Cafiero Theorem).

Замечание 2. Следствие 2 содержит в себе критерий равномерной исчерпываемости семейства векторных мер, доказанный в работе [2, с. 264].

Замечание 3. Для семейства неаддитивных вещественнозначных функций множества критерий Кафьеро равномерной исчерпываемости был доказан в работе [11]. Теперь этот результат может быть получен как следствие теоремы 1.

Литература

- [1] Cafiero F. Sulle famigli di funzione additive d' insieme uniformemente continy// Rend. Accad. Naz. Lincei. 1952. V. 181. No. 12. P. 155–162.
- [2] Weber H. Compactness in spaces of group-valued contents, the Vitali–Hahn–Saks theorem and Nikodym's boundness theorem// Rocky Mountain J. Math. 1986. V. 16. No. 2. P. 253–275.
- [3] Andrea A.B., Lucia P. The Brooks–Jewett Theorem on an Orthomodular Lattice// Journ. of Math. Anal. and Appl. 1991. V.154. P. 507–522.
- [4] Maria J.L., Morales P. A Non-Commutative Version of the Nikodym Boundedness Theorem// Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena. 1994. XLII. P. 505–517.

- [5] Lucia P., Traynor T. Non commutative groupvalued measures on an orthomodular poset// *Math. Japonica*. 1994. V. 40. No. 2. P. 309–315.
- [6] Lucia P., Simone A. Measures on a weakly orthocomplete OMP with a filtering sub-OMP// *Tatra Mount. Math. Publ.* 1998. No. 15. P. 233–244.
- [7] Макки Дж. Лекции по математическим основам квантовой механики. М.: Мир, 1965. 221 с.
- [8] Владимиров Д. А. Булевы алгебры. М.: Наука, 1969. 320 с.
- [9] Климкин В.М. Введение в теорию функции множества. Саратов.: Изд-во Саратовского гос. ун-та, 1989. 209 с.
- [10] Саженок А. Н. Ограниченность векторных внешних мер// *Матем. заметки*. 1979. Т.25. №6. С. 913–917.
- [11] Срибная Т. А. К вопросу о равномерной непрерывности семейства неаддитивных функций множества// *Матем. заметки*. 1991. Т.50. №6. С. 126–130.

THE CAFIERO CRITERION ON AN ORTHOMODULAR POSET³

© 2002 Т.А. Sribnaya⁴

The uniform exhaustivity Cafiero criterion is proved in the case of functions defined on an orthomodular poset and taking values in an arbitrary topological space (without considering any algebraic operation on it).

Поступила в редакцию 10/VI/2002;
в окончательном варианте — 25/X/2002.

³Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. S.V. Astashkin.

⁴Sribnaya Tatyana Arcad'evna, Dept. of Functional Analysis and Theory of Functions, Samara State University, Samara, 443011, Russia.