УДК 519.21

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ НЕЗАВИСИМОСТИ СЕМЕЙСТВА СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН, ОБЛАДАЮЩИХ ВОСПРОИЗВОДИМОСТЬЮ УСЛОВНЫХ КВАНТИЛЕЙ[1]

© 2002 С.Я. Шатских[2]

Работа посвящена изучению свойств преобразования независимости случайных векторов, которые обладают свойством воспроизводимости условных квантилей при сужении на условные квантили меньшей размерности. Установлено, что для таких случайных векторов треугольное преобразование независимости можно представить с помощью суперпозиций только двумерных условных функций распределения. Обращения преобразований такого вида использованы для построения последовательности случайных величин, обладающих воспроизводимостью условных квантилей.

Введение

В нашей работе мы будем иметь дело с преобразованием независимости случайных векторов, которые обладают свойством воспроизводимости условных квантилей при сужении на условные квантили меньшей размерности (см. [5, 6, 7]). В частности, мы покажем, что для таких случайных векторов треугольное преобразование независимости имеет специальный вид: его можно представить с помощью суперпозиций только лишь двумерных условных функций распределения. Преобразования такого вида естественно называть преобразованиями парной независимости. Кроме того, мы рассмотрим обратную задачу: обращение преобразования парной независимости будет использовано для построения последовательности случайных величин обладающих воспроизводимостью условных квантилей.

Попутно в этой работе устанавливаются некоторые свойства многомерных распределений, условные квантили которых обладают свойством воспроизводимости при сужении на условные квантили меньшей размерности.

В настоящей работе мы будем считать, что *функции распределения случайных векторов имеют совместные плотности распределения, которые вместе со всеми своими маргинальными плотностями всюду положительны и непрерывны.*

Будем использовать следующие обозначения:

$F_{1\ldots n}(x_1, \ldots, x_n)$, $f_{1\ldots n}(x_1, \ldots, x_n)$ — функция распределения и плотность случайного вектора $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$;

[1]Представлена доктором физико-математических наук профессором С.В. Асташкиным.

[2]Шатских Сергей Яковлевич (shatskih@ssu.samara.ru), кафедра функционального анализа и теории функций Самарского государственного университета, 443011, Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

$F_{k|1\ldots\widehat{k}\ldots n}(x_k \mid x_1,\ldots,\widehat{x_k},\ldots,x_n)$, $f_{k|1\ldots\widehat{k}\ldots n}(x_k \mid x_1,\ldots,\widehat{x_k},\ldots,x_n)$ — условная функция распределения и условная плотность случайной величины ξ_k относительно случайных величин $\xi_1,\ldots,\widehat{\xi_k},\ldots,\xi_n$;

знак $\hat{}$ над элементом означает пропуск этого элемента.

Рассмотрим отображение $H_\xi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $(y = H_\xi x)$, с координатными функциями следующего вида:

$$\begin{cases} y_n = F_n^{-1}(F_{n|1\ldots k\ldots n-1}(x_n \mid x_1,\ldots,x_k,\ldots,x_{n-1})), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_k = F_k^{-1}(F_{k|1\ldots k-1}(x_k \mid x_1,\ldots,x_{k-1})), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_2 = F_2^{-1}(F_{2|1}(x_2 \mid x_1)), \\ y_1 = x_1. \end{cases} \tag{1}$$

Тогда, как показано в работе [7], система случайных величин

$$\xi_1,\, \xi^*_{k|1\ldots k-1} = F_k^{-1}(F_{k|1\ldots k-1}(\xi_k \mid \xi_1,\ldots,\xi_{k-1})), \quad k = 2,\ldots,n$$

взаимно независима.

Определение 1. Преобразование $H_\xi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, координатные функции которого задаются соотношениями (1), будем называть *треугольным преобразованием независимости* случайного вектора $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_n)$.

Замечание. Треугольное преобразование независимости (1) фактически является вариантом преобразования

$$\begin{cases} y_n = F_{n|1\ldots n-1}(x_n \mid x_1,\ldots,x_{n-1}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_2 = F_{2|1}(x_2 \mid x_1), \\ y_1 = F_1(x_1), \end{cases} \tag{2}$$

которое было введено М. Розенблаттом в работе [11] (см. также [3, с. 39]), посвященной многомерным критериям согласия. В этих работах преобразование (2) использовалось только для преобразования многомерной исходной выборки в выборку значений равномерно распределенного на кубе $[0,1]^n$ случайного вектора. Кроме того, следует указать и на "идейную" близость треугольного преобразования независимости случайных величин к классической задаче приведения дифференциальных форм постоянного класса к каноническому виду (см. [7; 1, с. 118]).

Хорошо известно, что для гауссовских случайных векторов свойство независимости его компонент эквивалентно их некоррелированности. Поэтому для каждого гауссовского вектора существует линейное преобразование, переводящее этот вектор в (гауссовский) случайный вектор с независимыми компонентами (см. [4, 9]).

В связи с этим следует отметить, что треугольное, вообще говоря, нелинейное преобразование независимости (1) в гауссовском случае совпадает с традиционным линейным преобразованием ортогонализации.

Одной из важных особенностей треугольного преобразования независимости семейства случайных величин является его тесная связь с условными квантилями многомерных распределений этого семейства. Как нетрудно заметить, поверхности постоянного уровня координатных функций преобразования (1) совпадают с условными квантилями соответствующих условных распределений. Поэтому свойства треугольных преобразований независимости естественно рассматривать в терминах условных квантилей.

Напомним определение свойства воспроизводимости условных квантилей (см. [6, 12]). Для этого рассмотрим условные квантили

$$q^{\circ}_{i|1\ldots\widehat{i}\ldots n}(x_1,...,\widehat{x}_i,...,x_n); \quad q^{\circ}_{l|1\ldots\widehat{i}\ldots\widehat{l}\ldots n}(x_1,...,\widehat{x}_i,...,\widehat{x}_l,...,x_n),$$

определяемые уравнениями:

$$F_{i|1\ldots\widehat{i}\ldots n}(q^{\circ}_{i|1\ldots\widehat{i}\ldots n}(x_1,...,\widehat{x}_i,...,x_n)|x_1,...,\widehat{x}_i,...,x_n) = \\ = F_{i|1\ldots\widehat{i}\ldots n}(x_i^{\circ}|x_1^{\circ},...,\widehat{x_i^{\circ}},...,x_n^{\circ});$$

$$F_{l|1\ldots\widehat{i}\ldots\widehat{l}\ldots n}(q^{\circ}_{m|1\ldots\widehat{i}\ldots\widehat{l}\ldots n}(x_1,...,\widehat{x}_i,...,\widehat{x}_l,...,x_n)|x_1,...,\widehat{x}_i,...,\widehat{x}_l,...,x_n) = \\ = F_{l|1\ldots\widehat{i}\ldots\widehat{l}\ldots n}(x_m^{\circ}|x_1^{\circ},...,\widehat{x_i^{\circ}},...,\widehat{x_l^{\circ}},...,x_n^{\circ}).$$

Определение 2. Будем говорить, что случайный вектор

$$\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$$

обладает *свойством воспроизводимости условных квантилей* размерности $n-1$ при сужении на условные квантили размерности $n-2$, если

$$q^{\circ}_{i|1\ldots\widehat{i}\ldots n}(x_1,...,\widehat{x}_i,...,q^{\circ}_{l|1\ldots\widehat{i}\ldots\widehat{l}\ldots n}(x_1,...,\widehat{x}_i,...,\widehat{x}_l,...,x_n),...,x_n) = \\ = q^{\circ}_{i|1\ldots\widehat{i}\ldots\widehat{l}\ldots n}(x_1,...,\widehat{x}_i,...,\widehat{x}_l,...,x_n)$$

для любого $i=\overline{1,n}$ и для любого $l=\overline{1,n}, \quad l \neq i$.

