УДК 539.12

МОДЕЛЬ МАССИВНЫХ ИЗОСКАЛЯРНЫХ МЕЗОНОВ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ СПИНОМ[1]

© 2002 С.В. Талалов[2]

Рассмотрена протяженная релятивистская система, для которой зависимость спина s от квадрата массы M^2 — "траектория Редже" — нелинейна при малых s и M и линейна асимптотически. Наклон асимптотик при этом различен и определяется состоянием внутренних (релятивистски инвариантных) степеней свободы, которым здесь соответствует некоторое безмассовое бозонное поле в "ящике". Обсуждается возможность моделирования в рамках данной теории некоторых изоскалярных состояний, в том числе и экзотических. Указанная система построена в рамках общего подхода, предложенного автором ранее.

При построении гамильтоновой формулировки классических полевых теорий стандартной является ситуация, когда канонические импульсы определяются исходя из заданного (лагранжева) действия. Между тем такой подход говорит лишь о существовании указанной формулировки, но никак не о ее единственности. Действительно, гамильтонов формализм может рассматриваться как первичная структура — безотносительно тому, имеется у теории лагранжева формулировка или нет. Этот факт не раз отмечался, например, Дираком [1], а также Березиным [2]. В этой связи возникает вопрос о существовании неэквивалентных гамильтоновых описаний той или иной динамической системы. Данный вопрос представляет интерес, например, в связи с задачей квантования: разные гамильтоновы формулировки приводят к различным, вообще говоря, квантовым версиям одной и той же динамики.

В предыдущих работах автора [3, 4] была построена теория, позволяющая описывать эволюцию открытой $4D$ струны со спиновыми степенями свободы в терминах неканонического (т. е. не связанного в указанном выше смысле со струнным действием) гамильтонова формализма. Фактически была определена некоторая иная гамильтонова динамическая система ("Протяженная частица") и установлена ее связь с конкретной моделью струны в четырехмерном пространстве-времени. Обобщающая указанные работы формулировка утверждения о связи теорий содержится, например, в статье [5]. Здесь мы отметим лишь неэквивалентность (в смысле отсутствия канонического преобразования) фазовых пространств $\mathcal{H}^\star$ и $\mathcal{H}$ — указанной динамической системы и струны — как пуассоновых многообразий. Имеется лишь взаимно-однозначное сохраняющее динамику соответствие

$$\mathcal{H} \supset \mathbf{V} \leftrightarrow \mathbf{W} \subset \mathcal{H}^\star . \tag{1}$$

[1] Представлена доктором физико-математических наук профессором В.А. Салеевым.

[2] Талалов Сергей Владимирович, кафедра общей и теоретической физики Тольяттинского государственного университета, 445859, Тольятти, б-р Королева, 13.

Здесь множество $\mathbf{V} \subset \mathcal{H}$ является поверхностью (бесконечного) набора связей первого рода, для каждой из которых, кроме одной, выбрано специальное калибровочное условие. Данные условия, заметим, инвариантны относительно масштабных и Пуанкаре- преобразований пространства-времени и обобщают известную в теории струн калибровку светового конуса. Множество $\overline{\mathbf{W}}$, которое является замыканием множества $\mathbf{W}$, есть поверхность конечного числа связей первого рода в пространстве $\mathcal{H}^\star$. Напомним, что фундаментальные координаты пространства $\mathcal{H}^\star$ — это переменные P_μ, $M_{\mu\nu}$, имеющие смысл вектора энергии-импульса и тензора момента соответственно, а также функции $f(\xi)$, $j_a(\xi)$ $(a = 0, \ldots, 3)$, являющиеся Пуанкаре-скалярами. Среди указанных связей в пространстве $\mathcal{H}^\star$ основную роль играет равенство вида

$$\Phi_1[P^2, S^2; f(\xi), j_a(\xi)] = 0\,,$$

где P^2 и S^2 — операторы Казимира группы Пуанкаре; явный вид функционала Φ_1 однозначно фиксирован струнным действием и требованием существования соответствия (1). Координаты пространства $\mathcal{H}$ — это поля X_μ, $\dot{X}_\mu$, Ψ, $\overline{\Psi}$, входящие в струнное действие. В соответствии с построенной теорией, указанные поля являются сложными функционалами координат пространства $\mathcal{H}^\star$ на поверхности связей. Другой важной особенностью развитого гамильтонова формализма является тот факт, что алгебра $\mathcal{A}_{cl}$ скобок Пуассона фундаментальных координат пространства $\mathcal{H}^\star$ не является алгеброй Гейзенберга-Вейля W_∞, как обычно, а имеет более сложную структуру:

$$\mathcal{A}_{cl} = W'_\infty \oplus \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{P}.$$

