МАТЕМАТИКА

УДК 517.982.27

$\mathcal{K}$-ЗАМКНУТЫЕ ПОДПАРЫ И ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ ПОПОЛНЕНИЯ

© 2002 С.В. Асташкин, Р.Ф. Узбеков[1]

Пусть (X_0, X_1) — вложенная банахова пара, то есть $X_1 \subset X_0$. Изучаются подпары вида (X_0, Y_1), где Y_1 — подпространство коразмерности 1 пространства X_1.

На основе аналога теоремы Хана-Банаха о продолжении линейного функционала доказан критерий $\mathcal{K}$-замкнутости подпары указанного вида. В связи с этим введено понятие (K^*)-свойства банахова пространства и показано, что этим свойством обладают "весовые" L_1-пространства.

Напомним, что два банаховых пространства X_0 и X_1 образуют банахову пару, если X_0 и X_1 линейно и непрерывно вложены в некоторое отделимое линейное топологическое пространство.

Определение 1. Пусть (X_0, X_1) — банахова пара. Тогда для любого $x \in X_0+X_1$ и $t > 0$ определим $\mathcal{K}$-функционал Петре

$$\mathcal{K}(t, x; X_0, X_1) = \inf\left\{\|x_0\|_{X_0} + t\|x_1\|_{X_1} : x = x_0 + x_1, x_i \in X_i, i = 0, 1\right\}.$$

В дальнейшем речь пойдет о пространствах вещественного $\mathcal{K}$-метода, которые получаются наложением условий на функцию $t \longmapsto \mathcal{K}(t, x; X_0, X_1)$.

Определение 2. Пусть $\Phi_{\theta,q}$ — функционал, определенный на неотрицательных функциях $\phi(t)$ следующим образом:

$$\Phi_{\theta,q}(\phi) = \left(\int_0^\infty \left(t^{-\theta}\phi(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}, \quad 1 \leqslant q < \infty, 0 < \theta < 1,$$

$$\Phi_{\theta,\infty}(\phi) = \sup_{t>0} \left(t^{-\theta}\phi(t)\right).$$

Под пространством $(X_0, X_1)_{\theta,q}$ будем понимать множество всех $x \in X_0 + X_1$, для которых

$$\|x\|_{\theta,q} = \Phi_{\theta,q}\left(\mathcal{K}(t, x; X_0, X_1)\right) < \infty.$$

Для всех $1 \leqslant q \leqslant \infty,\ 0 < \theta < 1$ пространство $(X_0, X_1)_{\theta,q}$ будет интерполяционным относительно пары (X_0, X_1), то есть любой линейный оператор T, ограниченный в X_0 и X_1, одновременно ограничен также в $(X_0, X_1)_{\theta,q}$ и

$$\|T\|_{(X_0,X_1)_{\theta,q}\to(X_0,X_1)_{\theta,q}} \leqslant \max_{i=0,1} \|T\|_{X_i\to X_i}.$$

[1]Асташкин Сергей Владимирович (`astashkn@ssu.samara.ru`), Узбеков Роман Фатихович (`uzbekov_roman@mail.ru`), кафедра функционального анализа и теории функций Самарского государственного университета, 443011, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

Важной проблемой теории интерполяции операторов является интерполяция подпространств: когда интерполяционное пространство, построенное вещественным методом по паре подпространств исходной пары, замкнуто в пространстве, построенном вещественным методом по самой паре пространств? Известно немало примеров, когда последнее не выполняется [1], [2, с. 410–419], [3], [4, с. 137, 589].

Будем предполагать далее, что Y_0 и Y_1 — замкнутые подпространства в X_0 и X_1 соответственно.

Определение 3. Банахова пара (Y_0, Y_1) называется $\mathcal{K}$-замкнутой подпарой пары (X_0, X_1), если существует константа $C > 0$ такая,что

$$\mathcal{K}(t, x; X_0, X_1) \leqslant \mathcal{K}(t, x; Y_0, Y_1) \leqslant C\mathcal{K}(t, x; X_0, X_1) \tag{1}$$

для всех $x \in Y_0 + Y_1$ и $t > 0$.