Сформулированное определение воспроизводимости допускает естественные модификации. Например, можно рассматривать сужение "большой" условной квантили размерности $n{-}1$ на множество, параметризованное $n{-}k{-}1$ "малыми" условными квантилями размерности k.

Так, в случае одномерных условных квантилей определение воспроизводимости принимает следующий вид.

Пусть

$$q^{\circ}_{i|1\ldots\widehat{i}\ldots n}(x_1,\ldots,\widehat{x}_i,\ldots,x_n), \quad q^{\circ}_{l|k}(x_k); \ l=\overline{1,n}; \ l\neq i,k$$

— условные квантили, определяемые уравнениями:

$$F_{i|1\ldots\widehat{i}\ldots n}(q^{\circ}_{i|1\ldots\widehat{i}\ldots n}(x_1,\ldots,\widehat{x}_i,\ldots,x_n) \mid x_1,\ldots,\widehat{x}_i,\ldots,x_n) = \\ = F_{i|1\ldots\widehat{i}\ldots n}(x_i^{\circ} \mid x_1^{\circ},\ldots,\widehat{x_i^{\circ}},\ldots,x_n^{\circ}); \\ F_{l|k}(q^{\circ}_{l|k}(x_k) \mid x_k) = F_{l|k}(x_l^{\circ} \mid x_k^{\circ}).$$

Определение 3. Будем говорить, что случайный вектор

$$\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$$

обладает свойством воспроизводимости условных квантилей при сужении (на одномерные условные квантили), если для любого $i=\overline{1,n}$ и для любого $k=\overline{1,n}; \quad (k\neq i)$

$$q^{\circ}_{i|1\ldots\widehat{i}\ldots n}(q^{\circ}_{1|k}(x_k),\ldots,q^{\circ}_{k-1|k}(x_k),x_k,q^{\circ}_{k+1|k}(x_k),\ldots,\widehat{x}_i,\ldots,q^{\circ}_{n|k}(x_k)) = q^{\circ}_{i|k}(x_k).$$

Замечание. Следует отметить, что свойство воспроизводимости одномерных условных квантилей при сужении на безусловные квантили всегда выполняется.

В нашем определении свойства воспроизводимости мы имеем дело с условными квантилями, проходящими через отмеченную точку. При этом порядки (вероятности), соответствующие этим квантилям, в рассмотрение не принимаются. Как можно показать на примере гауссовских случайных векторов, условные квантили, участвующие в определении свойства воспроизводимости, вообще говоря, имеют различные порядки.

В работах [6, 8] приведены примеры многомерных распределений, условные квантили которых обладают свойством воспроизводимости. Это распределения Гаусса, Стьюдента (Коши). В коллекцию многомерных распределений, обладающих свойством воспроизводимости условных квантилей, можно добавить распределение Дирихле, некоторые типы сопряженных распределений (см. [2]), а также распределения стьюдентовского варианта модели GARCH [10].

1. Некоторые свойства многомерных распределений, условные квантили которых обладают свойством воспроизводимости при сужении на условные квантили меньшей размерности

Теорема 1. Пусть случайный вектор $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ обладает свойством воспроизводимости условных квантилей при сужении на одномерные условные квантили (в смысле определения 3) и $F_{i|j}(\cdot \mid \cdot)$ – условная функция распределения случайной величины ξ_i по ξ_j.

Тогда система случайных величин

$$\eta_i = F_{i|j}(\xi_i \mid \xi_j),\ i = 1, \dots, n;\ i \neq j$$

обладает свойством

$$F_{l|1\dots\widehat{l}\dots n}(\xi_l \mid \xi_1, \dots, \widehat{\xi_l}, \dots, \xi_n) = G_{l|1\dots\widehat{j}\dots\widehat{l}\dots n}(\eta_l \mid \eta_1 \dots \widehat{\eta_j} \dots \widehat{\eta_l} \dots \eta_n),$$
$$\forall l = 1, \dots, n;\ l \neq j,$$

где $G_{l|1\dots\widehat{j}\dots\widehat{l}\dots n}(\cdot \mid \cdots)$ — условная функция распределения случайной величины η_l по системе

$$\eta_1 \dots \widehat{\eta_j} \dots \widehat{\eta_l} \dots \eta_n.$$

Прежде чем доказывать теорему, рассмотрим простое вспомогательное утверждение.

Лемма 1. Если $x = (x_1, \dots, x_n)$ — фиксированный вектор, то

$$F_{l|1\dots\widehat{l}\dots n}\Bigg(F^{-1}_{l|j}(x_l \mid s_j) \mid F^{-1}_{1|j}(x_1 \mid s_j), \dots, F^{-1}_{j-1|j}(x_{j-1} \mid s_j), s_j,$$
$$F^{-1}_{j+1|j}(x_{j+1} \mid s_j), \dots, \widehat{s_l}, \dots, F^{-1}_{n|j}(x_n \mid s_j)\Bigg) = \mathrm{const},\ \forall s_j \in \mathbb{R}.$$

Доказательство леммы 1. Обозначим

$$s_i := F_{i|j}^{-1}(x_i \mid s_j),\ \ i = 1, \ldots, n;\ i \neq j.$$

Тогда

$$x_i = F_{i|j}(s_i \mid s_j) = \text{const},\ \ s_i = q_{i|j}^{x_i}(s_j).$$

Выберем $s_j^\circ \in \mathbb{R}$ и положим $s_i^\circ := q_{i|j}^{x_i}(s_j^\circ),\ \ i = 1, \ldots, n;\ i \neq j$. Перепишем равенство с условными квантилями уровня x_i, используя условные квантили, проходящие через фиксированную точку $s^\circ = (s_1, \ldots, s_n)$:

$$s_i = q_{i|j}^\circ(s_j).$$

Тогда, используя свойство воспроизводимости условных квантилей (см. определение 3), можно утверждать, что

$$q^\circ_{l|1\ldots\widehat{l}\ldots n}\big(q^\circ_{1|j}(s_j), \ldots, q^\circ_{j-1|j}(s_j), s_j, q^\circ_{j+1|j}(s_j), \ldots, \widehat{s_l}, \ldots, q^\circ_{n|j}(s_j)\big) = q^\circ_{l|j}(s_j).$$