Здесь $\mathcal{A}_1$ — центрально-расширенная алгебра токов, $\mathcal{P}$ — алгебра Пуанкаре, а алгебра W'_∞ диагональна. Согласно общей концепции квантования динамических систем [1, 2], нам необходимо построить представление алгебры $\mathcal{A}_{cl}$ операторами, действующими в некотором корректно определенном пространстве квантовых состояний. Разумеется, такая процедура не есть какой-либо аналог квантования собственно струны в стандартном смысле, поскольку квантуемое фазовое пространство иное. Таким образом, мы имеем нетривиальный пример пары динамических систем, таких, что: 1) на классическом уровне одна из них может рассматриваться как вложение в другую; 2) квантовые версии теорий различны, и одна в другую, вообще говоря, не вкладываются.

Рассмотрим квантовую версию динамической системы "Протяженная частица" с ограничением $j_a(\xi) \equiv 0$ $(\forall\, a = 0, \ldots, 3)$. Как показано в работе [6], такая редукция соответствует (в терминах фазового пространства $\mathcal{H}$) $4D$ струне с дополнительным условием

$$\pm n_\mu \partial_\pm X^\mu = \mathrm{const},$$

где n_μ — не зависящий от ξ^0, ξ^1 светоподобный вектор. Принципиальное отличие от стандартной модели струны в калибровке светового конуса заключается здесь в том, что компоненты вектора n_μ являются динамическими переменными, которые преобразуются соответствующим образом при преобразованиях Лоренца. В этой связи уместно обратить внимание на работу [7], в которой, в частности, рассматривалась релятивистская струна в динамической калибровке светового конуса. Для динамической системы "Протяженная частица" редукция $j_a(\xi) \equiv 0$ приводит к иной теории, вообще говоря, более широкой. Действительно, в нашем случае компоненты вектора n_μ через струнные координаты $X_\mu(\xi^0, \xi^1)$ не выражаются, являясь дополнительными степенями свободы системы. Это означает, что редуцированное фазовое пространство здесь заведомо более широкое, чем каноническое фазовое пространство релятивистской струны.

Пусть мы имеем операторы рождения и уничтожения ${\bf b^+}_n$, ${\bf b}_n$, порождающие пространство Фока ${\bf H}_f$ и удовлетворяющие каноническим коммутационным соотношениям

$$[{\bf b}_m, {\bf b^+}_n] = \delta_{mn} \qquad (m,n = \pm1, \pm2, \ldots)\,.$$

В соответствии со структурой алгебры $\mathcal{A}_{cl}$, квантовые состояния рассматриваемой (редуцированной) системы естественно считать векторами пространства

$$\mathbf{H} = \bigoplus_{i,s}\Big(\mathbf{H}_f \otimes \mathbf{H}_{\mu_i^2(s),s}\Big)\,. \tag{2}$$

С учетом структуры пространства $\mathbf{H}$ теория может, очевидно, рассматриваться как обобщение известной концепции Вигнера [8] элементарной частицы — объекта, описываемого неприводимым представлением группы Пуанкаре. В нашем случае обобщение нетривиально благодаря наличию в (классической) теории связей первого рода. Так, упомянутая выше связь $\Phi_1 = 0$ после квантования приведет — согласно общей концепции Дирака — к уравнению

$$\Phi_1(\mathbf{P}^2, \mathbf{S}^2; \ldots)|\psi\,\rangle = 0\,, \tag{3}$$

определяющему спектр и допустимые состояния системы. Чтобы убедиться в самосогласованности данной схемы квантования, необходимо показать, что существует последовательность неотрицательных чисел $\{\mu_i^2(\mathbf{s})\}$ такая, что в построенном в соответствии с (2) пространстве $\mathbf{H}$ связь $\Phi_1 = 0$ не приводит к противоречию.