Если (Y_0, Y_1) — $\mathcal{K}$-замкнутая подпара (X_0, X_1) , то $(Y_0, Y_1)_{\theta,q}$ — замкнутое подпространство пространства $(X_0, X_1)_{\theta,q}$ для всех θ и q. Покажем, что для $\mathcal{K}$-замкнутых подпар и только для них справедлив аналог теоремы Хана-Банаха.

Теорема 1. Предположим, что $Y_0 \cap Y_1$ всюду плотно в Y_0 и Y_1, а $X_0 \cap X_1$ в X_0 и X_1. Следующие условия эквивалентны:
1) (Y_0, Y_1) — $\mathcal{K}$-замкнутая подпара пары (X_0, X_1);
2) любой функционал $g \in Y_0^* \cap Y_1^*$ можно продолжить до функционала $f \in X_0^* \cap X_1^*$ такого, что

$$\|f\|_{X_i^*} \leqslant C\|g\|_{Y_i^*} \ \ (i = 0, 1), \tag{2}$$

где $C > 0$ не зависит от g.

Доказательство. Пусть $t > 0$, Y — банахово пространство, тогда под пространством tY будем понимать линейное пространство Y с нормой $\|x\|_{tY} = t\|x\|_Y$. Заметим, что для любой банаховой пары (A_0, A_1) и $t > 0$ $\mathcal{K}(t, x; A_0, A_1)$ является нормой в $A_0 + tA_1$. Кроме того, если $A_0 \cap A_1$ всюду плотно в A_0 и A_1, то выполняется изометрическое равенство [5, с. 74]:

$$(A_0 + tA_1)^* = A_0^* \cap \frac{1}{t}A_1^*. \tag{3}$$

Поэтому для любого $a \in A_0 + A_1$

$$\mathcal{K}(t, a; A_0, A_1) = \sup_{a^* \in A_0^* \cap A_1^*, a^* \neq 0} \frac{|a^*(a)|}{\max(\|a^*\|_{A_0^*}, \frac{1}{t}\|a^*\|_{A_1^*})}. \tag{4}$$

Предположим, что выполнено условие 1). Это означает, что при некотором $C > 0$ справедливо неравенство (1) для всех $x \in Y_0 + Y_1$ и $t > 0$. Пусть $g \in Y_0^* \cap Y_1^*$. Выберем $t > 0$ так, что

$$\|g\|_{Y_0^*} = \frac{1}{t}\|g\|_{Y_1^*} = \alpha. \tag{5}$$

Из (3) следует, что $\alpha = \|g\|_{(Y_0+tY_1)^*}$. Поэтому, ввиду (1), g —линейный ограниченный функционал на подпространстве $Y_0 + tY_1$ пространства $X_0 + tX_1$ с нормой, не превосходящей $C\alpha$. Пользуясь теоремой Хана-Банаха, продолжим его на $X_0 + tX_1$ с сохранением нормы до функционала f. Следовательно,

$$\|f\|_{(X_0+tX_1)^*} = \max(\|f\|_{X_0^*}, \frac{1}{t}\|f\|_{X_1^*}) \leqslant C\alpha,$$

откуда ввиду (5) выполняется (2).

Докажем противоположное утверждение. Пусть $y \in Y_0 + Y_1$, $t > 0$ и $\epsilon > 0$. Применяя (4), найдем $g \in Y_0^* \cap Y_1^*$ такой, что

$$\mathcal{K}(t, y; Y_0, Y_1) \leqslant \frac{|g(y)|}{\max(\|g\|_{Y_0^*}, t\|g\|_{Y_1^*})} + \epsilon.$$

По условию существует продолжение $f \in X_0^* \cap X_1^*$, для которого выполнено (2). Поэтому из предыдущего неравенства и соотношения (4) следует:

$$\mathcal{K}(t, y; Y_0, Y_1) \leqslant C \frac{|f(y)|}{\max(\|f\|_{X_0^*}, \frac{1}{t}\|f\|_{X_1^*})} + \epsilon \leqslant C\mathcal{K}(t, y; X_0, X_1) + \epsilon\,.$$

Отсюда ввиду произвольности $\epsilon > 0$ получаем правое неравенство в соотношении (1). Поскольку левое неравенство очевидно, то теорема 1 доказана.