Поэтому

$$F_{l|1\ldots\widehat{l}\ldots n}\left(q^\circ_{l|j}(s_j) \mid q^\circ_{1|j}(s_j), \ldots, q^\circ_{j-1|j}(s_j), s_j, q^\circ_{j+1|j}(s_j), \ldots, \widehat{s_l}, \ldots, q^\circ_{n|j}(s_j)\right) =$$

$$= F_{l|1\ldots\widehat{l}\ldots n}\left(q^\circ_{l|1\ldots\widehat{l}\ldots n}\big(q^\circ_{1|j}(s_j), \ldots, q^\circ_{j-1|j}(s_j), s_j, q^\circ_{j+1|j}(s_j), \ldots, \widehat{s_l}, \ldots, q^\circ_{n|j}(s_j)\big) \ \right|$$

$$\left| \ q^\circ_{1|j}(s_j), \ldots, q^\circ_{j-1|j}(s_j), s_j, q^\circ_{j+1|j}(s_j), \ldots, \widehat{s_l}, \ldots, q^\circ_{n|j}(s_j)\right) = \text{const}.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Вначале найдем выражение для функции распределения

$$G_{1\ldots\widehat{j}\ldots n}(x_1, \ldots, \widehat{x_j}, \ldots, x_n) = \mathbb{P}\big\{\eta_1 \leqslant x_1; \ldots; \widehat{\eta_j}; \ldots; \eta_n \leqslant x_n\big\} =$$

$$= \int\limits_{\left\{\begin{array}{c}(t_1, ..., t_n): \\ F_{i|j}(t_i \mid t_j) \leqslant x_i \\ i = 1, \ldots, n;\ i \neq j\end{array}\right\}} \cdots \int f_{1\ldots n}(t_1, ..., t_n) dt_1 ... dt_n.$$

Введем в этом интеграле замену переменных

$$\begin{cases} F_{1|j}(t_1 \mid t_j) = s_1, \\ . \\ . \\ . \\ F_{j-1|j}(t_{j-1} \mid t_j) = s_{j-1}, \\ t_j = s_j \\ F_{j+1|j}(t_{j+1} \mid t_j) = s_{j+1}, \\ . \\ . \\ . \\ F_{n|j}(t_n \mid t_j) = s_n \end{cases}$$

с якобианом

$$\mathrm{Jac} = \prod_{i=1, i\neq j}^{n} \frac{1}{f_{i|j}(F_{i|j}^{-1}(s_i \mid s_j) \mid s_j)}.$$

Тогда ($x_k \in [0,1]$)

$$G_{1\ldots\widehat{j}\ldots n}(x_1, \ldots, \widehat{x}_j, \ldots, x_n) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} ds_j \int\limits_{0}^{x_1} \ldots \int\limits_{0}^{\widehat{x_j}} \ldots \int\limits_{0}^{x_n} \cdot$$

$$\cdot f_{1\ldots n}\big(F_{1|j}^{-1}(s_1 \mid s_j), \ldots, F_{j-1|j}^{-1}(s_{j-1} \mid s_j), s_j, F_{j+1|j}^{-1}(s_{j+1} \mid s_j), \ldots, F_{n|j}^{-1}(s_n \mid s_j)\big)\cdot$$

$$\cdot \prod_{i=1, i\neq j}^{n} \frac{1}{f_{i|j}(F_{i|j}^{-1}(s_i \mid s_j) \mid s_j)} ds_1 \ldots \widehat{ds_j} \ldots ds_n.$$

Дифференцируя по $x_1, \ldots, \widehat{x}_j, \ldots, x_n$, получаем плотность

$$g_{1\ldots\widehat{j}\ldots n}(x_1, \ldots, \widehat{x}_j, \ldots, x_n) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{1\ldots n}\Big(F_{1|j}^{-1}(x_1 \mid s_j), \ldots, F_{j-1|j}^{-1}(x_{j-1} \mid s_j), s_j, F_{j+1|j}^{-1}(x_{j+1} \mid s_j), \ldots$$

$$\ldots, F_{n|j}^{-1}(x_n \mid s_j)\Big) \prod_{i=1, i\neq j}^{n} \frac{1}{f_{i|j}(F_{i|j}^{-1}(x_i \mid s_j) \mid s_j)} ds_j.$$

Аналогично рассуждая, найдем плотность

$$g_{1\ldots\widehat{j}\ldots\widehat{l}\ldots n}(x_1, \ldots, \widehat{x}_j, \ldots, \widehat{x}_l, \ldots, x_n) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{1\ldots\widehat{l}\ldots n}\Big(F_{1|j}^{-1}(x_1 \mid s_j), \ldots, F_{j-1|j}^{-1}(x_{j-1} \mid s_j), s_j, F_{j+1|j}^{-1}(x_{j+1} \mid s_j), \ldots$$

$$\ldots, \widehat{F_{l|j}^{-1}(x_l \mid s_j)}, \ldots, F_{n|j}^{-1}(x_n \mid s_j)\Big) \prod_{i=1, i\neq j,l}^{n} \frac{1}{f_{i|j}(F_{i|j}^{-1}(x_i \mid s_j) \mid s_j)} ds_j. \qquad (3)$$

Используя найденные выражения для плотностей, получаем условную функцию распределения

$$G_{l|1\ldots\widehat{j}\ldots\widehat{l}\ldots n}(x_l \mid x_1, \ldots, \widehat{x}_j, \ldots, \widehat{x}_l, \ldots, x_n) =$$

$$= \Big[g_{1\ldots\widehat{j}\ldots\widehat{l}\ldots n}(x_1, \ldots, \widehat{x}_j, \ldots, \widehat{x}_l, \ldots, x_n)\Big]^{-1} \cdot$$

$$\cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{0}^{x_l} f_{1\ldots n}\Big(F_{1|j}^{-1}(x_1 \mid s_j), \ldots, F_{j-1|j}^{-1}(x_{j-1} \mid s_j), s_j, F_{j+1|j}^{-1}(x_{j+1} \mid s_j), \ldots$$

$$\ldots, F_{l|j}^{-1}(u_l \mid s_j), \ldots, F_{n|j}^{-1}(x_n \mid s_j)\Big) \cdot \frac{1}{f_{l|j}(F_{l|j}^{-1}(u_l \mid s_j) \mid s_j)} du_l \cdot$$

$$\cdot \prod_{i=1, i\neq j,l}^{n} \frac{1}{f_{i|j}(F_{i|j}^{-1}(x_i \mid s_j) \mid s_j)} ds_j =$$

$$= \left[g_{1\ldots\widehat{j}\ldots\widehat{l}\ldots n}(x_1,\ldots,\widehat{x}_j,\ldots,\widehat{x}_l,\ldots,x_n) \right]^{-1} \cdot$$

$$\cdot \int_{-\infty}^{\infty} F_{l|1\ldots\widehat{l}\ldots n}\Bigg(F^{-1}_{l|j}(x_l \mid s_j) \mid F^{-1}_{1|j}(x_1 \mid s_j),\ldots,F^{-1}_{j-1|j}(x_{j-1} \mid s_j), s_j,$$

$$F^{-1}_{j+1|j}(x_{j+1} \mid s_j),\ldots,\widehat{y}_l,\ldots,F^{-1}_{n|j}(x_n \mid s_j)\Bigg) \cdot$$

