УДК 517.9+62–50

ДЕКОМПОЗИЦИЯ МНОГОТЕМПОВЫХ МОДЕЛЕЙ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ[1]

© 2002 М.М. Семенова[2]

В статье излагается метод декомпозиции многотемповой модели нелинейной управляемой системы, основанный на теории интегральных многообразий быстрых и медленных движений. Исследуется управляемость системы вблизи начала координат. Приведен пример, иллюстрирующий полученные результаты.

1. Расщепляющее преобразование

Рассматривается система вида:

$$\prod_{k=0}^{i} \varepsilon_k \cdot \dot{x}_i = f_i(x_0, x_1, \ldots, x_n, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) + B_i(x_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)u, \ i = \overline{0,n}, \tag{1.1}$$

где $t \in \mathbf{R}$, $x_i, f_i \in \mathbf{R}^{n_i}, u \in \mathbf{R}^r$— управляющие воздействия, B_i, $i = \overline{0,n}$— матричные функции соответствующих размерностей, ε_l—малые положительные параметры, $\varepsilon_l \in (0, \varepsilon_l^0], l = \overline{1,n}, \varepsilon_0 = 1$.

Предположим, что выполняются следующие условия:

1) Уравнение

$$f_n(x_0, x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0) = 0$$

имеет изолированное решение $x_n = h_n^{0,0,\ldots,0}(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$.

2) В области

$$\Omega = \{(x_0, x_1, \ldots, x_n, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) : \|x_n - h_n^{0,0,\ldots,0}(x_0, \ldots, x_{n-1})\| \leqslant \rho_n,$$
$$\varepsilon_l \in (0, \varepsilon_l^0], l = \overline{1,n}\}$$

функции $h_n^{0,0,\ldots,0}, f_i, i = \overline{0,n}$ имеют достаточное число равномерно непрерывных и ограниченных частных производных по всем переменным.

3) Собственные значения $\lambda_i = \lambda_i(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}), i = \overline{1,n_n}$ матрицы

$$\frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, h_n^{0,0,\ldots,0}(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}), 0, \ldots, 0)$$

[1]Представлена доктором физико-математических наук профессором В.А. Соболевым.

[2]Семенова Марина Михайловна, кафедра высшей математики и экономико-математических методов Самарской государственной экономической академии, 443090, г. Самара, ул. Сов. Армии, 141.

удовлетворяют неравенству Re $\lambda_i \leqslant -2\beta < 0$.
1^1) Уравнение

$$f_{n-1}(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, h_n^{0,0,\ldots,0}(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}), 0, \ldots, 0) = 0$$

имеет изолированное решение $x_{n-1} = h_{n-1}^{0,0,\ldots,0}(x_0, \ldots, x_{n-2})$.
2^1) В области

$$\Omega_1 = \{(x_0, \ldots, x_{n-2}, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) : \|x_{n-1} - h_{n-1}^{0,0,\ldots,0}(x_0, \ldots, x_{n-2})\| \leqslant \rho_{n-1},$$

$$\varepsilon_l \in (0, \varepsilon_l^1],\ l = \overline{1,n}\}, \varepsilon_l^1 \leqslant \varepsilon_l^0,$$

функции $h_{n-1}^{0,0,\ldots,0}, f_i, i = \overline{0, n-1}$ имеют достаточное число равномерно непрерывных и ограниченных частных производных по всем переменным.
3^1) Собственные значения $\lambda_i = \lambda_i(x_0, \ldots, x_{n-2}), i = \overline{1, n_{n-1}}$ матрицы

$$\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}}(x_0, \ldots, x_{n-2}, h_{n-1}^{0,0,\ldots,0}(x_0, \ldots, x_{n-2}), h_n^{0,0,\ldots,0}(x_0, \ldots, x_{n-2}, h_{n-1}^{0,0,\ldots,0}), 0, \ldots, 0)$$

удовлетворяют неравенству Re $\lambda_i \leqslant -2\beta < 0$.
...
1^{n-1}) Уравнение

$$f_1(x_0, x_1, h_2^{0,0,\ldots,0}, \ldots, h_n^{0,0,\ldots,0}(x_0, x_1, h_2^{0,0,\ldots,0}, \ldots, h_{n-1}^{0,0,\ldots,0}), 0, \ldots, 0) = 0$$

имеет изолированное решение $x_1 = h_1^{0,0,\ldots,0}(x_0)$.
2^{n-1}) В области

$$\Omega_{n-1} = \{(x_0, x_1, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) : \|x_1 - h_1^{0,0,\ldots,0}(x_0)\| \leqslant \rho_1,$$

$$\varepsilon_l \in (0, \varepsilon_l^{n-1}], l = \overline{1,n}\}, \varepsilon_l^{n-1} \leqslant \varepsilon_l^{n-2} \leqslant \ldots \leqslant \varepsilon_l^0,$$

функции $h_j, j = \overline{2,n},\ f_i, i = 0, 1,\ h_1^{0,0,\ldots,0}$ имеют достаточное число равномерно непрерывных и ограниченных частных производных по всем переменным.
3^{n-1}) Собственные значения $\lambda_i = \lambda_i(x_0), i = \overline{1, n_1}$ матрицы

