

НАПРЯЖЕНИЯ В ОКРЕСТНОСТИ ВЕРШИНЫ ТРЕЩИНЫ ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА В УСЛОВИЯХ ПЛОСКОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ В ИДЕАЛЬНО ПЛАСТИЧЕСКОМ МАТЕРИАЛЕ¹

© 2002 Л.В. Степанова²

Приведен анализ напряженного состояния в окрестности стационарной трещины поперечного сдвига (тип II) в идеально пластическом материале в условиях плоского напряженного состояния. Полученное решение дополняет существующий класс решений задач исследования напряженного состояния в окрестности вершин трещин различных типов в идеально пластическом материале. Хорошо известен анализ полей напряжений в окрестности вершин трещин типа I в условиях плоского деформированного и плоского напряженного состояний, а также трещины типа II в условиях плоского деформированного состояния. Однако для трещины типа II в предположении реализации плоского напряженного состояния решения, по-видимому, получено не было. Установлено, что в окрестности вершины трещины поперечного сдвига в идеально пластическом материале в случае плоского напряженного состояния существуют три сектора, внутри которых поле напряжений определяется различными выражениями. В двух секторах, примыкающем к берегу трещины и центральном, реализуется равномерное напряженное состояние. В оставшемся секторе имеет место центрированное поле. Значения углов, соответствующих границам между секторами, определяются численно путем решения системы уравнений алгоритмом, адаптированным специально для рассматриваемой проблемы. Безусловно, решение будет полным, если будет исследована и кинематика течения. Однако в рамках данного исследования удастся получить лишь асимптотику поля деформаций только в центрированном поле, где деформации ведут себя как $1/r$, поскольку определение поля деформаций в оставшихся областях встречает большие трудности.

Целью настоящего исследования является изучение поля напряжений в непосредственной окрестности вершины трещины поперечного сдвига в идеально пластическом теле в условиях плоского напряженного состояния. Приводимый анализ следует рассматривать как приближенный, поскольку речь не идет о полном решении упругопластической задачи, включающем определение напряженно-деформированного состояния как в пластической, так и упругой областях и нахождение упругопластической границы. Поле напряжений в упругой зоне, окружающей пластическую область, и геометрия пластической области не будут анализироваться. Однако детальное исследование даже напряжений в пластической зоне в настоящее время, по-видимому, отсутствует. Имеются и стали уже классическими результаты исследования полей напряжений в идеально пластическом теле в непосредственной окрестности вершины трещины нормального отрыва в условиях плоского деформированного

¹ Представлена доктором физико-математических наук профессором Ю.Н. Радаевым.

² Степанова Лариса Валентиновна, (1st@ssu.samara.ru) кафедра механики сплошной среды Самарского государственного университета, 443011, Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

и плоского напряженного состояний и в окрестности трещины поперечного сдвига в условиях плоского деформированного состояния [1, 2].

Пусть пластическая область полностью окружает вершину трещины. Принимая данное предположение, приходим к статически определимой задаче: если на границе тела заданы напряжения, то имеется полная система уравнений для определения напряженного состояния (независимо от деформаций). Таким образом, должно выполняться условие текучести. Примем, что это условие текучести Мизеса.

$$T = \sqrt{3}k, \quad (1)$$

где $T = \sqrt{s_{ij}s_{ij}/2}$ — интенсивность напряжений, k — предел текучести на сдвиг. Условие Мизеса в рассматриваемом случае принимает вид

$$\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + 3\sigma_{12}^2 = 3k^2. \quad (2)$$

К условию текучести (2) следует присоединить также два дифференциальных уравнения равновесия, которые в предположении отсутствия объемных сил принимают вид

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0. \quad (3)$$

Воспользуемся тем обстоятельством, что напряженное состояние может быть найдено без рассмотрения деформаций, и исследуем его, переходя к полярной системе координат r, θ с центром в вершине трещины.