Замечание. Результат, близкий к теореме 1, был ранее получен Я. Петре [6].

Покажем, что в одном частном случае задача о $\mathcal{K}$-замкнутых подпарах сводится к вопросу об относительных пополнениях.

Определение 4. Пусть $X_1 \subset X_0$. Относительным пополнением пространства X_1 относительно пространства X_0 называется банахово пространство $\tilde{X}_1^{X_0}$, состоящее из всех $x \in X_0$ таких, что существует последовательность $\{x_n\} \subset X_1$, для которой выполнено:

$$x_n \longrightarrow x \;\text{ в }\; X_0 \;\text{ и }\; \|x_n\|_{X_1} \leqslant R \quad \text{для некоторого } \; R > 0.$$

При этом норма $\|x\|_{\tilde{X}_1^{X_0}}$ полагается равной инфимуму всех таких R [7, с. 12–16].

Теорема 2. Пусть $X_1 \subset X_0$ и Y_1 — замкнутое подпространство X_1, всюду плотное в X_0. Тогда (X_0, Y_1) — $\mathcal{K}$-замкнутая подпара (X_0, X_1) тогда и только тогда, когда $X_1 \subset \tilde{Y}_1^{X_0}$ (вложение непрерывно).

Доказательство. Предположим, что $X_1 \subset \tilde{Y}_1^{X_0}$. Ввиду теоремы 1 достаточно показать, что при некотором $C > 0$

$$\|f\|_{X_1^*} \leqslant C\|f\|_{Y_1^*} \tag{6}$$

для всех $f \in X_0^*$. По определению относительного пополнения для каждого $x \in X_1$ найдется последовательность $\{x_n\} \in Y_1$ такая, что

$$\|x_n\|_{Y_1} = \|x\|_{\tilde{Y}_1^{X_0}} \;\; (n = 1, 2 \ldots) \;\text{ и }\; x_n \longrightarrow x \;\text{ в }\; X_0.$$

Так как $f \in X_0^*$, то $f(x_n) \to f(x)$ при $n \to \infty$. Следовательно, ввиду условия

$$|f(x)| \leqslant \sup_n |f(x_n)| \leqslant \|f\|_{Y_1^*} \sup_n \|x_n\|_{Y_1} = \|f\|_{Y_1^*}\|x\|_{\tilde{Y}_1^{X_0}} \leqslant C\|f\|_{Y_1^*}\|x\|_{X_1},$$

откуда следует неравенство (6).

Докажем обратное утверждение. Если (X_0, Y_1) — $\mathcal{K}$-замкнутая подпара пары (X_0, X_1), то по теореме 1 выполнено (6). То есть при фиксированном $x \in X_1$

$$|f(x)| \leqslant C\|f\|_{Y_1^*}\|x\|_{X_1}$$

для всех $f \in X_0^*$. Это означает, что функционал $x(f) = f(x)$ непрерывен на X_0^* с нормой $\|f\|_{Y_1^*}$, причем норма функционала не превосходит $C\|x\|_{X_1}$. Но пространство $\tilde{Y}_1^{X_0}$ как раз и состоит из всех таких $x \in X_0$ и, кроме того [7, с.17],

$$\|x\|_{\tilde{Y}_1^{X_0}} = \sup_{f \in X_0^*, f \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|f\|_{Y_1^*}}.$$

Итак, $X_1 \subset \tilde{Y}_1^{X_0}$ и $\|x\|_{\tilde{Y}_1^{X_0}} \leqslant C\|x\|_{X_1}$ $(x \in X_1)$. Теорема 2 доказана.