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0, h_1^{0,\ldots,0}(x_0), h_2^{0,\ldots,0}(x_0, h_1^{0,\ldots,0}), \ldots, h_n^{0,\ldots,0}(x_0, h_1^{0,\ldots,0}, \ldots, h_{n-1}^{0,\ldots,0}), 0, \ldots, 0)$$

удовлетворяют неравенству Re $\lambda_i \leqslant -2\beta < 0$.
Считая u независимыми входными переменными, сделаем гладкую замену переменных [1]:

$$\begin{aligned} x_0 &= v_0 + \sum_{j=1}^{n} \prod_{k=1}^{j} \varepsilon_k H_0^j, \\ x_i &= v_i + h_i + \sum_{j=i+1}^{n} \prod_{k=i+1}^{j} \varepsilon_k H_i^j,\ i = \overline{1, n-1}, \\ x_n &= v_n + h_n, \end{aligned}$$

где $h_n = h_n(x_0, \ldots, x_{n-1}, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$,
$H_0^1 = H_0^1(v_0, v_1, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n), h_1 = h_1(v_0 + \varepsilon_1 H_0^1, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$,
$H_i^2 = H_i^2(v_0 + \varepsilon_1 H_0^1, v_1 + h_1, v_2, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n),\ i = 0, 1;$

$$h_2 = h_2(v_0 + \varepsilon_1 H_0^1 + \varepsilon_1\varepsilon_2 H_0^2, v_1 + h_1 + \varepsilon_2 H_1^2, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n),$$

$$H_i^j = H_i^j(v_0 + \sum_{l=1}^{j-1}\prod_{k=1}^{l}\varepsilon_k H_0^l, v_1 + h_1 + \sum_{l=2}^{j-1}\prod_{k=2}^{l}\varepsilon_k H_1^l, \ldots, v_{j-1} + h_{j-1}, v_j, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n),$$
$$j = \overline{3,n},\ i = \overline{0, j-1};$$

$$h_i = h_i(v_0 + \sum_{l=1}^{i}\prod_{k=1}^{l}\varepsilon_k H_0^l, v_1 + h_1 + \sum_{i=2}^{i}\prod_{k=2}^{l}\varepsilon_k H_1^l, \ldots, v_{i-1} + h_{i-1} + \varepsilon_i H_{i-1}^i, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n),$$
$$i = \overline{3, n-1}.$$

После такой замены получим систему "блочно-треугольного" вида:

$$\dot{v_0} = F_0(v_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) + \tilde{B}_0(v_0, v_1, \ldots, v_n, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)u,$$

$$\varepsilon_1\dot{v_1} = F_1(v_0, v_1, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) + \tilde{B}_1(v_0, v_1, \ldots, v_n, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)u,$$

$$\prod_{k=1}^{i}\varepsilon_k\dot{v_i} = F_i(v_0, v_1, \ldots, v_i, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) + \tilde{B}_i(v_0, v_1, \ldots, v_n, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)u,\ i = \overline{2, n-1},$$

$$\prod_{k=1}^{n}\varepsilon_k\dot{v_n} = F_n(v_0, v_1, \ldots, v_n, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) + \tilde{B}_n(v_0 + \sum_{j=1}^{n}\prod_{k=1}^{j}\varepsilon_k H_0^j, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)u. \quad (1.2)$$

Здесь

$$F_0 = f_0(v_0, h_1(v_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n), h_2(v_0, h_1(v_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n), \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n), \ldots, h_{n-1}, h_n(v_0, h_1,$$
$$h_2, \ldots, h_{n-1}, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n), \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n),$$

$$F_1 = f_1(v_0 + \varepsilon_1 H_0^1, v_1 + h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}, h_n(v_0 + \varepsilon_1 H_0^1, v_1 + h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n),$$
$$\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) - f_1(v_0 + \varepsilon_1 H_0^1, h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}, h_n(v_0 + \varepsilon_1 H_0^1, h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n), \varepsilon_1,$$
$$\ldots, \varepsilon_n) - \varepsilon_1\frac{\partial h_1}{\partial y_0^{(1)}}[f_0(v_0 + \varepsilon_1 H_0^1, v_1 + h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}, h_n(v_0 + \varepsilon_1 H_0^1, v_1 + h_1, h_2, \ldots, h_{n-1},$$
$$\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n), \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) - f_0(v_0 + \varepsilon_1 H_0^1, h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}, h_n(v_0 + \varepsilon_1 H_0^1, h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}, \varepsilon_1,$$
$$\ldots, \varepsilon_n), \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)],$$