$$\cdot f_{1\ldots\widehat{l}\ldots n}\Bigg(F^{-1}_{l|j}(x_l \mid s_j) \mid F^{-1}_{1|j}(x_1 \mid s_j),\ldots,F^{-1}_{j-1|j}(x_{j-1} \mid s_j), s_j,$$

$$F^{-1}_{j+1|j}(x_{j+1} \mid s_j),\ldots,\widehat{y}_l,\ldots,F^{-1}_{n|j}(x_n \mid s_j)\Bigg) \cdot$$

$$\cdot \prod_{i=1, i\neq j,l}^{n} \frac{1}{f_{i|j}(F^{-1}_{i|j}(x_i \mid s_j) \mid s_j)} ds_j =$$

$$= \left[g_{1\ldots\widehat{j}\ldots\widehat{l}\ldots n}(x_1,\ldots,\widehat{x}_j,\ldots,\widehat{x}_l,\ldots,x_n) \right]^{-1} \cdot$$

$$\cdot F_{l|1\ldots\widehat{l}\ldots n}\Bigg(F^{-1}_{l|j}(x_l \mid s_j) \mid F^{-1}_{1|j}(x_1 \mid s_j),\ldots,F^{-1}_{j-1|j}(x_{j-1} \mid s_j), s_j,$$

$$F^{-1}_{j+1|j}(x_{j+1} \mid s_j),\ldots,\widehat{y}_l,\ldots,F^{-1}_{n|j}(x_n \mid s_j)\Bigg) \cdot$$

$$\cdot \left[g_{1\ldots\widehat{j}\ldots\widehat{l}\ldots n}(x_1,\ldots,\widehat{x}_j,\ldots,\widehat{x}_l,\ldots,x_n) \right] =$$

$$= F_{l|1\ldots\widehat{l}\ldots n}\Bigg(F^{-1}_{l|j}(x_l \mid s_j) \mid F^{-1}_{1|j}(x_1 \mid s_j),\ldots,F^{-1}_{j-1|j}(x_{j-1} \mid s_j), s_j,$$

$$F^{-1}_{j+1|j}(x_{j+1} \mid s_j),\ldots,\widehat{y}_l,\ldots,F^{-1}_{n|j}(x_n \mid s_j)\Bigg)$$

ввиду леммы 1 и равенства (3).

Используя полученное выражение для функции $G_{l|1\ldots\widehat{j}\ldots\widehat{l}\ldots n}(\cdot \mid \cdots)$ и применяя обозначения $y_i = F^{-1}_{i|j}(x_i \mid s_j)$, получаем

$$G_{l|1\ldots\widehat{j}\ldots\widehat{l}\ldots n}\Bigg(F_{l|j}(y_l \mid s_j) \mid F_{1|j}(y_1 \mid s_j),\ldots,F_{j|j}\widehat{(y_j \mid} s_j),\ldots,$$

$$\ldots,F_{l|j}\widehat{(y_l \mid} s_j),\ldots,F_{n|j}(y_n \mid s_j)\Bigg) =$$

$$= F_{l|1\ldots\widehat{l}\ldots n}(y_l \mid y_1,\ldots,y_{j-1},s_j,y_{j+1},\ldots,\widehat{y}_l,\ldots,y_n).$$

Теорема доказана.

Следующая теорема представляет собой аналог теоремы 1 для случайных векторов, обладающих свойством воспроизводимости условных квантилей в смысле определения 2.

Теорема 2. Пусть случайный вектор $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ обладает свойством воспроизводимости условных квантилей размерности $n-1$ при сужении на условные квантили размерности $n-2$ и $F_{n|1\ldots n-1}(\cdot \mid \cdots)$ — условная функция распределения случайной величины ξ_n по системе $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$.

Тогда случайные величины

$$\eta_n = F_{n|1\ldots n-2}(\xi_n \mid \xi_1, \ldots, \xi_{n-2}), \ \ \eta_{n-1} = F_{n-1|1\ldots n-2}(\xi_{n-1} \mid \xi_1, \ldots, \xi_{n-2})$$

обладают свойством

$$F_{n|1\ldots n-1}(\xi_n \mid \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) = G_{n|n-1}(\eta_n \mid \eta_{n-1}),$$

где $G_{n|n-1}(\cdot \mid \cdots)$ — условная функция распределения случайной величины η_n по величине η_{n-1}.

Доказательство этой теоремы проводится совершенно аналогично доказательству предыдущей теоремы 1. Более того, справедливо и более общее утверждение для сужений на условные квантили "промежуточной" размерности $(1 < \dim < n - 2)$. Однако мы опускаем формулировку и доказательство этого утверждения ввиду громоздких обозначений.

Теорема 3. Если случайный вектор

$$\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$$

обладает свойством воспроизводимости условных квантилей, а случайная величина $\eta \geqslant 0$ не зависит от случайного вектора ξ, то случайный вектор

$$\zeta = (\xi_1\eta, \ldots, \xi_n\eta, \eta) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

обладает свойством воспроизводимости условных квантилей первых n компонент по всем остальным компонентам.

Прежде чем доказывать эту теорему, рассмотрим следующее простое утверждение.

Лемма 2. Если случайная величина $\eta \geqslant 0$ не зависит от случайного вектора $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, а $F_{i|1\ldots\widehat{i}\ldots n}(\cdot \mid \cdots)$ — условная функция распределения компоненты ξ_i относительно всех других компонент $\xi_1, \ldots, \widehat{\xi_i}, \ldots, \xi_n$, то

$$\mathbb{P}\Big\{\xi_i\eta \leqslant x_i \mid \xi_1\eta = x_1, \ldots, \widehat{\xi_i\eta = x_i}, \ldots, \xi_n\eta = x_n, \eta = y\Big\} =$$
$$= F_{i|1\ldots\widehat{i}\ldots n}\Big(\frac{x_i}{y} \;\Big|\; \frac{x_1}{y}, \ldots, \widehat{\frac{x_i}{y}}, \ldots, \frac{x_n}{y}\Big).$$

Доказательство леммы 2. Ограничимся случаем, когда случайная величина η имеет плотность $g(\cdot)$, а случайный вектор $(\xi_1, ..., \xi_n)$ — плотность $f_{1\ldots n}(\cdot, \cdots, \cdot)$. Тогда

$$\mathbb{P}\Big\{\xi_1\eta \leqslant t_1, ..., \xi_n\eta \leqslant t_n; \eta \leqslant s\Big\} =$$
$$= \int\limits_{\left\{\begin{array}{c}(u_1, ..., u_n; v): \\ u_1 v \leqslant t_1, ..., \\ u_n v \leqslant t_n; v \leqslant s\end{array}\right\}} \cdots \int g(v) f_{1\ldots n}(u_1, ..., u_n) du_1 \ldots du_n dv =$$

$$= \int_0^s \left[g(v) \int_{-\infty}^{t_1/v} \ldots \int_{-\infty}^{t_n/v} f_{1\ldots n}(u_1, ..., u_n) du_1 ... du_n \right] dv.$$

Поэтому совместная плотность распределения семейства случайных величин $\xi_1\eta, ..., \xi_n\eta; \eta$ имеет вид:

$$h_{1\ldots n+1}(t_1, ..., t_n, s) := g(s) f_{1\ldots n}\left(\frac{t_1}{s}, ..., \frac{t_n}{s}\right) \frac{1}{s^n}.$$

Аналогично

$$h_{1\ldots\widehat{i}\ldots n+1}(t_1, ..., \widehat{t_i}, ..., t_n, s) = g(s) f_{1\ldots\widehat{i}\ldots n}\left(\frac{t_1}{s}, ..., \frac{\widehat{t_i}}{s}, ..., \frac{t_n}{s}\right) \frac{1}{s^{n-1}}.$$

Следовательно, условная плотность имеет вид

$$h_{i|1\ldots\widehat{i}\ldots n+1}(t_i | t_1, ..., \widehat{t_i}, ..., t_n, s) := f_{i|1\ldots\widehat{i}\ldots n}\left(\frac{t_i}{s} \;\Big|\; \frac{t_1}{s}, ..., \frac{\widehat{t_i}}{s}, ..., \frac{t_n}{s}\right) \frac{1}{s}.$$

Откуда следует утверждение леммы 2.