Дифференциальные уравнения равновесия и условие текучести в полярной системе координат имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + 2 \frac{\sigma_{r\theta}}{r} &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\sigma_{rr}^2 - \sigma_{rr}\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\theta\theta}^2 + 3\sigma_{r\theta}^2 = 3k^2.$$

Граничные условия задачи есть условия отсутствия поверхностных усилий на берегах трещины

$$\sigma_{\theta\theta}(r, \theta = \pi) = 0, \quad \sigma_{r\theta}(r, \theta = \pi) = 0. \quad (5)$$

В силу симметрии задачи можно перейти к изучению одной из полуплоскостей, заменяя граничные условия на одном из берегов трещины условиями симметрии при $\theta = 0$

$$\sigma_{rr}(r, \theta = 0) = 0, \quad \sigma_{\theta\theta}(r, \theta = 0) = 0. \quad (6)$$

Поскольку в идеально пластическом материале напряжения являются ограниченными величинами и не могут превзойти предела текучести материала k (это обстоятельство исключает отрицательную степень r в асимптотическом разложении поля напряжений в окрестности вершины трещины; положительные степени должны отсутствовать, так как изучаемый материал является идеально пластическим и, следовательно, напряжения при $r \rightarrow 0$ должны стремиться к конечному пределу),

можно искать напряжения в окрестности вершины трещины в виде разложения по собственным функциям

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \sigma_{ij}^{(0)}(\theta) + O(r^\alpha), \quad (\alpha > 0, r \rightarrow 0). \quad (7)$$

Подставляя (7) в разрешающую систему уравнений (4) и пренебрегая малыми при $r \rightarrow 0$ величинами, можно прийти к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\sigma_{r\theta}}{d\theta} + \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = 0, \quad \frac{d\sigma_{\theta\theta}}{d\theta} + 2\sigma_{r\theta} = 0 \quad (8)$$

и алгебраическому условию

$$\sigma_{rr}^2 - \sigma_{rr}\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\theta\theta}^2 + 3\sigma_{r\theta}^2 = 3k^2 \quad (9)$$

(верхний индекс $^{(0)}$ опущен).

Условие текучести удовлетворяется, если взять [3]

$$\sigma_{rr} = k \cos(\theta + c), \quad \sigma_{\theta\theta} = 2k \cos(\theta + c), \quad \sigma_{r\theta} = k \sin(\theta + c), \quad (10)$$

где c – произвольная постоянная.

Известно [2] и иное представление компонент тензора напряжений, ведущее к выполнению условия текучести (9)

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= a + b \cos 2\vartheta(\theta) + c \sin 2\vartheta(\theta), \\ \sigma_{\theta\theta} &= a - b \cos 2\vartheta(\theta) - c \sin 2\vartheta(\theta), \\ \sigma_{r\theta} &= -b \sin 2\vartheta(\theta) + c \cos 2\vartheta(\theta), \end{aligned} \quad (11)$$

где a, b, c – такие постоянные, что

$$a^2 + 3b^2 + 3c^2 = 3k^2. \quad (12)$$

Необходимо отметить, что найти решение задачи, удовлетворяющее граничным условиям на берегу трещины и условиям симметрии на продолжении трещины, используя лишь одно из представлений (10) или (11), не удастся. Поэтому предполагается, что поле напряжений описывается формулами (10) или (11) в различных характерных областях полуплоскости $0 \leq \theta \leq \pi$. Границы областей определяются из условий непрерывности компонент тензора напряжений $\sigma_{r\theta}$ и $\sigma_{\theta\theta}$ при переходе через эти границы. Компонента σ_{rr} может претерпевать разрыв.

Установлено, что существуют три характерные клинообразные области с границами $\theta = \theta_\alpha$ и $\theta = \theta_\beta$. В области $0 \leq \theta \leq \theta_\alpha$ поле напряжений определяется формулами (10). В областях $\theta_\alpha \leq \theta \leq \theta_\beta$ и $\theta_\beta \leq \theta \leq \pi$ реализуется равномерное напряженное состояние и поле напряжений определяется формулами (11). В секторе $\theta_\beta \leq \theta \leq \pi$, примыкающем к свободному от нагрузок берегу трещины, напряжения без труда находятся из условий отсутствия поверхностных условий на верхнем берегу трещины и, следовательно, постоянные a, b, c известны в данном секторе.

Условия непрерывности компонент тензора напряжений $\sigma_{r\theta}$ и $\sigma_{\theta\theta}$ на лучах $\theta = \theta_\alpha$ и $\theta = \theta_\beta$ выполняются за счет постоянных a, b, c поля напряжений центрального сектора $\theta_\alpha \leq \theta \leq \theta_\beta$ и положений θ_α и θ_β . Действительно, на пять неизвестных постоянных $a, b, c, \theta_\alpha, \theta_\beta$ накладываются пять условий: требование (12) и четыре условия, следующие из непрерывности компонент тензора напряжений $\sigma_{r\theta}$ и $\sigma_{\theta\theta}$ при переходе через границы $\theta = \theta_\alpha$ и $\theta = \theta_\beta$ рассматриваемых областей.