$$F_i = f_i(v_0 + \sum_{j=1}^{i}\prod_{k=1}^{j}\varepsilon_k H_0^j, v_1 + h_1 + \sum_{j=2}^{i}\prod_{k=2}^{j}\varepsilon_k H_1^j, \ldots, v_i + h_i, h_{i+1}, \ldots, h_{n-1}, h_n(v_0 +$$
$$+ \sum_{j=1}^{i}\prod_{k=1}^{j}\varepsilon_k H_0^j, v_1 + h_1 + \sum_{j=2}^{i}\prod_{k=2}^{j}\varepsilon_k H_1^j, \ldots, v_i + h_i, h_{i+1}, \ldots, h_{n-1}, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n), \varepsilon_1, \ldots,$$
$$\varepsilon_n) - f_i(v_0 + \sum_{j=1}^{i}\prod_{k=1}^{j}\varepsilon_k H_0^j, v_1 + h_1 + \sum_{j=2}^{i}\prod_{k=2}^{j}\varepsilon_k H_1^j, \ldots, h_i, \ldots, h_{n-1}, h_n(v_0 + \sum_{j=1}^{i}\prod_{k=1}^{j}\varepsilon_k H_0^j,$$
$$v_1 + h_1 + \sum_{j=2}^{i}\prod_{k=2}^{j}\varepsilon_k H_1^j, \ldots, h_i, h_{i+1}, \ldots, h_{n-1}, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n), \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) - \sum_{l=0}^{i-1}\prod_{k=l+1}^{i}\varepsilon_k\frac{\partial h_i}{\partial y_l^{(i)}}\cdot$$

$$\cdot[f_l(v_0+\sum_{j=1}^{i}\prod_{k=1}^{j}\varepsilon_k H_0^j, v_1+h_1+\sum_{j=2}^{i}\prod_{k=2}^{j}\varepsilon_k H_1^j,\ldots,v_i+h_i,h_{i+1},\ldots,h_{n-1},h_n(v_0+$$

$$+\sum_{j=1}^{i}\prod_{k=1}^{j}\varepsilon_k H_0^j, v_1+h_1+\sum_{j=2}^{i}\prod_{k=2}^{j}\varepsilon_k H_1^j,\ldots,v_i+h_i,h_{i+1},\ldots,h_{n-1},\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n),\varepsilon_1,\ldots,$$

$$\varepsilon_n)-f_l(v_0+\sum_{j=1}^{i}\prod_{k=1}^{j}\varepsilon_k H_0^j, v_1+h_1+\sum_{j=2}^{i}\prod_{k=2}^{j}\varepsilon_k H_1^j,\ldots,h_i,\ldots,h_{n-1},h_n(v_0+\sum_{j=1}^{i}\prod_{k=1}^{j}\varepsilon_k H_0^j,$$

$$v_1+h_1+\sum_{j=2}^{i}\prod_{k=2}^{j}\varepsilon_k H_1^j,\ldots,h_i,\ldots,h_{n-1},\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n),\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)],$$

$$F_n=Z_n(v_0+\sum_{j=1}^{n}\prod_{k=1}^{j}\varepsilon_k H_0^j, v_1+h_1+\sum_{j=2}^{n}\prod_{k=2}^{j}\varepsilon_k H_1^j,\ldots,v_{n-1}+h_{n-1}+\varepsilon_n H_{n-1}^n,v_n,\varepsilon_1,\ldots,$$

$$\varepsilon_n),$$

причем

$$Z_n=f_n(v_0+\sum_{j=1}^{n}\prod_{k=1}^{j}\varepsilon_k H_0^j,\ldots,v_{n-1}+h_{n-1}+\varepsilon_n H_{n-1}^n,v_n+h_n,\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)-f_n(v_0+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\prod_{k=1}^{j}\varepsilon_k H_0^j,\ldots,v_{n-1}+h_{n-1}+\varepsilon_n H_{n-1}^n,h_n,\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)-\sum_{l=0}^{n-1}\prod_{k=l+1}^{n}\varepsilon_k\frac{\partial h_n}{\partial x_l}[f_l(v_0+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\prod_{k=1}^{j}\varepsilon_k H_0^j,\ldots,v_{n-1}+h_{n-1}+\varepsilon_n H_{n-1}^n,v_n+h_n,\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)-f_l(v_0+\sum_{j=1}^{n}\prod_{k=1}^{j}\varepsilon_k H_0^j,\ldots,$$

$$v_{n-1}+h_{n-1}+\varepsilon_n H_{n-1}^n,h_n,\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)],$$

$$\tilde{B}_n=B_n(v_0+\sum_{j=1}^{n}\prod_{k=1}^{j}\varepsilon_k H_0^j,\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)-\sum_{l=0}^{n-1}\prod_{k=l+1}^{n}\varepsilon_k\frac{\partial h_n}{\partial x_l}B_l(v_0+\sum_{j=1}^{n}\prod_{k=1}^{j}\varepsilon_k H_0^j,\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n),$$

$$h_n=h_n(v_0+\sum_{j=1}^{n}\prod_{k=1}^{j}\varepsilon_k H_0^j, v_1+h_1+\sum_{j=2}^{n}\prod_{k=2}^{j}\varepsilon_k H_1^j,\ldots,v_{n-1}+h_{n-1}+\varepsilon_n H_{n-1}^n,\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n),$$

$$\tilde{B}_i=B_i-\frac{\partial H_i^n}{\partial v_n}\tilde{B}_n,\ i=\overline{0,n-1}.$$

Функции $h_i, i=\overline{1,n}$ можно искать как асимптотические разложения по малому параметру ε_i

$h_1(y_0^{(1)},\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)=h_{10}(y_0^{(1)},\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n)+\varepsilon_1 h_{11}(y_0^{(1)},\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n)+\varepsilon_1^2\ldots,$