Доказательство теоремы 3. Обозначим $\zeta_i := \xi_i\eta$, $(i = 1, \ldots, n)$, а через $H_{1\ldots n+1}(\cdot, \cdots, \cdot)$ — функцию распределения случайного вектора ζ:

$$H_{1\ldots n+1}(x_1, \ldots, x_n, y) := \mathbb{P}\Big\{\xi_1\eta \leqslant x_1, \ldots, \xi_n\eta \leqslant x_n; \eta \leqslant y\Big\}.$$

Условную функцию распределения случайной величины $\zeta_i = \xi_i\eta$ относительно системы $\zeta_1, \ldots, \widehat{\zeta_i}, \ldots, \zeta_n; \eta$ будем обозначать через

$$H_{i|1\ldots\widehat{i}\ldots n+1}(x_i \mid x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_n, y).$$

Введем условные квантили

$$x_i = \tilde{q}^{\circ}_{i|1\ldots\widehat{i}\ldots n+1}(x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_n, y),$$

$$x_i = \tilde{q}^{\circ}_{i|1\ldots\widehat{i}\ldots\widehat{k}\ldots n+1}(x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, \widehat{x_k} \ldots, x_n, y),$$

$$x_k = \tilde{q}^{\circ}_{k|1\ldots\widehat{i}\ldots\widehat{k}\ldots n+1}(x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, \widehat{x_k} \ldots, x_n, y)$$

как решения соответствующих уравнений

$$H_{i|1\ldots\widehat{i}\ldots n+1}(x_i \mid x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_n, y) =$$

$$= H_{i|1\ldots\widehat{i}\ldots n+1}(x_i^\circ \mid x_1^\circ, \ldots, \widehat{x_i^\circ}, \ldots, x_n^\circ, y^\circ);$$

$$H_{i|1\ldots\widehat{i}\ldots\widehat{k}\ldots n+1} = (x_i \mid x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, \widehat{x_k}, \ldots, x_n, y) =$$

$$= H_{i|1\ldots\widehat{i}\ldots\widehat{k}\ldots n+1} = (x_i^\circ \mid x_1^\circ, \ldots, \widehat{x_i^\circ}, \ldots, \widehat{x_k^\circ}, \ldots, x_n^\circ, y);$$

$$H_{k|1\ldots\widehat{i}\ldots\widehat{k}\ldots n+1} = (x_k \mid x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, \widehat{x_k}, \ldots, x_n, y) =$$

$$= H_{k|1\ldots\widehat{i}\ldots\widehat{k}\ldots n+1} = (x_k^\circ \mid x_1^\circ, \ldots, \widehat{x_i^\circ}, \ldots, \widehat{x_k^\circ}, \ldots, x_n^\circ, y).$$

Используя лемму 2, эти уравнения можно переписать в виде

$$F_{i|1\ldots\widehat{i}\ldots n}\left(\frac{x_i}{y} \;\Big|\; \frac{x_1}{y}, \ldots, \frac{\widehat{x_i}}{y}, \ldots, \frac{x_n}{y}\right) =$$

$$= F_{i|1\ldots\widehat{i}\ldots n}\Big(\frac{x_i^\circ}{y^\circ}\Bigm|\frac{x_1^\circ}{y^\circ},\ldots,\widehat{\frac{x_i^\circ}{y^\circ}},\ldots,\frac{x_n^\circ}{y^\circ}\Big);$$

$$F_{i|1\ldots\widehat{i}\ldots\widehat{k}\ldots n}\Big(\frac{x_i}{y}\Bigm|\frac{x_1}{y},\ldots,\widehat{\frac{x_i}{y}},\ldots,\widehat{\frac{x_k}{y}}\ldots,\frac{x_n}{y}\Big)=$$

$$= F_{i|1\ldots\widehat{i}\ldots\widehat{k}\ldots n}\Big(\frac{x_i^\circ}{y^\circ}\Bigm|\frac{x_1^\circ}{y^\circ},\ldots,\widehat{\frac{x_i^\circ}{y^\circ}},\ldots,\widehat{\frac{x_k^\circ}{y^\circ}}\ldots,\frac{x_n^\circ}{y^\circ}\Big);$$

$$F_{k|1\ldots\widehat{i}\ldots\widehat{k}\ldots n}\Big(\frac{x_i}{y}\Bigm|\frac{x_1}{y},\ldots,\widehat{\frac{x_i}{y}},\ldots,\widehat{\frac{x_k}{y}}\ldots,\frac{x_n}{y}\Big)=$$

$$= F_{k|1\ldots\widehat{i}\ldots\widehat{k}\ldots n}\Big(\frac{x_i^\circ}{y^\circ}\Bigm|\frac{x_1^\circ}{y^\circ},\ldots,\widehat{\frac{x_i^\circ}{y^\circ}},\ldots,\widehat{\frac{x_k^\circ}{y^\circ}}\ldots,\frac{x_n^\circ}{y^\circ}\Big).$$

Эта система уравнений определяет условные квантили случайных величин $\xi_1,\ldots,\xi_n$:

$$\frac{x_i}{y}=q^\circ_{i|1\ldots\widehat{i}\ldots n}\Big(\frac{x_1}{y},\ldots,\widehat{\frac{x_i}{y}},\ldots,\frac{x_n}{y}\Big);$$

$$\frac{x_i}{y}=q^\circ_{i|1\ldots\widehat{i}\ldots\widehat{k}\ldots n}\Big(\frac{x_1}{y},\ldots,\widehat{\frac{x_i}{y}},\ldots,\widehat{\frac{x_k}{y}},\ldots,\frac{x_n}{y}\Big);$$

$$\frac{x_k}{y}=q^\circ_{k|1\ldots\widehat{i}\ldots\widehat{k}\ldots n}\Big(\frac{x_1}{y},\ldots,\widehat{\frac{x_i}{y}},\ldots,\widehat{\frac{x_k}{y}},\ldots,\frac{x_n}{y}\Big).$$