Если теперь удовлетворить двум условиям непрерывности компонент тензора при $\theta = \theta_\beta$ за счет выбора постоянных a, b, c в решении для напряжений в секторе $\theta_\alpha \leq \theta \leq \theta_\beta$, связанных также уравнением (12), то величины углов $\theta_\alpha, \theta_\beta$ определяются из условий непрерывности $\sigma_{r\theta}$ и $\sigma_{\theta\theta}$ при $\theta = \theta_\alpha$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \theta_\alpha &= -\frac{1}{4} (1 + \cos 2\theta_\beta) \sin 2(\theta_\alpha - \theta_\beta) + \frac{1}{2} \sin 2\theta_\beta \cos 2(\theta_\alpha - \theta_\beta), \\ -\frac{2}{\sqrt{3}} \sin \theta_\alpha &= \frac{1}{4} (-1 + 3 \cos 2\theta_\beta) - \frac{1}{4} (1 + \cos 2\theta_\beta) \cos 2(\theta_\alpha - \theta_\beta) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \sin 2\theta_\beta \sin 2(\theta_\alpha - \theta_\beta). \end{aligned} \quad (13)$$

Решение последней системы уравнений разыскивалось численно последовательным перебором выбранной сетки точек квадрата со стороной, равной π , плоскости $\theta_\alpha, \theta_\beta$ (этот прием оказался более предпочтительным в данном случае по сравнению с методом наискорейшего спуска, поскольку: 1) задана область поиска корней системы уравнений; 2) при применении данного метода не стоит задача выбора нулевого приближения, что является важным при использовании градиентных методов).

Решение приведенной системы тригонометрических уравнений (13) есть $\theta_\alpha = 51,09^\circ$ и $\theta_\beta = 117,86^\circ$. Можно дать и графическое решение приведенной системы тригонометрических уравнений. На рис. 1 показана плоскость переменных θ_α и θ_β . Из рис. 1 видно, что кривые I и II, определяемые первым и вторым уравнениями соответственно, имеют две точки касания, одна из которых не удовлетворяет принятому условию $\theta_\alpha < \theta_\beta$. Вторая же отвечает найденному решению.

Распределение напряжений в окрестности вершины трещины поперечного сдвига в условиях плоского напряженного состояния в идеально пластическом материале, подчиняющемся критерию текучести Мизеса, в каждой из трех характерных клинообразных областей задается формулами (далее компоненты тензора напряжений относятся к величине $\sqrt{3}k$, где k – предел текучести материала на сдвиг и символ ⁽⁰⁾ опускается):

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \theta \leq \theta_\alpha, \quad \theta_\alpha = 51,09^\circ, \\ \sigma_{rr} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta, \quad \sigma_{\theta\theta} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \sin \theta, \quad \sigma_{r\theta} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \theta; \\ \theta_\alpha \leq \theta \leq \theta_\beta, \quad \theta_\beta = 117,86^\circ, \\ \sigma_{rr} = \frac{1}{4} (-1 + 3 \cos 2\theta_\beta) + \frac{1}{4} (1 + \cos 2\theta_\beta) \cos 2(\theta - \theta_\beta) + \frac{1}{2} \sin 2\theta_\beta \sin 2(\theta - \theta_\beta), \\ \sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{4} (-1 + 3 \cos 2\theta_\beta) - \frac{1}{4} (1 + \cos 2\theta_\beta) \cos 2(\theta - \theta_\beta) - \frac{1}{2} \sin 2\theta_\beta \sin 2(\theta - \theta_\beta), \\ \sigma_{r\theta} = -\frac{1}{4} (1 + \cos 2\theta_\beta) \sin 2(\theta - \theta_\beta) + \frac{1}{2} \sin 2\theta_\beta \cos 2(\theta - \theta_\beta); \\ \theta_\beta \leq \theta \leq \pi, \\ \sigma_{rr} = -\frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta), \quad \sigma_{\theta\theta} = -\frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta), \quad \sigma_{r\theta} = \frac{1}{2} \sin 2\theta. \end{array} \right.$$

Полученное распределение напряжений показано на рис. 2. При $\theta = \theta_\beta$ напряжения σ_{rr} терпят разрыв.