$y_0^{(1)}=v_0+\varepsilon_1 H_0^1,$

$$h_i(y_0^{(i)},\ldots,y_{i-1}^{(i)},\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)=h_{i0}(y_0^{(i)},\ldots,y_{i-1}^{(i)},\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{i-1},\varepsilon_{i+1},\ldots,\varepsilon_n)+\varepsilon_i h_{i1}(y_0^{(i)},$$

$$\ldots,y_{i-1}^{(i)},\varepsilon_1\ldots,\varepsilon_{i-1},\varepsilon_{i+1},\ldots,\varepsilon_n)+\varepsilon_i^2\ldots,$$

$$y_0^{(i)}=v_0+\sum_{j=1}^{i}\prod_{k=1}^{j}\varepsilon_k H_0^j,\ldots,y_{i-1}^{(i)}=v_{i-1}+h_{i-1}+\varepsilon_i H_{i-1}^i,$$

$$h_n(x_0,\dots,x_{n-1},\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)=h_{n0}(x_0,\dots,x_{n-1},\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{n-1})+\varepsilon_n h_{n1}(x_0,\dots,x_{n-1},\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{n-1})+\varepsilon_n^2\dots,$$

из соответствующих уравнений

$$\varepsilon_1\frac{\partial h_1}{\partial y_0^{(1)}}f_0(v_0+\varepsilon_1H_0^1,h_1(v_0+\varepsilon_1H_0^1,\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n),h_2(v_0+\varepsilon_1H_0^1+\varepsilon_1\varepsilon_2H_0^2,v_1+h_1+\varepsilon_2H_1^2,\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n),\dots,h_{n-1}(v_0+\sum_{j=1}^{n-1}\prod_{k=1}^{j}\varepsilon_kH_0^j,v_1+h_1+\sum_{j=2}^{n-1}\prod_{k=2}^{j}\varepsilon_kH_1^j,\dots,v_{n-2}+h_{n-2}+\varepsilon_{n-1}H_{n-2}^{n-1},\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n),h_n(v_0+\varepsilon_1H_0^1,h_1,h_2,\dots,h_{n-1},\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n),\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)=f_1(v_0+\varepsilon_1H_0^1,h_1(v_0+\varepsilon_1H_0^1,\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n),h_2(v_0+\varepsilon_1H_0^1+\varepsilon_1\varepsilon_2H_0^2,v_1+h_1+\varepsilon_2H_1^2,\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n),\dots,h_{n-1}(v_0+\sum_{j=1}^{n-1}\prod_{k=1}^{j}\varepsilon_kH_0^j,v_1+h_1+\sum_{j=2}^{n-1}\prod_{k=2}^{j}\varepsilon_kH_1^j,\dots,v_{n-2}+h_{n-2}+\varepsilon_{n-1}H_{n-2}^{n-1},\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n),h_n(v_0+\varepsilon_1H_0^1,h_1,h_2,\dots,h_{n-1},\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n),\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n),$$

$$\sum_{l=0}^{i-1}\prod_{k=l+1}^{i}\varepsilon_k\frac{\partial h_i}{\partial y_l^{(i)}}(v_0+\sum_{j=1}^{i}\prod_{k=1}^{j}\varepsilon_kH_0^j,v_1+h_1+\sum_{j=2}^{i}\prod_{k=2}^{j}\varepsilon_kH_1^j,\dots,v_{i-1}+h_{i-1}+\varepsilon_iH_{i-1}^i,\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)f_l(v_0+\sum_{j=1}^{i}\prod_{k=1}^{j}\varepsilon_kH_0^j,v_1+h_1+\sum_{j=2}^{i}\prod_{k=2}^{j}\varepsilon_kH_1^j,\dots,v_{i-1}+h_{i-1}+\varepsilon_iH_{i-1}^i,h_i,\dots,h_{n-1},h_n(v_0+\sum_{j=1}^{i}\prod_{k=1}^{j}\varepsilon_kH_0^j,v_1+h_1+\sum_{j=1}^{i}\prod_{k=1}^{j}\varepsilon_kH_1^j,\dots,v_{i-1}+h_{i-1}+\varepsilon_iH_{i-1}^i,h_i,\dots,h_{n-1},\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n),\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)=f_i(v_0+\sum_{j=1}^{i}\prod_{k=1}^{j}\varepsilon_kH_0^j,v_1+h_1+\sum_{j=2}^{i}\prod_{k=2}^{j}\varepsilon_kH_1^j,\dots,v_{i-1}+h_{i-1}+\varepsilon_iH_{i-1}^i,h_i,\dots,h_{n-1},h_n(v_0+\sum_{j=1}^{i}\prod_{k=1}^{j}\varepsilon_kH_0^j,v_1+h_1+\sum_{j=2}^{i}\prod_{k=2}^{j}\varepsilon_kH_1^j,\dots,v_{i-1}+h_{i-1}+\varepsilon_iH_{i-1}^i,h_i,\dots,h_{n-1},\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n),\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n),$$

$$\sum_{j=0}^{n-1}\prod_{k=j+1}^{n}\varepsilon_k\frac{\partial h_n}{\partial x_j}f_j(x_0,\dots,x_{n-1},h_n(x_0,\dots,x_{n-1},\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n),\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)=f_n(x_0,\dots,x_{n-1},h_n(x_0,\dots,x_{n-1},\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n),\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n).$$