Пусть $X_1 \subset X_0$, X_1 всюду плотно в X_0. Мы будем рассматривать подпары пары (X_0, X_1) вида (X_0, Y_1), где Y_1 — подпространство пространства X_1 коразмерности 1 (иначе $Y_1 = \mathrm{Ker}\ f,\ f \in X_1^*$). Покажем, что всегда существует $f \in X_1^*$, для которого соответствующая подпара (X_0, Y_1) не $\mathcal{K}$-замкнута в (X_0, X_1). Действительно, пусть $f \in X_0^*$, $f \neq 0$. Поскольку $X_1 \subset X_0$, то $f \in X_1^*$. Кроме того, существует $x \in X_1 \setminus Y_1$. Если предположить, что $x \in \tilde{Y}_1^{X_0}$, то для некоторой последовательности $\{x_n\} \subset Y_1$ $x_n \to x$ в X_0. Но тогда $f(x_n) \to f(x)$ (при $n \to \infty$). Значит, $f(x) = 0$, что противоречит выбору x. Таким образом, $X_1 \not\subset \tilde{Y}_1^{X_0}$, и значит, ввиду теоремы 2, подпара (X_0, Y_1) не $\mathcal{K}$-замкнута в (X_0, X_1).

Последнее обстоятельство мотивирует введение следующего определения.

Определение 5. Будем говорить, что банахово пространство X обладает (K^*)-свойством, если для любого $f \in X^*$ существует банахово пространство Y, зависящее от f, такое, что
1) $X \subset Y$;
2) $X_f = \mathrm{Ker}\ f$ всюду плотно в Y;
3) $X \subset \tilde{X}_f^Y$.

Заметим, что рефлексивные пространства (K^*)-свойством не обладают. Это следует из того, что произвольное подпространство рефлексивного пространства также рефлексивно и поэтому полно относительно любого содержащего его банахова пространства [7, с.18–19].

Покажем, что этим свойством обладают "весовые"L_1-пространства. Если $f(t)$ — положительная суммируемая функция на [0,1], то пространство $L_1(f)$ состоит из всех измеримых на [0,1] функций $x(t)$ таких, что $\|x\|_{L_1(f)} = \int\limits_0^1 |x(t)|f(t)dt < \infty$.

Теорема 3. Пространство $L_1(f)$ обладает (K^*)-свойством.

Доказательство. Ввиду определения достаточно доказать следующее утверждение: для любой функции $y \in L_\infty(\frac{1}{f})$, $y \neq 0$ существует функция $\psi(t) \geqslant 0$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, такая, что пополнение подпространства

$$H_y = \{x \in L_1(f) : \int_0^1 x(t)y(t)dt = 0\}$$

пространства $L_1(f)$ относительно пространства $L_1(\psi)$ содержит $L_1(f)$, то есть

$$L_1(f) \subset \tilde{H}_y^{L_1(\psi)}. \tag{7}$$

Сначала рассмотрим частный случай: $y(t) = f(t)$. Покажем, что тогда можно взять $\psi(t) = tf(t)$. Достаточно проверить, что

$$x(t) = \frac{1}{f(t)} \in \tilde{H}_f^{L_1(tf(t))}.$$

Рассмотрим последовательность

$$x_n(t) = -(n-1)\frac{1}{f(t)}\chi_{[0;\frac{1}{n})}(t) + \frac{1}{f(t)}\chi_{[\frac{1}{n};1]}(t), \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Тогда $x_n(t) \in H_f$,

$$\|x_n\|_{L_1(f)} = \int_0^1 |x_n(t)|f(t)dt = \frac{2(n-1)}{n} \leqslant 2 \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

и

$$\|x_n - x\|_{L_1(\psi)} = \int_0^1 |x_n(t) - x(t)|tf(t)dt = n\int_0^{\frac{1}{n}} tdt = \frac{1}{2n} \to 0 \text{ (при } n \to \infty).$$

Рассмотрим теперь общий случай. Найдем такую "весовую" функцию $\psi(t)$, что

$$\frac{y(t)}{f(t)} \in \tilde{H}_y^{L_1(\psi)}. \tag{8}$$

Функция $\frac{y(t)}{f(t)} \in L_1(f) \setminus H_y$. В самом деле, $\|\frac{y}{f}\|_{L_1(f)} = \int\limits_0^1 |y(t)|dt \leqslant \|y\|_{L_\infty(\frac{1}{f})}\|f\|_1 < \infty$ и $\int\limits_0^1 \frac{y(t)}{f(t)}y(t)dt \neq 0$.