Определим операторозначную функцию

$$F(\xi) = \sum_{n>0}\sqrt{n}\left({\bf b}_{-n}\mathrm{e}^{-in\xi} + {\bf b^+}_n\mathrm{e}^{in\xi}\right)\,.$$

Прямой проверкой убеждаемся в справедливости коммутационных соотношений

$$\big[F(\xi), F^+(\eta)\big] = i\delta^{'}(\xi-\eta).$$

В настоящей работе мы будем рассматривать только динамические переменные вида

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}[f(\xi); P_\mu, M_{\mu\nu}] \equiv \mathcal{T}^m[A_1, A_2, \ldots, A_n]\,,$$

где $\mathcal{T}^m$ — полином степени m конечного числа переменных A_i, каждая из которых может быть одной из следующих величин: 1) компонента 4-импульса P_μ; 2) компонента момента $M_{\mu\nu}$; 3) интеграл вида

$$\int_0^{2\pi}\ldots\int_0^{2\pi}\varphi(\xi_1,\ldots,\xi_k)\tilde f_1(\xi_1)\ldots\tilde f_k(\xi_k)d\xi_1\ldots d\xi_k\,.$$

Ядро $\varphi \in \mathcal{D}^{'}_{2\pi}(E_k)$ в указанных интегралах не является вырожденным и зависит только от разностей $\xi_i - \xi_j$. В качестве функций $\tilde f_i(\xi)$ допустим выбор из следующих классов:

1) производные $\dfrac{\partial^m f}{\partial\xi^m}$ любого порядка;

2) первообразные вида $\int^{\xi_1}\ldots\int^{\xi_m} f(\eta)d\eta$, где символ $\int^{\xi}$ означает взятие первообразной и последующее вычитание нулевой моды:

$$\int^{\xi} f(\eta)d\eta \equiv \int_0^{\xi} f(\eta)d\eta - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\xi} f(\eta)d\eta d\xi\,;$$

3) функции, комплексно-сопряженные указанным.

Коэффициенты полинома $\mathcal{T}^m$ — произвольные дифференцируемые функции величин P^2 и S^2. Квантование Υ рассматриваемой динамической системы – это отображение

$$\mathcal{T} \to \Upsilon(\mathcal{T}) \equiv \mathcal{T}[\sqrt{\gamma\,'}F(\xi); \mathbf{P}_\mu, \mathbf{M}_{\mu\nu}],$$

где $\gamma' = \alpha^{'}\hbar/\varrho_0^2$ — безразмерный параметр, построенный по константам струнного действия $\alpha^{'}$ и ϱ_0, а символами $\mathbf{P}_\mu$ и $\mathbf{M}_{\mu\nu}$ обозначены соответствующие операторы, действующие в пространствах $\mathbf{H}_{\mu^2,s}$. Приняты следующие правила построения функций от операторов:

1) в указанных интегралах

$$\Upsilon\left(\tilde{f}_1(\xi_1)\ldots\tilde{f}_k(\xi_k)\right) =: \tilde{F}_1(\xi_1)\ldots\tilde{F}_k(\xi_k) : \quad ,$$

где определение $\tilde{F}$ аналогично определению $\tilde{f}$;

2) в полиноме $\mathcal{T}^m$

$$\Upsilon(A_1\ldots A_k) = \frac{1}{k!}\sum_{i_1,\ldots,i_k}\Upsilon(A_{i_1})\ldots\Upsilon(A_{i_k})\,,$$

где суммирование ведется по всем перестановкам чисел $1,\ldots,k$.

Таким образом, наблюдаемые рассматриваемого вида однозначно определены как операторы в пространстве $\mathbf{H}$ (при этом оператор $\mathbf{b}_n$ понимается как $\oplus_{i,s}(\mathbf{b}_n \otimes 1)$ и т.д.). Как отмечалось выше, связь $\Phi_1 = 0$ приводит к уравнению (3), отбирающему векторы состояния "физического" пространства $\mathbf{H}_{\text{phys}} \subset \mathbf{H}$. Ее явный вид для рассматриваемой редукции $j_a \equiv 0$ может быть выведен из общей формы, полученной в работе [4]. Заметим, что разные формы записи одних и тех же связей могут приводить к неэквивалентным теориям уже на классическом уровне [9]. При переходе на квантовый уровень, как правило, это заведомо так, поскольку при любом способе квантования для двух произвольных наблюдаемых $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ вообще говоря $\Upsilon(\mathcal{T}_1)\Upsilon(\mathcal{T}_2) \neq \Upsilon(\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2)$. Если теория строится исходя из некоторого (сингулярного) лагранжиана $\mathcal{L}(q\ldots\dot{q}\ldots)$, предпочтительной является "естественная" форма записи связей, вытекающая непосредственно из определения канонических импульсов $p_i = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{q}_i$. В нашем случае динамическая система "Протяженная частица" определена без записи исходного действия, а равенство $\Phi_1 = 0$ возникло из дополнительного требования (соответствия $4D$ спиновой струне). Отметим, что оно может быть записано в различных видах, эквивалентных на классическом уровне. Между тем при реконструкции действия различные формы записи первичных связей приводят, вообще говоря, к различным результатам [9]. Более того, как показано в работе [10], в вырожденном случае восстановление лагранжева описания динамической системы по заданному гамильтонову не всегда возможно, даже если координаты фазового пространства допускают естественное разделение на "кооординаты" q_i и "импульсы" p_i. Таким образом, чтобы однозначно определить переход к квантовой теории, нам необходимо точно фиксировать форму записи связи $\Phi_1 = 0$ через те динамические переменные, которые будут объявлены операторами согласно декларированному способу Υ. В соответствии со сказанным, такая фиксация является отдельным постулатом при построении квантовой версии той или иной редукции динамической системы "Протяженная частица".