Функции H_i^j можно искать в виде асимптотических разложений

$$H_0^1(v_0,v_1,\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)=H_{00}^1(v_0,v_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n)+\varepsilon_1H_{01}^1(v_0,v_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n)+\varepsilon_1^2\dots,$$

$$H_i^j(y_0^{(j)},\dots,y_{j-1}^{(j)},v_j,\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)=H_{i0}^j(y_0^{(j)},\dots,y_{j-1}^{(j)},v_j,\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{j-1},\varepsilon_{j+1},\dots,\varepsilon_n)+$$

$+\varepsilon_j H_{i1}^j(y_0^{(j)},\dots,y_{j-1}^{(j)},v_j,\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{j-1},\varepsilon_{j+1},\dots,\varepsilon_n)+\varepsilon_j^2\dots, i=\overline{0,j-1}, j=\overline{2,n},$

из соответствующих уравнений

$$\varepsilon_1\frac{\partial H_0^1}{\partial v_0}F_0(v_0,\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)+\frac{\partial H_0^1}{\partial v_1}F_1(v_0,v_1,\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)=W_0^1(v_0,\dots,v_{n-2},\varepsilon_1 H_0^1,\dots,$$

$\varepsilon_{n-1}H_{n-2}^{n-1},\varepsilon_1\dots,\varepsilon_n)$, где

$W_0^1=f_0(v_0{+}\varepsilon_1 H_0^1,v_1{+}h_1(v_0{+}\varepsilon_1 H_0^1,\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n),h_2(v_0{+}\varepsilon_1 H_0^1{+}\varepsilon_1\varepsilon_2 H_0^2,v_1{+}h_1{+}\varepsilon_2 H_1^2,\varepsilon_1,$

$$\dots,\varepsilon_n),\dots,h_{n-1}(v_0+\sum_{j=1}^{n-1}\prod_{k=1}^{j}\varepsilon_k H_0^j,\dots,v_{n-2}+h_{n-2}+\varepsilon_{n-1}H_{n-2}^{n-1},\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n),h_n(v_0+$$

$+\varepsilon_1 H_0^1,v_1{+}h_1,h_2,\dots,h_{n-1},\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n),\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)-f_0(v_0,h_1(v_0,\varepsilon_1,\dots\varepsilon_n),h_2(v_0,h_1(v_0,$
$\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n),\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n),\dots,h_{n-1}(v_0,\dots,\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n),h_n(v_0,h_1,h_2,\dots,h_{n-1},\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n),$
$\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n),$

$$\sum_{m=0}^{j-1}\prod_{k=m+1}^{j}\varepsilon_k\frac{\partial H_i^j}{\partial y_m^{(j-1)}}f_m(v_0+\sum_{l=1}^{j-1}\prod_{k=1}^{l}\varepsilon_k H_0^l,v_1+h_1+\sum_{l=2}^{j-1}\prod_{k=2}^{l}\varepsilon_k H_1^l,\dots,v_{j-1}+h_{j-1},h_j,\dots,$$

$$h_{n-1},h_n(v_0+\sum_{l=1}^{j-1}\prod_{k=1}^{l}\varepsilon_k H_0^l,v_1+h_1+\sum_{l=2}^{j-1}\prod_{k=2}^{l}\varepsilon_k H_1^l,\dots,v_{j-1}+h_{j-1},h_j,\dots,h_{n-1},\varepsilon_1,\dots,$$

$$\varepsilon_n),\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)+\frac{\partial H_i^j}{\partial v_j}F_j(v_0,\dots,v_j,\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)=W_i^j(v_0,\dots,v_j,\varepsilon_1 H_0^1,\dots,\prod_{k=1}^{j}\varepsilon_k H_i^j,\varepsilon_1,$$

$\dots,\varepsilon_n)$, где

$$W_i^j=f_i(v_0+\sum_{l=1}^{j}\prod_{k=1}^{l}\varepsilon_k H_0^l,v_1+h_1+\sum_{l=2}^{j}\prod_{k=2}^{l}\varepsilon_k H_1^l,\dots,v_j+h_j,h_{j+1},\dots,h_{n-1},h_n(v_0+$$

$$+\sum_{l=1}^{j}\prod_{k=1}^{l}\varepsilon_k H_0^l,v_1+h_1+\sum_{l=2}^{j}\prod_{k=2}^{l}\varepsilon_k H_1^l,\dots,v_j+h_j,h_{j+1},\dots,h_{n-1},\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n),\varepsilon_1,\dots,$$

$$\varepsilon_n)-f_i(v_0+\sum_{l=1}^{j-1}\prod_{k=1}^{l}\varepsilon_k H_0^l,v_1+h_1+\sum_{l=2}^{j-1}\prod_{k=2}^{l}\varepsilon_k H_1^l,\dots,h_j,h_{j+1},\dots,h_{n-1},h_n(v_0+$$

$$+\sum_{l=1}^{j-1}\prod_{k=1}^{l}\varepsilon_k H_0^l,v_1+h_1+\sum_{l=2}^{j-1}\prod_{k=2}^{l}\varepsilon_k H_1^l,\dots,h_j,h_{j+1},\dots,h_{n-1},\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n),\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n).$$