Приведенное решение можно сравнить с полем напряжений в окрестности вершины для материала, подчиняющегося степенному закону, связывающему деформации и напряжения

$$\varepsilon_{ij} = \frac{3}{2} B T^{n-1} s_{ij}, \quad (14)$$

где B , n — постоянные материала, в предельном случае, когда $n \rightarrow \infty$, что соответствует идеально пластическому материалу. В соответствии с подходом, реализованным в [1, 2] или в [4] решение разыскивается в виде

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = K r^\lambda f_{ij}(\theta) \quad (15)$$

и для получения угловых распределений компонент тензора напряжений $f_{ij}(\theta)$ в непосредственной окрестности вершины трещины получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений (или одно нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение, если использовать функцию напряжений Эри — подробно см. [4]). Устремляя n к бесконечности (в ходе численного счета обычно полагают $n = 100, 300, 500$), можно получить уже другим способом угловые распределения компонент тензора напряжений (рис. 3). Сравнение угловых распределений полученных компонент тензора напряжений показывает, что две схемы построения поля напряжений приводят к одному и тому же результату.

Необходимо подчеркнуть, что полученное решение не является полным, поскольку не исследована кинематика течения. Следуя [1] и [2], можно заключить, что в секторе $0 \leq \theta \leq \theta_\alpha$ деформации имеют особенность вида $1/r$. В остальных же секторах анализ поля деформаций в рамках данного подхода провести не удастся. Исследованы лишь уравнения для напряжений, поэтому речь не идет о полном решении упругопластической задачи.

Литература

- [1] Rice J.R. Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material// J. Mech. Phys. Solids. 1968. V. 16. P. 1–12.
- [2] Hutchinson J.W. Singular behaviour at the end of tensile crack in a hardening material// J. Mech. Phys. Solids. 1968. V. 16. P. 13–31.
- [3] Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 408 с.
- [4] Астафьев В.И., Радаев Ю.Н., Степанова Л.В. Нелинейная механика разрушения. Самара: Изд-во Самарского университета, 2000. 632 с.

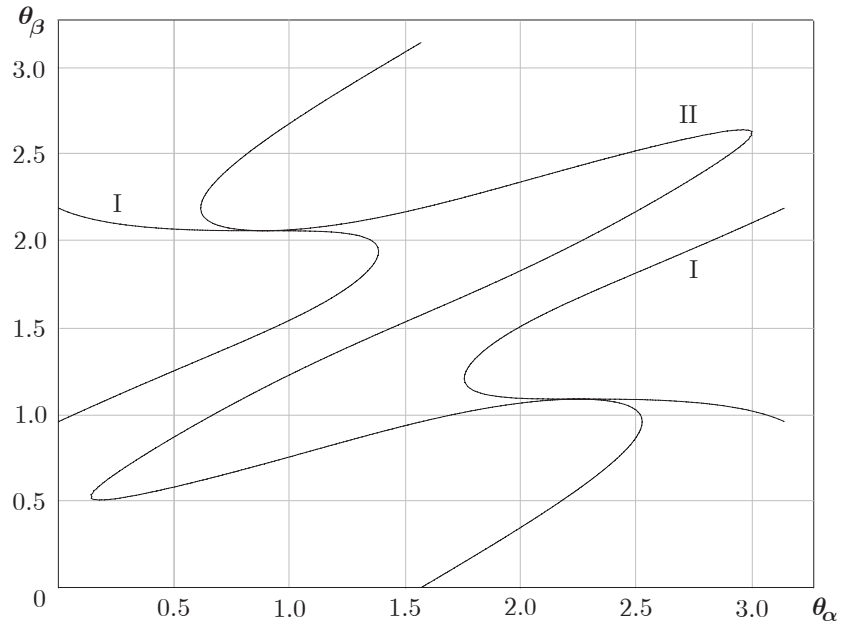


Рис. 1. Графическое решение системы уравнений (13). I — кривая, определяемая первым уравнением, II — вторым уравнением системы (13)