Параметрическое (с параметром κ) представление связи $\Phi_1 = 0$ выведено в работе [4] (см. также [5]). Здесь мы рассмотрим представление данной связи, введя дополнительную переменную $\lambda\in[0,\infty)$, положив $\lambda^2=h^\star\equiv\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(\xi)|^2d\xi$. Сделав в общих формулах указанных работ редукцию $j_a\equiv 0$, находим:

$$h^\star-\lambda^2=0, \tag{4}$$

$$\Phi_\lambda(P^2,S^2,\varepsilon;\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_3)\equiv -S^2\lambda^6+\frac{1}{4}\varrho_0^2\lambda^2P^2-$$

$$-\frac{1}{2}\alpha' P^3\varrho_0\varepsilon\lambda\left(\mathcal{B}_3+\mathcal{B}_3^+\right)+\alpha'^2P^4\left(\mathcal{B}_2^2\lambda^2+\mathcal{B}_3\mathcal{B}_3^+\right)=0\,. \tag{5}$$

Здесь введены такие обозначения:

$$\mathcal{B}_2=\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\xi)\int^\xi\overline{f}(\zeta)d\zeta d\xi,\qquad \mathcal{B}_3=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(\xi)|^2\int^\xi f(\zeta)d\zeta d\xi\,,$$

а символом $\int^\xi f$ обозначена первообразная функции f, не содержащая в своем разложении Фурье нулевой моды. Заметим, скобки правых частей (4) и (5) равны нулю в сильном смысле, так что введение дополнительной связи (4) (что соответствует введению дополнительной переменной λ) корректно.

Пусть

$$\mathbf{h}=\gamma'^{-1}\Upsilon\left(\frac{1}{2\pi}\int\mid f(\xi)\mid^2d\xi\right)=\sum_n\mid n\mid\mathbf{b}^+{}_n\mathbf{b}_n\,,$$

$$\mathbf{w}_2=\gamma'^{-1}\Upsilon\left(\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{f}(\xi)\int^\xi f(\eta)d\eta d\xi\right)=\sum_{n\neq 0}\mathrm{sgn}(n)\mathbf{b}^+{}_n\,\mathbf{b}_n\,,$$

$$\mathbf{w}_3=\gamma'^{-3/2}\Upsilon\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mid f(\xi)\mid^2\int^\xi f(\eta)d\eta d\xi\right)=$$

$$=\mathrm{i}\sum_{n,k>0}\sqrt{\frac{n}{k(n+k)}}\left[(n+k)\left(\mathbf{b}^+_{-n-k}\mathbf{b}_{-n}\mathbf{b}_{-k}-\mathbf{b}^+_n\,\mathbf{b}^+_k\,\mathbf{b}_{n+k}\right)+\right.$$

$$\left.+n\left(\mathbf{b}^+_{n+k}\mathbf{b}_n\,\mathbf{b}_{-k}-\mathbf{b}^+_{-n}\mathbf{b}^+_k\,\mathbf{b}_{-n-k}\right)\right].$$

В соответствии с равенствами (4) – (5), уравнения, определяющие допустимые ("физические") векторы $\mid\psi_{\rm phys}\rangle\in\mathbf{H}$ имеют вид:

$$\left(\gamma'\mathbf{h}-\lambda^2\right)\mid\psi_{\rm phys}\rangle = 0, \tag{6}$$

$$\Phi_\lambda(\mathbf{P}^2,\mathbf{S}^2,\varepsilon;\mathbf{w}_2,\mathbf{w}_3)|\psi_{\rm phys}\rangle = 0. \tag{7}$$