Сравнивая равенства для условных квантилей $\tilde{q}^\circ_{\cdot|\ldots}(\ldots)$ и $q^\circ_{\cdot|\ldots}(\ldots)$, получаем соотношения

$$\tilde{q}^\circ_{i|1\ldots\widehat{i}\ldots n+1}(x_1,\ldots,\widehat{x}_i,\ldots,x_n,y)=yq^\circ_{i|1\ldots\widehat{i}\ldots n}\Big(\frac{x_1}{y},\ldots,\widehat{\frac{x_i}{y}},\ldots,\frac{x_n}{y}\Big);$$

$$\tilde{q}^\circ_{i|1\ldots\widehat{i}\ldots\widehat{k}\ldots n+1}(x_1,\ldots,\widehat{x}_i,\ldots,\widehat{x_k}\ldots,x_n,y)=$$

$$=yq^\circ_{i|1\ldots\widehat{i}\ldots\widehat{k}\ldots n}\Big(\frac{x_1}{y},\ldots,\widehat{\frac{x_i}{y}},\ldots,\widehat{\frac{x_k}{y}},\ldots,\frac{x_n}{y}\Big);$$

$$\tilde{q}^\circ_{k|1\ldots\widehat{i}\ldots\widehat{k}\ldots n+1}(x_1,\ldots,\widehat{x}_i,\ldots,\widehat{x_k}\ldots,x_n,y)=$$

$$=yq^\circ_{k|1\ldots\widehat{i}\ldots\widehat{k}\ldots n}\Big(\frac{x_1}{y},\ldots,\widehat{\frac{x_i}{y}},\ldots,\widehat{\frac{x_k}{y}},\ldots,\frac{x_n}{y}\Big).$$

Отсюда, используя воспроизводимость условных квантилей вектора $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n)$, обозначая для краткости

$$\bar{\bar{x}}(y):=(x_1,\ldots,\widehat{x}_i,\ldots,\widehat{x_k},\ldots,x_n,y),$$

$$\overline{\overline{x/y}}:=\Big(\frac{x_1}{y},\ldots,\widehat{\frac{x_i}{y}},\ldots,\widehat{\frac{x_k}{y}},\ldots,\frac{x_n}{y}\Big),$$

получаем

$$\tilde{q}^\circ_{i|1\ldots\widehat{i}\ldots n+1}(x_1,\ldots,\widehat{x}_i,\ldots,\tilde{q}^\circ_{k|1\ldots\widehat{i}\ldots\widehat{k}\ldots n+1}(\bar{\bar{x}}(y)),\ldots,x_n,y)=$$

$$=yq^\circ_{i|1\ldots\widehat{i}\ldots n}\Big(\frac{x_1}{y},\ldots,\widehat{\frac{x_i}{y}},\ldots,q^\circ_{k|1\ldots\widehat{i}\ldots\widehat{k}\ldots n}(\overline{\overline{x/y}}),\ldots,\frac{x_n}{y}\Big)=$$

$$=\tilde{q}^\circ_{i|1\ldots\widehat{i}\ldots\widehat{k}\ldots n+1}(x_1,\ldots,\widehat{x}_i,\ldots,\widehat{x_k}\ldots,x_n,y).$$

Теорема доказана.

2. Построение треугольного преобразования независимости с помощью суперпозиций двумерных условных функций распределения

Рассмотрим треугольное преобразование независимости случайного вектора $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, который обладает свойством воспроизводимости условных квантилей при сужении на все условные квантили меньшей размерности:

$$\begin{cases} y_n = F_n^{-1}(F_{n|1\ldots n-1}(x_n \mid x_1, \ldots, x_{n-1})), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_k = F_k^{-1}(F_{k|1\ldots k-1}(x_k \mid x_1, \ldots, x_{k-1})), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_2 = F_2^{-1}(F_{2|1}(x_2 \mid x_1)), \\ y_1 = x_1. \end{cases}$$

Введем обозначения

$$\begin{cases} \eta_n := F_n^{-1}(F_{n|1\ldots n-1}(\xi_n \mid \xi_1, \ldots, \xi_{n-1})), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \eta_k := F_k^{-1}(F_{k|1\ldots k-1}(\xi_k \mid \xi_1, \ldots, \xi_{k-1})), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \eta_2 := F_2^{-1}(F_{2|1}(\xi_2 \mid \xi_1)), \\ \eta_1 := \xi_1. \end{cases} \tag{4}$$

Покажем, что систему независимых случайных величин $\eta_1, \ldots, \eta_n$ можно получить с помощью суперпозиций двумерных условных функций распределения.

Действительно, вначале рассмотрим систему $n-1$ случайных величин

$$\xi_{k|1}^{(1)} := F_{k|1}(\xi_k|\xi_1), \ k = 2, \ldots, n.$$

Затем на основе этой системы построим новую систему $n-2$ случайных величин

$$\xi_{k|2}^{(2)} := G_{k|2}^{(2)}(\xi_{k|1}^{(1)}|\xi_{2|1}^{(1)}), \ k = 3, \ldots, n,$$

где $G_{k|2}^{(2)}(\cdot|\cdot)$ — условная функция распределения случайной величины $\xi_{k|1}^{(1)}$ по случайной величине $\xi_{2|1}^{(1)}$.

На следующем шаге построим систему $n-3$ случайных величин

$$\xi_{k|3}^{(3)} := G_{k|3}^{(3)}(\xi_{k|2}^{(2)}|\xi_{3|2}^{(2)}), \ k = 4, \ldots, n,$$

где $G_{k|3}^{(3)}(\cdot|\cdot)$ — условная функция распределения случайной величины $\xi_{k|2}^{(2)}$ по случайной величине $\xi_{3|2}^{(2)}$.

Продолжая далее этот процесс, мы, наконец, получим случайную величину

$$\xi_{n|n-1}^{(n-1)} := G_{n|n-1}^{(n-1)}(\xi_{n|n-2}^{(n-2)}|\xi_{n-1|n-2}^{(n-2)}),$$

где $G_{n|n-1}^{(n-1)}(\cdot|\cdot)$ — условная функция распределения случайной величины $\xi_{n|n-2}^{(n-2)}$ по случайной величине $\xi_{n-1|n-2}^{(n-2)}$. Для унификации обозначений положим $G_{k|1}^{(1)}(\cdot|\cdot) := F_{k|1}(\cdot|\cdot), \ k = 2, 3, \ldots$.

Далее, применяя $n-2$ раза теорему 1, будем иметь

$$\xi_{k|2}^{(2)} = F_{k|12}(\xi_k|\xi_1,\xi_2), \;\; k=3,\dots,n;$$
$$\xi_{k|3}^{(3)} = F_{k|123}(\xi_k|\xi_1,\xi_2,\xi_3), \;\; k=4,\dots,n;$$
$$\dots$$
$$\xi_{n|n-1}^{(n-1)} = F_{n|1\dots n-1}(\xi_n \mid \xi_1,\dots,\xi_{n-1}).$$

Отсюда, используя соотношения (4), получаем рекуррентную систему равенств

$$\begin{cases} \eta_1 = \xi_1, \\ \eta_2 = F_2^{-1}(G_{2|1}^{(1)}(\xi_2|\eta_1)), \\ \eta_3 = F_3^{-1}(G_{3|2}^{(2)}(\xi_{3|1}^{(1)}|F_2(\eta_2))), \\ \eta_4 = F_4^{-1}(G_{4|3}^{(3)}(\xi_{4|2}^{(2)}|F_3(\eta_3))), \\ \dots \\ \eta_n = F_n^{-1}(G_{n|n-1}^{(n-1)}(\xi_{n|n-2}^{(n-2)}|F_{n-1}(\eta_{n-1}))). \end{cases} \tag{5}$$

Таким образом, мы получили систему независимых случайных величин $\eta_1,\dots,\eta_n$ с помощью суперпозиций только двумерных условных функций распределения.