2. Управляемость

Исследуем управляемость блочно-треугольной системы (1.2), которую перепишем в виде:

$$\dot{v_0}=F_0(v_0,\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)+[\tilde{B}_0^{0,0,\dots,0}(v_0)+\varepsilon_1\tilde{B}_0^{1,0,\dots,0}(v_0,\dots,v_n)+\varepsilon_2\tilde{B}_0^{0,1,\dots,0}(v_0,\dots,$$

$$v_n) + \ldots + \varepsilon_n \tilde{B}_0^{0,0,\ldots,1}(v_0, \ldots, v_n) + \ldots]u,$$

$$\prod_{k=1}^{i} \varepsilon_k \dot{v}_i = F_i(v_0, \ldots, v_i, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) + [\tilde{B}_i^{0,0,\ldots,0}(v_0, \ldots, v_i) + \varepsilon_1 \tilde{B}_i^{1,0,\ldots,0}(v_0, \ldots, v_n) +$$

$$+ \varepsilon_2 \tilde{B}_i^{0,1,\ldots,0}(v_0, \ldots, v_n) + \ldots + \varepsilon_n \tilde{B}_i^{0,0,\ldots,1}(v_0, \ldots, v_n) + \ldots]u, \ i = \overline{1, n-1},$$

$$\prod_{k=1}^{n} \varepsilon_k \dot{v_n} = F_n(v_0, \ldots, v_n, \varepsilon_1, \ldots, e_n) + [\tilde{B}_n^{0,0,\ldots,0}(v_0) + \varepsilon_1 \tilde{B}_n^{1,0,\ldots,0}(v_0, v_1) + \qquad (2.1)$$

$$+ \varepsilon_2 \tilde{B}_n^{0,1,\ldots,0}(v_0, v_1) + \ldots + \varepsilon_n \tilde{B}_n^{0,0,\ldots,1}(v_0, \ldots, v_{n-1}) + \ldots]u.$$

Линеаризуем эту систему [2], т.е. приведем ее к виду $\dot{v} = Av + Bu$. Элементы матриц

$$A = (a_{ij})\Big|_{v_k=0, k=\overline{0,n}, u=0}, i, j = \overline{0, n}, \ B = (b_i)\Big|_{v_k=0, k=\overline{0,n}, u=0},$$

имеют вид

$$a_{ij} = \frac{1}{\prod_{k=1}^{i} \varepsilon_k} \cdot \frac{\partial}{\partial v_j} \Big(F_i + [\tilde{B}_i^{0,0,\ldots,0} + \varepsilon_1 \tilde{B}_i^{1,0,\ldots,0} + \varepsilon_2 \tilde{B}_i^{0,1,\ldots,0} + \ldots + \varepsilon_n \tilde{B}_i^{0,0,\ldots,1} + \ldots]u \Big),$$

$$b_i = \frac{1}{\prod_{k=1}^{i} \varepsilon_k} [\tilde{B}_i^{0,0,\ldots,0} + \varepsilon_1 \tilde{B}_i^{1,0,\ldots,0} + \varepsilon_2 \tilde{B}_i^{0,1,\ldots,0} + \ldots + \varepsilon_n \tilde{B}_i^{0,0,\ldots,1} + \ldots].$$

Используя критерий Калмана, получаем, что, если линеаризованная система для (2.1) является вполне управляемой, то область нуль-управляемости системы (1.2) открыта в $\mathbf{R}^{n_0+n_1+\ldots+n_n}$. Следовательно, блочно-треугольная система (1.2) является локально вполне управляемой вблизи начала координат. Значит, исходная система (1.1) локально вполне управляема вблизи начала координат.

3. Пример

Рассмотрим задачу прецессионного движения силового гироскопического стабилизатора. Уравнения движения имеют вид [3]:

$$\frac{d}{dt}\Big[\Big(A_0 + 2B\cos^2\beta\Big)\frac{d\alpha}{dt}\Big] - 2H\cos\beta\frac{d\beta}{dt} - ki = -b_1\frac{d\alpha}{dt},$$

$$2B\Big[\frac{d^2\beta}{dt^2} + \Big(\frac{d\alpha}{dt}\Big)^2 \sin\beta\cos\beta\Big] + 2H\cos\beta\frac{d\alpha}{dt} = -b_2\frac{d\beta}{dt},$$

$$L\frac{dI}{dt} + RI = f(\beta),$$

$$l\frac{di}{dt} + ri + c\frac{d\alpha}{dt} = pI,$$

где α— угол поворота рамы гиростабилизатора вокруг оси стабилизации, β— угол поворота кожуха вокруг вертикальной оси, I— разность токов в обмотках возбуждения генератора Леонарда, i— ток в цепи якоря стабилизирующего мотора, A_0— момент инерции рамы гиростабилизатора относительно оси стабилизации, B— экваториальный момент гироскопа, H— кинетический момент гироскопа, L, l, R, r— коэффициенты самоиндукции и омическое сопротивление в соответствующих цепях, k, b_1, b_2— постоянные коэффициенты, pI— электродвижущая сила генератора