Оператор Φ_λ здесь построен в соответствии с правилами, сформулированными выше. Поскольку

$$[\mathbf{h},\mathbf{w}_2]=[\mathbf{h},\mathbf{w}_3]=0,$$

имеем

$$[\mathbf{h},\Phi_\lambda(\mathbf{P}^2,\mathbf{S}^2,\varepsilon;\mathbf{w}_2,\mathbf{w}_3)]=0\,.$$

Ниже мы убедимся, что все произведения $\mathbf{w}_2^2$, $\mathbf{w}_3\mathbf{w}_3^+$, $\mathbf{w}_3^+\mathbf{w}_3$ хорошо определены.

Выбранная структура пространства состояний позволяет искать частные решения системы (6), (7) в виде

$$\mid \psi_{\text{phys}}\rangle = \mid \mu_\phi^2, s, \varepsilon\rangle \mid \phi\rangle,$$

где $\mid \mu_\phi^2, s, \varepsilon\rangle \in \mathbf{H}_{\mu^2,s}$, $\mid \phi\rangle \in \mathbf{H}_f$, и, возможно, $\mu^2 = \mu^2(\mid \phi\rangle)$. Такое представление для $\mid \psi_{\text{phys}}\rangle$ приводит к следующим спектральным задачам в пространстве $\mathbf{H}_f$ $(\lambda^2 = \gamma'\mathsf{N})$:

$$(\mathbf{h} - \mathsf{N}) \mid \phi\rangle = 0, \tag{8}$$

$$\left[\mu^4\left(\mathsf{N}\mathbf{w}_2^2 + \frac{1}{2}(\mathbf{w}_3^+\mathbf{w}_3 + \mathbf{w}_3\mathbf{w}_3^+)\right) + \right.$$
$$\left. + \varepsilon\mu^3\sqrt{\frac{\mathsf{N}}{4\gamma'^3}}\left(\mathbf{w}_3 + \mathbf{w}_3^+\right) + \frac{\mu^2\mathsf{N}}{4\gamma'^3} - \mathsf{s}(\mathsf{s}+1)\mathsf{N}^3\right]|\phi\rangle = 0, \tag{9}$$

Собственные значения N спектральной задачи (8) являются целыми: $\mathsf{N} = 0, 1, 2, \ldots$. Соответствующие собственные подпространства $\mathbf{H}_\mathsf{N} \in \mathbf{H}_f$ образованы векторами

$$|l_1, \ldots, l_m\rangle = c_{[l]}\prod_{i=1}^m \mathbf{b}^+{}_{l_i} \mid 0\rangle, \qquad m = 1, \ldots, \mathsf{N},$$

такими, что $\sum_{i=1}^m |l_i| = \mathsf{N}$ ($c_{[l]}$ — нормировочная константа). Справедливо разложение

$$\mathbf{H}_b = \bigoplus_{\mathsf{N}=0}^\infty \mathbf{H}_\mathsf{N}, \qquad \text{где} \qquad \mathbf{H}_0 = \{c \mid 0\rangle\}.$$

Что касается равенства (9), то при каждом $\mathsf{s} = 0, 1/2, 1, 3/2, \ldots$ его можно рассматривать как спектральную задачу со спектральным параметром μ.

Используя явный вид операторов $\mathbf{w}_2$ и $\mathbf{w}_3$, убеждаемся в справедливости включений:

$$\mathbf{w}_2\mathbf{H}_\mathsf{N} \subset \mathbf{H}_\mathsf{N}, \qquad \mathbf{w}_3\mathbf{H}_\mathsf{N} \subset \mathbf{H}_\mathsf{N}\,.$$

Это означает, во-первых, что выражение $\Phi_\lambda(\ldots, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$ корректно определяет в каждом пространстве $\mathbf{H}_\mathsf{N}$ некоторый оператор (матрицу $d_\mathsf{N} \times d_\mathsf{N}$, поскольку $d_\mathsf{N} = \dim \mathbf{H}_\mathsf{N}$ есть, очевидно, конечная величина), и, во-вторых, позволяет нам искать собственные векторы $\mid \phi_\mu\rangle$ задачи (9) как

$$\mid \phi_\mu\rangle = \mid \phi_{\mathsf{N},\mu}\rangle \in \mathbf{H}_\mathsf{N}\,.$$

Таким образом, спектральная задача (9) сводится к серии матричных задач порядка d_N, $\mathsf{N} = 1, 2, \ldots$. Число N является в рассматриваемом случае дополнительным квантовым числом системы.