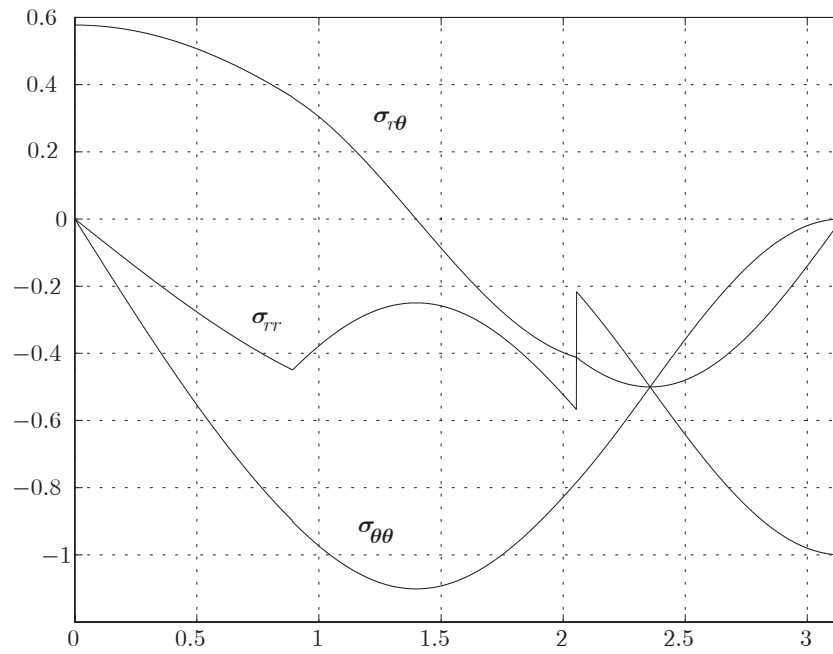


Рис. 2. Компоненты тензора напряжений в окрестности вершины трещины поперечного сдвига в условиях плоского напряженного состояния в идеально пластическом теле

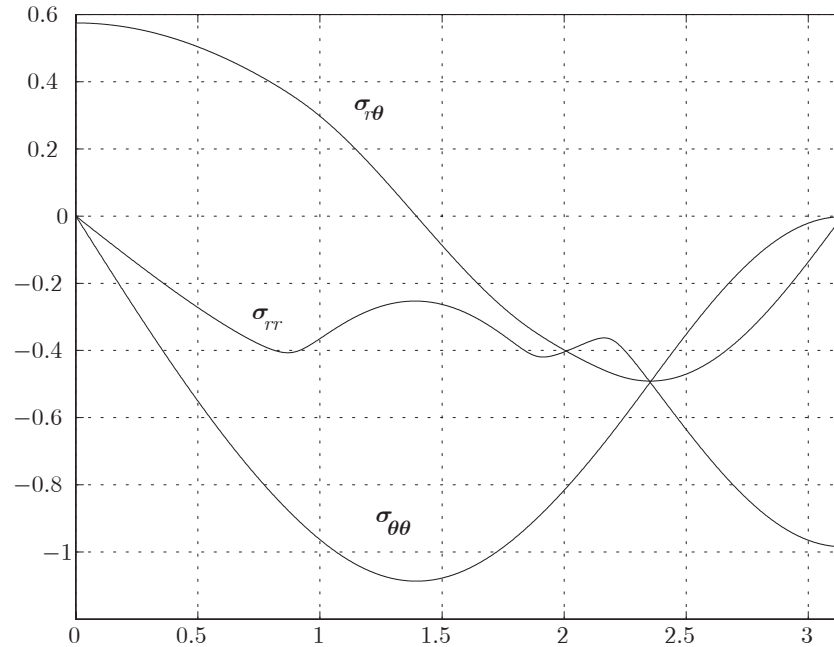


Рис. 3. Угловое распределение компонент тензора напряжений в задаче Хатчинсона–Райса–Розенгрена для $n = 500$

STRESS FIELD NEAR A MODE II CRACK TIP UNDER PLANE STRESS FOR PERFECTLY PLASTIC MATERIAL³

© 2002 L.V. Stepanova⁴

An exact asymptotic analysis is presented for the stress fields near the tip of a static plane stress mode II crack in perfectly plastic material. The solution obtained completes the class of the solutions known for static plane strain and plane stress mode I cracks and a plane strain mode II crack in the perfectly plastic material. However, the stress field near a mode II crack tip under plane stress in the perfectly plastic material seems to have not been obtained yet. It is shown that there are three discriminated sectors in the vicinity of the crack tip where the stress field is determined by the different formulae. They are the two sectors which can be described in slip line terminology as "constant stress" and "centered fan" sector of non-constant stress. These three different sector types constitute the complete set of asymptotically admissible solutions near the crack tip. The angles separating the sectors are numerically found from the solution of the system of the two trigonometric equations expressing the stress continuity conditions. The solution can not be considered as the full solution for the elastic – perfectly plastic material since only the equilibrium equations and the von Mises yield criterion are analyzed. The solution will be full if it will be possible to analyze the deformation field near the crack tip. In the framework of the present study it is possible to establish the strain asymptotic of the type $1/r$ in the "centered fan" only.

Поступила в редакцию 10/ V/2002;
в окончательном варианте — 24/ V/2002.

³Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. Yu.N. Radayev.

⁴Stepanova Larisa Valentinovna, (1st@ssu.samara.ru), Dept. of Continuum Mechanics, Samara State University, 443011, Russia.