Если

$$F = \{t \in [0,1] : |y(t)| \geqslant \frac{1}{2}\|y\|_{L_\infty(\frac{1}{f})}f(t)\},$$

то $m(F) > 0$. Определим множества

$$F_+ = \{t \in F : y(t) \geqslant \frac{1}{2}\|y\|_{L_\infty(\frac{1}{f})}f(t)\} \text{ и } F_- = \{t \in F : y(t) \leqslant -\frac{1}{2}\|y\|_{L_\infty(\frac{1}{f})}f(t)\}.$$

Поскольку $m(F) = m(F_+) + m(F_-)$, то хотя бы одно из множеств F_+ или F_- имеет положительную меру. Пусть, например, $m(F_+) > 0$. Определим последовательность интервалов

$$\delta_n(s) = (s - \frac{1}{n}, s + \frac{1}{n}) \ (n = 1, 2, \ldots), \ s \in [0,1].$$

По теореме Лебега [8, с.276] множества

$$F_1 = \{s \in [0,1] : \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2} \int\limits_{\delta_n(s)} y(t)dt = y(s)\} \text{ и}$$

$$F_2 = \{s \in [0,1] : \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2} \int\limits_{\delta_n(s)} f(t)dt = f(s)\}$$

имеют меру, равную 1. Поэтому $G = F_+ \cap F_1 \cap F_2$ является множеством положительной меры. Если $t_0 \in G$, то существует n_0 такой, что при $k \geqslant n_0$

$$\|y\|_{L_\infty(\frac{1}{f})}f(t_0) \leqslant 2k \int\limits_{\delta_k(t_0)} y(t)dt \text{ и } k \int\limits_{\delta_k(t_0)} f(t)dt \leqslant 4f(t_0). \tag{9}$$

Определим последовательность множеств и функций

$$e_n = \delta_{n+n_0}(t_0) \ (n = 1, 2, \ldots), \quad x_n(t) = c_n\chi_{e_n}(t) + \frac{y(t)}{f(t)}\chi_{[0,1]\setminus e_n},$$

где $c_n = -\int\limits_{[0,1]\setminus e_n} \frac{y^2(t)}{f(t)}dt \left(\int\limits_{e_n} y(t)dt\right)^{-1}$.

Тогда $x_n(t) \in H_y \ (n = 1, 2, \ldots)$, а ввиду (9) и неравенства Гельдера получаем

$$\|x_n\|_{L_1(f)} = |c_n|\int\limits_{e_n} f(t)dt + \int\limits_{[0,1]\setminus e_n} |y(t)|dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4}{f(t_0)\|y\|_{L_\infty(\frac{1}{f})}} 2f(t_0)\|y\|^2_{L_\infty(\frac{1}{f})}\|f\|_1 + \|y\|_{L_\infty(\frac{1}{f})}\|f\|_1 = 9\|y\|_{L_\infty(\frac{1}{f})}\|f\|_1.$$

Введем "весовую" функцию

$$\psi(t) = f(t)\chi_{[0,1]\setminus e}(t) + f(t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\chi_{e_n\setminus e_{n+1}}(t), \text{где } \ e = \cup_{n=1}^{\infty} e_n.$$

Так как $0 \leqslant \psi(t) \leqslant f(t)$, то $L_1(f) \subset L_1(\psi)$. Кроме того, ввиду (9) и неравенства Гельдера

$$\|x_n - \frac{y}{f}\|_{L_1(\psi)} = \int\limits_{e_n} |c_n - \frac{y(t)}{f(t)}|\psi(t)dt \leqslant \frac{\int\limits_{[0,1]\setminus e_n}\frac{y^2(t)}{f(t)}dt}{|\int\limits_{e_n} y(t)dt|}\frac{1}{n}\int\limits_{e_n} f(t)dt + \frac{1}{n}\int\limits_{e_n}|y(t)|dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n}\frac{8}{\|y\|_{L_\infty(\frac{1}{f})}}\|y\|^2_{L_\infty(\frac{1}{f})}\|f\|_1 + \frac{1}{n}\|y\|_{L_\infty(\frac{1}{f})}\|f\|_1 = \frac{9}{n}\|y\|_{L_\infty(\frac{1}{f})}\|f\|_1,$$

то есть $\|x_n - \frac{y}{f}\|_{L_1(\psi)} \to 0$ (при $n \to \infty$). Тем самым (8), а значит, и вложение (7) доказано.