Пусть векторы $\{\mid \mathsf{N}, l\rangle;\ l = 0, 1, \ldots, d_\mathsf{N}\}$ есть векторы введенного выше базиса $|l_1, \ldots, l_m\rangle$ пространства $\mathbf{H}_\mathsf{N}$, пронумерованные некоторым образом. Тогда для любого уровня $\mathsf{N} = 1, 2, \ldots$ спектральные числа $\mu = \mu_l(\mathsf{s}; \mathsf{N}, \varepsilon)$ являются корнями алгебраических уравнений

$$\det\left[\mu^4\mathbf{A} + \varepsilon\mu^3\sqrt{\frac{\mathsf{N}}{4\gamma'^3}}\mathbf{B} + \left(\frac{\mu^2\mathsf{N}}{4\gamma'^3} - \mathsf{s}(\mathsf{s}+1)\mathsf{N}^3\right)1_{d_N}\right] = 0, \tag{10}$$

где

$$\mathbf{A} = \langle l', \mathsf{N} \mid \left(\mathsf{N}\mathbf{w}_2^2 + \frac{1}{2}\left(\mathbf{w}_3^+\mathbf{w}_3 + \mathbf{w}_3\mathbf{w}_3^+\right)\right) \mid \mathsf{N}, l\rangle,$$

$$\mathbf{B} = \langle l', \mathsf{N} \mid \left(\mathbf{w}_3 + \mathbf{w}_3^+\right) \mid \mathsf{N}, l\rangle.$$

При $\mathsf{N} = 0$, например, находим $\mu = 0$. Как уже отмечалось, безмассовый случай требует отдельного исследования, так что далее $\mathsf{N} > 0$.

Пусть $\mu(\mathsf{s}; \mathsf{N}, k)$ — k-й вещественный корень уравнения (10) с заданными значениями чисел $\mathsf{N} \neq 0$ и s. Очевидно, данное множество является счетным, так что определена последовательность $\{\mu_i^2(\mathsf{s})\}$, $i = 1, 2, \ldots, \infty$. Пусть, по определению, $\mu_0^2(\mathsf{s}) = 0$ $\forall\,\mathsf{s}$. "Физические" векторы состояния $|\psi_{\rm phys}\rangle \in \mathbf{H}_{\rm phys}$ имеют вид:

$$\mid \psi_{\rm phys}\rangle = \sum_{n,s} c_{n,s} \mid \mu_n^2(\mathsf{s}), \mathsf{s}\rangle \mid \phi_{(n)}\rangle\,,$$

где $\mid \phi_{(n)}\rangle$ $(n = 1, \ldots, \infty)$ — собственный вектор спектральной задачи (10), отвечающий собственному значению $\mu_n(\mathsf{s})$, вектор $\mid \mu_n^2(\mathsf{s}), \mathsf{s}\rangle \in \mathbf{H}_{\mu^2(s),s}$ имеет конечную норму, а произвольные постоянные $c_{n,s}$ удовлетворяют условию $\sum_{n,s} \mid c_{n,s} \mid^2 < \infty$. Чтобы определить векторы $\mid \phi_{(0)}\rangle$, необходимо отдельно исследовать безмассовый случай. Не проводя здесь подробного анализа, укажем, что возможно положить $|\phi_{(0)}\rangle = |0\rangle$. Что касается спина s, то он в данном случае связывается не с собственным значением оператора Казимира w^2 (которое равно нулю при $P^2 = 0$), а с собственным значением оператора спиральности $-w^0/|\overline{p}|$ ([11]). Связь $\Phi_1 = 0$ не дает здесь каких-либо ограничений.

Рассмотрим некоторые примеры.