Леонарда, $c\frac{d\alpha}{dt}$— противоэлектродвижущая сила, развиваемая якорем стабилизирующего мотора при его вращении, $f(\beta)$— функция сеточного напряжения, которая имеет вид:

$$f(\beta)=\begin{cases} s\beta & \text{при } -\beta^*\leqslant\beta\leqslant\beta^*, s>0,\\ s\beta^*\mathrm{sign}\,\beta & \text{при } |\beta|>\beta^*, \beta^*>0.\end{cases}$$

Производя замену времени $t=T\tau$ и вводя следующие обозначения

$$\frac{A_0}{2B}+\cos^2\beta=a(\beta), \varepsilon=\frac{B}{TH}, \mu=\frac{L}{RT}, b=\frac{Lr}{lR}, i=i_0q_2, I=I_0q_1, \frac{T^2ki_0}{2B}=k_0,$$

$$\frac{cL}{lRTi_0}=C, \frac{pLI_0}{Ri_0l}=p_0, T\frac{d\alpha}{dt}=\frac{d\alpha}{d\tau}=y_1, T\frac{d\beta}{dt}=\frac{d\beta}{d\tau}=y_2, \varepsilon_1=\frac{\mu}{\varepsilon}, \bar b_1=\frac{b_1}{2H}, \bar b_2=\frac{b_2}{2H},$$

запишем систему в координатной форме

$$\begin{aligned}
\dot\alpha &= y_1,\\
\dot\beta &= y_2,\\
\varepsilon\dot{y_1} &= \frac{1}{a(\beta)}\Big(-\bar{b_1}y_1+\varepsilon y_1y_2\sin2\beta+y_2\cos\beta+\varepsilon k_0q_2\Big),\\
\varepsilon\dot{y_2} &= -\bar{b_2}y_2-\frac{\varepsilon}{2}y_1^2\sin2\beta-y_1\cos\beta,\\
\varepsilon\varepsilon_1\dot{q_1} &= -q_1+\frac{1}{RI_0}f(\beta),\\
\varepsilon\varepsilon_1\dot{q_2} &= -Cy_1+p_0q_1-bq_2,
\end{aligned}$$

где точка означает дифференцирование по τ. При помощи замены переменных

$$\alpha=v_0^1-\varepsilon\frac{\bar b_2a(v_0^2)v_1^1+v_1^2\cos v_0^2}{\bar b_1\bar b_2+\cos^2v_0^2}+\varepsilon^2\ldots,$$

$$\beta=v_0^2+\varepsilon\frac{v_1^1a(v_0^2)\cos v_0^2-\bar b_1v_1^2}{\bar b_1\bar b_2+\cos^2v_0^2}+\varepsilon^2\ldots,$$

$$y_1=v_1^1+\varepsilon\frac{k_0p_0\bar b_2a(v_0^2+\varepsilon H_{0(2)}^1)f(v_0^2+\varepsilon H_{0(2)}^1)}{\bar b_1\bar b_2+a(v_0^2+\varepsilon H_{0(2)}^1)\cos^2(v_0^2+\varepsilon H_{0(2)}^1)}-\varepsilon\varepsilon_1\frac{k_0(p_0v_2^1+v_2^2)}{ba(v_0^2+\varepsilon H_{0(2)}^1)}+\varepsilon^2\ldots,$$

$$y_2=v_1^2-\varepsilon\frac{k_0p_0a(v_0^2+\varepsilon H_{0(2)}^1)\cos(v_0^2+\varepsilon H_{0(2)}^1)f(v_0^2+\varepsilon H_{0(2)}^1)}{\bar b_1\bar b_2+a(v_0^2+\varepsilon H_{0(2)}^1)\cos^2(v_0^2+\varepsilon H_{0(2)}^1)}+\varepsilon^2\ldots,$$

$$q_1=v_2^1+\frac{1}{RI_0}f(\beta)-\varepsilon\varepsilon_1f'(\beta)y_2+\varepsilon^2\ldots,$$

$$q_2=v_2^2+\frac{1}{b}\Big(\frac{p_0}{RI_0}f(\beta)-Cy_1\Big)+\varepsilon_1\frac{C}{b^2a(\beta)}\Big(-\bar b_1y_1+y_2\cos\beta\Big)+$$

$$+\varepsilon\varepsilon_1\Big(-\frac{2p_0}{bRI_0}f'(\beta)y_2+\frac{C}{b^2a(\beta)}\Big[y_1y_2\sin2\beta+\frac{k_0}{b}\Big(\frac{p_0}{RI_0}f(\beta)-Cy_1\Big)\Big]\Big)+\varepsilon^2\ldots$$