Преобразование, определяемое рекуррентной системой равенств (5), можно рассматривать и для случайных векторов $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_n)$, которые не обладают свойством воспроизводимости условных квантилей. В таком случае это преобразование естественно называть *преобразованием парной независимости.*

3. Последовательности случайных величин, обладающих свойством воспроизводимости условных квантилей. Построение с помощью обновляющих последовательностей

Преобразование независимости (5) может быть использовано для построения последовательности случайных величин, обладающих свойством воспроизводимости условных квантилей.

В самом деле, рассмотрим бесконечную последовательность взаимно независимых неотрицательных случайных величин

$$\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_n,\dots$$

с общей функцией распределения $\mathbb{P}\{\eta_n \leqslant x\} = F(x)$. И пусть $G(\cdot|\cdot)$ — некоторая условная функция распределения.

Будем предполагать, что введенные функции $F(\cdot)$ и $G(\cdot|\cdot)$ обладают следующими свойствами:

$$\begin{aligned}
&F(x)=\int\limits_0^x f(t)dt,\ \ x\geqslant 0,\ \ f(t)>0,\ \ \forall t\in]0,+\infty[;\\
&G(F(y)|F(x))=H\left(\frac{y}{x}\right),\ \ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0;\\
&H(s)=\int\limits_0^s h(t)dt,\ \ s\geqslant 0,\ \ h(t)>0,\ \ \forall t\in]0,+\infty[,\\
&H(+\infty)=1.
\end{aligned}\tag{6}$$

Имея в виду соотношения предыдущего параграфа, будем считать выполненными следующие свойства однородности:

$$\begin{aligned}
&F_n(\cdot)=F(\cdot),\ \ \forall n=1,2,\dots;\\
&G^{(1)}_{k|1}(x_k|x_1)=G(F(x_k)|F(x_1)),\ \ \forall k=2,3,\dots;\\
&G^{(n-1)}_{n|n-1}(\cdot|\cdot)=G(\cdot|\cdot),\ \ \forall n=3,4\dots.
\end{aligned}$$

Обозначим через $G^{-1}(z|x)=y$ обращение условной функции распределения $z= G(r|s)$ по переменной r при каждом фиксированном s. В этих обозначениях систему (5) можно переписать в виде

$$\begin{cases}
\eta_1=\xi_1,\\
F(\eta_2)=G(F(\xi_2)|F(\eta_1)),\\
F(\eta_3)=G(G(F(\xi_3)|F(\eta_1))|F(\eta_2)),\\
\dots\\
F(\eta_n)=G(\dots G(G(F(\xi_n)|F(\eta_1))|F(\eta_2))\dots|F(\eta_{n-1})),\\
\dots.
\end{cases}$$

Тогда после обращения получаем

$$\begin{cases}
\xi_1=\eta_1,\\
\xi_2=F^{-1}\Big(G^{-1}\big(F(\eta_2)|F(\eta_1)\big)\Big),\\
\xi_3=F^{-1}\Bigg(G^{-1}\Big(G^{-1}\big(F(\eta_3)|F(\eta_2)\big)\Big|F(\eta_1)\Big)\Bigg),\\
\dots\\
\xi_n=F^{-1}\Bigg(G^{-1}\Bigg(G^{-1}\Big(\dots G^{-1}\big(F(\eta_n)|F(\eta_{n-1})\big)\dots\Big|F(\eta_2)\Big)\Bigg|F(\eta_1)\Bigg)\Bigg),\\
\dots.
\end{cases}$$

Учитывая предположения (6), будем иметь

$$F^{-1}\Big(G^{-1}\big(z|F(x)\big)\Big)=H^{-1}(z)x.$$

Поэтому

$$\begin{cases} \xi_1 = \eta_1, \\ \xi_2 = H^{-1}\big(F(\eta_2)\big)\eta_1, \\ \xi_3 = H^{-1}\Big(F\Big(H^{-1}\big(F(\eta_3)\big)\eta_2\Big)\Big)\eta_1, \\ \dots \\ \xi_n = H^{-1}\Bigg(F\Bigg(\dots H^{-1}\Big(F\Big(H^{-1}\big(F(\eta_n)\big)\eta_{n-1}\Big)\Big)\dots\eta_2\Bigg)\Bigg)\eta_1, \\ \dots . \end{cases} \tag{7}$$

Эту систему уравнений можно рассматривать в качестве "канонического" представления последовательности $\{\xi_n\}_{n=\overline{1,+\infty}}$ с помощью "обновляющей" последовательности независимых случайных величин $\{\eta_n\}_{n=\overline{1,+\infty}}$.

Покажем, что несмотря на принятые выше предположения однородности, которыми, вообще говоря, не обладает преобразование (5), последовательность случайных величин $\{\xi_n\}_{n=\overline{1,+\infty}}$ сохраняет свойство воспроизводимости условных квантилей при сужении на условные квантили меньшей размерности.

Теорема 4. Последовательность случайных величин $\{\xi_n\}_{n=\overline{1,+\infty}}$ обладает свойством воспроизводимости условных квантилей:

$$q^{\circ}_{n|1\dots n-1}(x_1, q^{\circ}_{2|1}(x_1), \dots, q^{\circ}_{n-1|1}(x_1)) = q^{\circ}_{n|1}(x_1). \tag{8}$$

Доказательство. Используя независимость членов "обновляющей" последовательности $\{\eta_n\}_{n=\overline{1,+\infty}}$, найдем выражения для условных функций распределения случайных величин ξ_k

$$F_{n|1\dots n-1}(x_n|x_1,\dots,x_{n-1}) = \mathbb{P}\Big\{\xi_n \leqslant x_n \mid \xi_1 = x_1; \dots; \xi_{n-1} = x_{n-1}\Big\} =$$

$$= \mathbb{P}\Bigg\{\eta_n \leqslant F^{-1}\left(H\left(F^{-1}\left(H\left(\dots F^{-1}\left(H\left(x_n\eta_1^{-1}\right)\right)\eta_2^{-1}\dots\right)\right)\eta_{n-1}^{-1}\right)\right) \Bigg|$$

$$\Bigg|\eta_1 = x_1;\ \eta_2 = F^{-1}\left(H\left(x_2\eta_1^{-1}\right)\right);\ \dots;$$

$$\eta_{n-1} = F^{-1}\left(H\left(F^{-1}\left(H\left(\dots F^{-1}\left(H\left(x_{n-1}\eta_1^{-1}\right)\right)\eta_2^{-1}\dots\right)\right)\eta_{n-2}^{-1}\right)\right)\Bigg\} =$$

$$= H\left(F^{-1}\left(H\left(\dots F^{-1}\left(H\left(x_n y_1^{-1}\right)\right)y_2^{-1}\dots\right)\right)y_{n-1}^{-1}\right), \tag{9}$$