Осталось показать, что H_y всюду плотно в $L_1(\psi)$. Если $x \in L_1(\psi)$, то для любого $m \in \mathbb{N}$ положим $x'_m(t) = x(t)\chi_{[0,1]\setminus e_m}(t)$, тогда $x'_m(t) \in L_1(f)$. Действительно, для $t \in [0,1]\setminus e_m \quad \psi(t) > \frac{1}{m}f(t)$ и

$$\|x'_m\|_{L_1(f)} = \int\limits_{[0,1]\setminus e_m} |x(t)|f(t)dt \leqslant m \int\limits_{[0,1]\setminus e_m} |x(t)|\psi(t)dt \leqslant m\|x'_m\|_{L_1(\psi)} \leqslant$$

$$\leqslant m\|x\|_{L_1(\psi)} < \infty.$$

Кроме того, в силу абсолютной непрерывности интеграла имеем

$$\|x - x'_m\|_{L_1(\psi)} = \int\limits_{e_m} |x(t)|\psi(t)dt \to 0 \quad (m \to \infty),$$

так как $x \in L_1(\psi)$ и $m(e_m) \to 0$ $(m \to \infty)$. Значит, для любого $\epsilon > 0$ существует $x_1 \in L_1(f)$ такая, что $\|x - x_1\|_{L_1(\psi)} \leqslant \frac{\epsilon}{2}$. Далее, ввиду вложения (6), найдется $x_2 \in H_y$ такая, что $\|x_2 - x_1\|_{L_1(\psi)} \leqslant \frac{\epsilon}{2}$. Следовательно, $\|x - x_2\|_{L_1(\psi)} \leqslant \epsilon$, и теорема доказана.

Из теорем 2 и 3 получаем

Следствие. Для любого $x^* \in (L_1(f))^*$ существует функция $\psi(t) \geqslant 0$ такая, что пара $(L_1(\psi), H_{x^*})$ $\mathcal{K}$-замкнута в паре $(L_1(\psi), L_1(f))$, где

$$H_{x^*} = \{x \in L_1(f) : x^*(x) = 0\}.$$

Вопрос о $\mathcal{K}$-замкнутости симметричных пространств Лоренца $\Lambda(\phi)$ с нормой $\|x\|_{\Lambda(\phi)} = \int_0^1 x^*(t)d\phi(t)$ ($\phi(t)$ — возрастающая вогнутая функция на $[0,1]$, $\phi(0) = 0$, $x^*(t)$ — невозрастающая перестановка функции $|x(t)|$) остается открытым. В определенном смысле эти пространства близки к "весовым" L_1-пространствам. Тем не менее, следующее утверждение приводит к мысли о том, что пространство Лоренца $\Lambda(\phi)$ обладает (K^*)-свойством тогда и только тогда, когда оно изоморфно пространству L_1, то есть

$$\lim_{t\to 0+}\frac{\phi(t)}{t} < \infty.$$

Определение 6. Банахово пространство Y называется идеальным банаховым пространством, если из того, что $|x(t)| \leqslant |y(t)|$ почти всюду и $y \in Y$, следует выполнение условий $x \in X$ и $\|x\|_X \leqslant \|y\|_X$.

Предложение. Пусть $\phi(t)$ — вогнутая возрастающая функция такая, что

$$\lim_{t\to 0+} \frac{\phi(t)}{t} = \infty.$$

Если

$$H_1 = \{x(t) \in \Lambda(\phi) : \int\limits_0^1 x(t)dt = 0\},$$

то для любого банахова идеального пространства Y такого, что $\Lambda(\phi) \subset Y$,

$$1 \notin \tilde{H}_1^Y.$$

Доказательство. Предположим, что утверждение теоремы неверно, то есть существует идеальное банахово пространство Y такое, что $\Lambda(\phi) \subset Y$ и $\bar{x}(t) = 1 \in \tilde{H}_1^Y$. По определению относительного пополнения найдется последовательность

$$\{y_n\} \in \Lambda(\phi),\ \ \|y_n\|_{\Lambda(\phi)} \leqslant C,\ \ y_n \in H_1 (n = 1, 2, \dots) \text{ и } \ y_n \to \bar{x} \text{ в } \ Y \ (\text{при } \ n \to \infty).$$