1. $\mathsf{N} = 1$. Пространство $\mathbf{H}_1$ двумерно и образовано векторами $\mathbf{b^+}_1|0\rangle$ и $\mathbf{b^+}_{-1}|0\rangle$. В уравнении (9) оператор $\mathbf{w}_2^2$ — единичный, остальные нулевые. Это означает, что каждая найденная точка спектра будет двукратно-вырожденной. Для собственных значений μ имеем:

$$\mu^4 + \frac{\mu^2}{4\gamma'^3} = \mathsf{s}(\mathsf{s}+1).$$

Таким образом, в плоскости (s, μ^2) мы имеем слабо-нелинейную траекторию Редже с асимптотой

$$\mathsf{s} = \mu^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4\gamma'^3} - 1\right)\,.$$

Численные значения масс, рассчитанных при $\alpha' = 0.66\,\textit{Гэв}^{-2}$, приведены в таблице 1. Там же для сравнения приведены значения масс некоторых наблюдаемых нейтральных мезонов с нулевым изоспином [13].

2. $\mathsf{N} = 2$. Соответствующее пространство $\mathbf{H}_2$ — линейная оболочка векторов

$$\mathbf{b^+}_{-2}|0\rangle,\quad \mathbf{b^+}_{-1}\mathbf{b^+}_{-1}|0\rangle,\quad \mathbf{b^+}_1\mathbf{b^+}_{-1}|0\rangle,\quad \mathbf{b^+}_1\mathbf{b^+}_1|0\rangle,\quad \mathbf{b^+}_2|0\rangle\,,$$

так что $\dim\mathbf{H}_2 = 5$. Мы не будем находить собственные векторы спектральной задачи (9), а приводим лишь результаты расчета (см. таблицу 2) спектра масс (в *Гэв*) при $\alpha' = 0.66\,\textit{Гэв}^{-2}$ и $\gamma' = 0.38$.

При выбранном значении констант α' и γ' мы имеем пять слабо-нелинейных траекторий Редже:

$$\mathsf{s} \simeq \alpha_i \mathsf{M}^2 - c_i\,, \qquad i = 1, \ldots, 5\,,$$

Таблица 1

Спектр масс для уровня $\mathsf{N}=1$

спин s	M (*Гэв*) ($\gamma'=0.38$)	Некоторые мезоны (Изоспин $I=0$)
1	0.782	$\omega(0.783)$
2	1.271	$f_2(1.275)$
3	1.682	$\omega_3(1.670)$
4	2.037	$f_4(2.044)$

Таблица 2

Спектр масс для уровня $\mathsf{N}=2$

спин s	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
1	1.13	1.14	1.42	1.56	1.82
2	1.617	1.622	2.04	2.13	2.82
3	1.989	1.993	2.50	2.58	3.64
4	2.303	2.306	2.89	2.96	4.35

где

$$\alpha_1 \simeq \alpha_2 \simeq 0.8\,\textit{Гэв}^{-2}, \quad \alpha_3 \simeq \alpha_4 \simeq 0.5\,\textit{Гэв}^{-2}, \quad \alpha_5 = 0.2\,\textit{Гэв}^{-2}.$$

Здесь везде приведены средние значения наклона; при малых спинах наклон наибольший, а при росте величин s и M^2 наклон уменьшается и стремится к некоторому предельному значению. Обратим внимание, что здесь точки спектра не вырождены; траектории с $i=1,2$, а также с $i=3,4$ описывают состояния, имеющие близкие массы и одинаковые значения прочих квантовых чисел. Проблема объяснения существования подобных состояний отмечалась в работе [14] как открытая. Не раз отмечалось (см, например, [14, 15]) что избыток изоскалярных мезонов при $\mathsf{s}=2$ свидетельствует о наличии "глюбольной экзотики". Из приведенных значений α_i видно, что траектории с $i=1,2$ имеют наклон, близкий к стандартному. Траектории с $i=3,4$ и, в особенности, с $i=5$ имеют наклон, существенно отличный от $0.9\,\textit{Гэв}^{-2}$. Они могут быть использованы для описания различных экзотических состояний. Заметим, что интерпретация тех или иных резонансов как глюболов (или гибридов) сама по себе является проблемой; в этой связи представляется важным расчет соответствующих масс в рамках той или иной КХД-мотивированной модели (см., например, обзор [15]). В плане сравнения со спектром, приведенным в таблице , обратим внимание на работу [16], где анализировалась феноменология скалярных и тензорных глюболов в предположении о наклоне траектории Редже $\alpha_{\rm glue} \simeq 0.2\,\textit{Гэв}^{-2}$.

Что касается собственно струнного описания таких частиц, то соответствующие модели в настоящее время изучаются. Так, в работе [17] глюболы моделируются эллиптическими конфигурациями струны Намбу–Гото; в частности, показывается, что наклон соответствующих реджевских траекторий в два раза меньше, чем у кварк-антикварковых мезонных состояний.