получим блочно-треугольную систему:

$$\dot{v_0^1}=\varepsilon\frac{k_0p_0\bar b_2a(v_0^2)}{\bar b_1\bar b_2+a(v_0^2)\cos^2v_0^2}f(v_0^2)+\varepsilon^2\ldots,$$

$$\dot{v_0^2} = -\varepsilon \frac{k_0 p_0 a(v_0^2)\cos v_0^2}{\bar{b}_1\bar{b}_2 + a(v_0^2)\cos^2 v_0^2} f(v_0^2) + \varepsilon^2 \ldots,$$

$$\varepsilon\dot{v_1^1} = \frac{1}{a(v_0^2+\varepsilon H^1_{0(2)})}\Big[-\bar{b}_1 v_1^1 + v_1^2\cos(v_0^2+\varepsilon H^1_{0(2)}) + \varepsilon\Big(-\frac{k_0 C}{b}v_1^1 + v_1^1 v_1^2 \sin 2(v_0^2+\varepsilon H^1_{0(2)})\Big) +$$

$$+\varepsilon\varepsilon_1 \frac{Ck_0}{b^2 a(v_0^2+\varepsilon H^1_{0(2)})}\Big(-\bar{b}_1 v_1^1 + v_1^2\cos(v_0^2+\varepsilon H^1_{0(2)})\Big) -$$

$$-\varepsilon\varepsilon_1 \frac{v_1^1 k_0 p_0 \bar{b}_2 a^2(v_0^2+\varepsilon H^1_{0(2)}) f'(v_0^2+\varepsilon H^1_{0(2)})}{\bar{b}_1\bar{b}_2 + a(v_0^2+\varepsilon H^1_{0(2)})\cos^2(v_0^2+\varepsilon H^1_{0(2)})}\Big] +$$

$$+\varepsilon\varepsilon_1 \frac{v_1^1 k_0 p_0 \bar{b}_2 \sin 2(v_0^2+\varepsilon H^1_{0(2)})[\bar{b}_1\bar{b}_2 - a^2(v_0^2+\varepsilon H^1_{0(2)})]}{[\bar{b}_1\bar{b}_2 + a(v_0^2+\varepsilon H^1_{0(2)})\cos^2(v_0^2+\varepsilon H^1_{0(2)})]^2} f(v_0^2+\varepsilon H^1_{0(2)}) + \varepsilon^2 \ldots,$$

$$\varepsilon\dot{v_1^2} = -\bar{b}_2 v_1^2 - v_1^1\cos(v_0^2+\varepsilon H^1_{0(2)}) - \frac{1}{2}\varepsilon(v_1^1)^2 \sin 2(v_0^2+\varepsilon H^1_{0(2)}) +$$

$$+\varepsilon\varepsilon_1 \frac{v_1^2 k_0 p_0 a(v_0^2+\varepsilon H^1_{0(2)})\cos(v_0^2+\varepsilon H^1_{0(2)}) f'(v_0^2+\varepsilon H^1_{0(2)})}{\bar{b}_1\bar{b}_2 + a(v_0^2+\varepsilon H^1_{0(2)})\cos(v_0^2+\varepsilon H^1_{0(2)})} - \varepsilon\varepsilon_1 v_1^2 k_0 p_0 \sin(v_0^2+\varepsilon H^1_{0(2)})\cdot$$

$$\cdot\frac{\bar{b}_1\bar{b}_2[2\cos^2(v_0^2+\varepsilon H^1_{0(2)}) + a(v_0^2+\varepsilon H^1_{0(2)})] - a^2(v_0^2+\varepsilon H^1_{0(2)})\cos^2(v_0^2+\varepsilon H^1_{0(2)})}{[\bar{b}_1\bar{b}_2 + a(v_0^2+\varepsilon H^1_{0(2)})\cos^2(v_0^2+\varepsilon H^1_{0(2)})]^2}\cdot$$

$$\cdot f(v_0^2+\varepsilon H_{0(2)}) + \varepsilon^2 \ldots,$$

$$\varepsilon\varepsilon_1\dot{v_2^1} = -v_2^1 + \varepsilon^2 \ldots,$$

$$\varepsilon\varepsilon_1\dot{v_2^2} = p_0 v_2^1 - b v_2^2 + \varepsilon\varepsilon_1 \frac{Ck_0}{ba(v_0^2+\varepsilon H^1_{0(2)} + \varepsilon\varepsilon_1 H^2_{0(2)})} v_2^2 + \varepsilon^2 \ldots$$

Считая, что $f(\cdot)$ — управление, получаем, что система не является управляемой вблизи начала координат, но она является стабилизируемой по части переменных.

Литература

[1] Sobolev V.A. Integral manifolds and some optimal control problems//Periodica Polytechnica, Mechanical Engineering. V. 31, No. 1, Budapest, 1987. P. 94–97.

[2] Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Мир, 1972. 574 с.

[3] Стрыгин В.В.,Соболев В.А. Разделение движений методом интегральных многообразий. М.: Наука, 1986. 256 с.

DECOMPOSITION OF MULTIRATE MODELS OF CONTROLLABLE SYSTEMS[3]

M.M. Semenova[4]

A method of integral manifold is applied to study of multitempo nonlinear systems. The use of this method permits us to solve a problem of decomposition of multirate controllable systems. Local controllability of these systems is investigated. The application of the method is illustrated on example.

Поступила в редакцию $15/X/2002$;
в окончательном варианте — $29/X/2002$.

[3]Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. V.A. Sobolev.

[4]Semenova Marina Michailovna, Dept. of Higher Mathematics and Economic Mathematical Methods, Samara State Economic Academy, Samara, 443090, Russia.