Отсюда следует, что последовательность $\{y_n\}$ сходится к $\bar{x}$ по мере на $[0, 1]$ [9, с.139]. Следовательно, по теореме Ф. Рисса [8, с.110] существует подпоследовательность $\{z_k\} \subset \{y_k\}$, сходящаяся к функции $\bar{x}(t)$ почти всюду на [0,1]. Согласно теореме Д.Ф. Егорова [8, с. 111], для любого $\delta > 0$ существует такое измеримое множество $E_\delta \subset [0, 1]$, что

1) $m(E_\delta) = 1 - \delta$,

2) на множестве E_δ последовательность $\{z_k\}$ сходится равномерно к $\bar{x}(t)$.

Из условия 2) получаем, что при $k \to \infty$

$$\int\limits_{E_\delta} z_k(t)dt \to \int\limits_{E_\delta} \bar{x}(t)dt = m(E_\delta) = 1 - \delta.$$

Поэтому, так как $z_k(t) \in H_1$ $(k = 1, 2 \dots)$,

$$\int\limits_{[0,1]\setminus E_\delta} z_k(t)dt = -\int\limits_{E_\delta} z_k(t)dt \to -m(E_\delta) = \delta - 1,$$

и, значит, при $k \geqslant k_\delta$ [7, с.89]

$$\int\limits_0^\delta z_k^*(t)dt \geqslant \int\limits_{[0,1]\setminus E_\delta} |z_k(t)|dt \geqslant \frac{1-\delta}{2}. \tag{10}$$

По условию для любого $A > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $\phi(t) \geqslant At$ для $0 < t \leqslant \delta$. Тогда, применяя (10) при этом $\delta > 0$ и $k \geqslant k_\delta$, получим:

$$\|z_k\|_{\Lambda(\phi)} \geqslant \int\limits_0^\delta z_k^*(t)d\phi(t) \geqslant A\int\limits_0^\delta z_k^*(t)dt \geqslant A\frac{1-\delta}{2}.$$

Тем самым последовательность $\{y_n\}$ неограничена по норме $\Lambda(\phi)$, что противоречит предположению. Предложение доказано.

Литература

[1] Triebel H. Allgemeine Legendresche Differential operatoren. Ann. Scuola Norm. Pisa 24 (1970).

[2] Wallsten R. Remarks on interpolation of subspaces. Lecture Notes in Math., 1302 (1988).

[3] Lofstrom J. Interpolation of subspaces. Preprint. University of Goteborg, 1997. (http://www.math.chalmers.se/ jorgen).

[4] Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.

[5] Берг Й., Лефстрем Й. Интерполяционные пространства. Введение. М.: Мир, 1980. 261 с.

[6] Peetre J. Banach couples. Vol. 1. Elementary theory. Technical report. Lund, 1971.

[7] Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М. Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978. 400 с.

[8] Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. СПб: Лань, 1999. 560 с.

[9] Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 741 с.

ON $\mathcal{K}$-CLOSED SUBCOUPLES AND RELATIVE COMPLETIONS

© 2002 S.V. Astashkin, R. Uzbekov[2]

Let (X_0, X_1) be a Banach couple such that $X_1 \subset X_0$. Subcouples of the form (X_0, Y_1) with a subspace Y_1 of codimension 1 of the space X are considered.

By an analog of the Hahn-Banach theorem about extending of linear functionals, we find the criterion of (X_0, Y_1) being a $\mathcal{K}$-closed subcouple of the couple (X_0, X_1). A new concept of (K^*)-property of a Banach space is introduced. We prove that arbitrary "weighted" L_1-space has this property.

Поступила в редакцию 24/X/2002.

[2]Astashkin Sergey Vladimirovich (astashkn@ssu.samara.ru), Uzbekov Roman (uzbekov_roman@mail.ru), Dept. of Functional Analysis and Theory of Functions, Samara State University, Samara, 443011, Russia.