Значительные отклонения траекторий Редже от линейной аппроксимации в теории естественно ожидать при малых массах M и больших значениях числа N. Явные асимптотические формулы в квантовом случае можно получить, анализируя полученные алгебраические уравнения для спектра. При этом необходимо учесть, что нормы матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ существенно зависят от их размерности d_N. Соответствующие детальные оценки выходят за рамки данной работы; мы ограничимся здесь качественным анализом. Действительно, при больших N в спектре имеются состояния как с небольшим числом возбужденных мод $\mathbf{b}_m$ (если $m \simeq \mathsf{N}$), так и с большим их числом (если $m \ll \mathsf{N}$). Последние, как известно, демонстрируют квазиклассическое поведение. Поэтому можно считать, что соответствующие массы лежат на классической траектории, параметризуемой, напомним, параметром $\kappa = \pm\alpha^{'}\mathsf{M}/\sqrt{\gamma'\mathsf{N}}$. Таким образом, малые массы здесь находятся на участке траектории Редже, который отвечает малым значениям κ. Как установлено в статье [4], именно такие участки являются существенно нелинейными. Сделанный вывод согласуется с тем фактом, что многие семейства резонансов, открытых в 60-х годах, имеют "почти линейные" реджевские траектории. Как правило, низшие возбуждения квантовой системы для наблюдения более доступны.

Литература

[1] Дирак П.А.М. Обобщенная гамильтонова динамика// В кн.: Дирак П.А.М. К созданию квантовой теории поля. Основные статьи 1925-1958 гг. М.: Наука, 1990. С. 303–328.

[2] Березин Ф.А. Метод вторичного квантования. М.: Наука, 1986. 320 с.

[3] Талалов С.В. // ТМФ. 1996. Т. 106. № 2. С. 218–232.

[4] Talalov S.V. // Journ. Phys. A. 1999. V. 32. P. 845–857.

[5] Талалов С.В. // Вестник Самарского гос. университета. 2000. № 2(16). С. 126–145.

[6] Талалов С.В. // ТМФ. 1996. Т. 109. № 1. С. 80–89.

[7] Никитин И.Н. // ЯФ. 1993. Т. 56. Вып. 9. С. 230–248.

[8] Wigner E.P. // Ann. Math. 1939. V. 40. P. 149–204.

[9] Necterenko V. V. On squaring the primary constraints in a generalized hamiltonian dynamics. Препринт ОИЯИ E2-93-328. Дубна. 1993.

[10] Павлов В.П. // ТМФ. 1995. Т. 104. № 2. С. 304–309.

[11] Трошин С.М., Тюрин Н.Е. Спин в физике высоких энергий. М.: Наука, 1991. 176 с.

[12] Барут А, Рончка Р. Теория представлений групп и ее приложения. Т.2. М.: Мир, 1980. 396 с.

[13] Groom D.E. at al.. Particle Data Group// Europ. Phys. J. 2000. V.15. P.1.

[14] Ландсберг Л.Г. // ЯФ. 1994. Т.57. № 1. С. 47–105.

[15] Анисович В.В. // УФН. 1995. Т. 165. № 11. С. 1225 - 1247.

[16] Burakovsky L. // Phys. Rev. D. 1998. V.58. No. 5. P.057503/1–057503/4.

[17] Соловьев Л.Д. // ТМФ. 2001. Т. 126. № 2. С. 247–257.

A MODEL FOR MASSIVE ISOSCALAR MESONS WITH AN ARBITRARY SPIN[3]

© 2002 S.V. Talalov[4]

The extended relativistic system is considered. The dependence of the spin s of this system from the mass square M^2 (Regge trajectory) will be non-linear for small values of the mass M and the spin s, and will be linear asymptotically. The asymptotical slopes are different. The values of slope are defined by the state of internal (relativistic invariant) degrees of the freedom, which are described in terms of the massless bosonic field in the "box". The possibility for the description of isoscalar meson states, both usual and exotic, is discussed. This system is constructed in accordance with the general approach developed earlier.

Поступила в редакцию 20/*V*/2002;
в окончательном варианте — 20/*V*/2002.

[3]Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. V.A. Saleev.

[4]Talalov Sergey Vladimirovich, Dept. of General and Theoretical Physics, Togliatti State University, 445859, Togliatti, Russia.