где

$$y_1 = x_1;\ y_2 = F^{-1}\left(H\left(x_2 y_1^{-1}\right)\right);\ \dots;$$

$$y_{n-1} = F^{-1}\left(H\left(F^{-1}\left(H\left(\dots F^{-1}\left(H\left(x_{n-1}y_1^{-1}\right)\right)y_2^{-1}\dots\right)\right)y_{n-2}^{-1}\right)\right).$$

С другой стороны,

$$F_{k|1}(x_k|x_1) = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty H\left(F^{-1}\left(H\left(\dots F^{-1}\left(H\left(x_k x_1^{-1}\right)\right)y_2^{-1}\dots\right)\right)y_{k-1}^{-1}\right) \cdot$$

$$\cdot f(y_2)\dots f(y_{k-1})dy_2\dots dy_{k-1}, \qquad k = \overline{2,n}. \tag{10}$$

Введем вспомогательные функции

$$F_{1,k}(t) = \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty H\left(F^{-1}\left(H\left(\ldots F^{-1}\left(H\left(t\right)\right) y_2^{-1} \ldots\right)\right) y_{k-1}^{-1}\right) \cdot$$

$$\cdot f(y_2) \ldots f(y_{k-1}) dy_2 \ldots dy_{k-1}, \qquad k = \overline{2, n}.$$

Тогда

$$F_{k|1}(x_k|x_1) = F_{1,k}\left(\frac{x_k}{x_1}\right).$$

Так как ввиду (6) функции распределения $F(\cdot)$ и $H(\cdot)$ строго монотонно возрастают, то, вычисляя производные, легко убедиться в том, что и функции $F_{1,k}(t)$ также строго монотонно возрастают на полуоси $[0, +\infty[$.

Перейдем к вычислению условных квантилей. Из равенства (9) следует, что уравнение

$$F_{n|1\ldots n-1}(q^\circ_{n|1\ldots n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1})|x_1, \ldots, x_{n-1}) = F_{n|1\ldots n-1}(x^\circ_n|x^\circ_1, \ldots, x^\circ_{n-1}),$$

определяющее условную квантиль $q^\circ_{n|1\ldots n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1})$, проходящую через отмеченную точку $(x^\circ_1, \ldots, x^\circ_n)$, имеет вид

$$H\left(F^{-1}\left(H\left(\ldots F^{-1}\left(H\left(x_n x_1^{-1}\right)\right) y_2^{-1} \ldots\right)\right) y_{n-1}^{-1}\right) =$$

$$= H\left(F^{-1}\left(H\left(\ldots F^{-1}\left(H\left(x^\circ_n x_1^{\circ\,-1}\right)\right) y_2^{\circ\,-1} \ldots\right)\right) y_{n-1}^{\circ\,-1}\right), \tag{11}$$

где

$$\begin{aligned}
&y_2 = F^{-1}\left(H\left(x_2 x_1^{-1}\right)\right), \ y^\circ_2 = F^{-1}\left(H\left(x_2 x_1^{\circ\,-1}\right)\right); \\
&\ldots; \\
&y_{n-1} = F^{-1}\left(H\left(F^{-1}\left(H\left(\ldots F^{-1}\left(H\left(x_{n-1} x_1^{-1}\right)\right) y_2^{-1} \ldots\right)\right) y_{n-2}^{-1}\right)\right); \\
&y^\circ_{n-1} = F^{-1}\left(H\left(F^{-1}\left(H\left(\ldots F^{-1}\left(H\left(x^\circ_{n-1} x_1^{\circ\,-1}\right)\right) y_2^{\circ\,-1} \ldots\right)\right) y_{n-2}^{\circ\,-1}\right)\right).
\end{aligned}$$

Аналогично из равенства (10) и монотонности функций $F_{1,k}(t)$ следует, что уравнения

$$F_{k|1}(q^\circ_{k|1}(x_1)|x_1) = F_{k|1}(x^\circ_k|x^\circ_1)$$

имеют единственное решение

$$q^\circ_{k|1}(x_1) = \frac{x^\circ_k}{x^\circ_1} x_1; \quad k = \overline{2, n}.$$

Подставляя в уравнение (11) $x_k = \frac{x^\circ_k}{x^\circ_1} x_1$ $k = \overline{2, n}$, нетрудно убедиться в том, что

$$q^\circ_{n|1\ldots n-1}(x_1, q^\circ_{2|1}(x_1), \ldots, q^\circ_{n-1|1}(x_1)) = q^\circ_{n|1}(x_1).$$

Теорема доказана.

Пример 1. Рассмотрим последовательность случайных величин $\{\xi_n\}_{n=\overline{1,\infty}}$, для которой

$$F(x) = H(x), \ \ \forall x \in [0, +\infty[.$$

В этом случае соотношения (7) принимают вид

$$\begin{cases} \xi_1 = \eta_1, \\ \xi_2 = \eta_2\eta_1, \\ \xi_3 = \eta_3\eta_2\eta_1, \\ \ldots \\ \xi_n = \eta_n\eta_{n-1}\ldots\eta_2\eta_1, \\ \ldots . \end{cases} \qquad (12)$$

При этом выполняется марковское свойство

$$\xi_{n+1} = \xi_n\eta_{n+1}, \ n = 1, 2, \ldots \ .$$

Далее

$$F_{n|1\ldots n-1}(x_n|x_1, \ldots, x_{n-1}) = F\left(x_n x_{n-1}^{-1}\right);$$
$$q^\circ_{n|1\ldots n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = \frac{x_n^\circ}{x_{n-1}^\circ} x_{n-1};$$
$$F_{k|1}(x_k|x_1) = F_{1,k}\left(x_k x_1^{-1}\right);$$
$$q^\circ_{k|1}(x_1) = \frac{x_k^\circ}{x_1^\circ} x_1.$$

Таким образом, свойство (8) воспроизводимости условных квантилей тривиальным образом выполняется.

Заметим, что при выполнении условия

$$\mathbb{M}\{\eta_k\} = \int_0^\infty x dF(x) = 1$$

последовательность $\{\xi_n\}_{n=\overline{1,\infty}}$ образует мартингал (см. [9, с. 508]).

Пример 2. Рассмотрим последовательность случайных величин $\{\xi_n\}_{n=\overline{1,\infty}}$, для которой функции распределения $F(\cdot)$ и $H(\cdot)$ обладают следующим свойством:

$$\begin{array}{l} F^{-1}(H(ax)) = a^\rho F^{-1}(H(x)); \\ \forall x \geqslant 0; \ \ \forall a \geqslant 0; \ \ \rho = \text{const}. \end{array} \qquad (13)$$

Это означает, что функция $z = F^{-1}(H(x))$ является однородной функцией степени ρ. Нетрудно привести примеры функций $F(\cdot)$ и $H(\cdot)$, для которых выполняется свойство однородности (13):

$$\begin{array}{l} H(x) = 1 - \exp\left(-x^{1/\beta}\right), \ \ \beta = \text{const} > 0, \ \ x \in [0, +\infty[; \\ F(x) = 1 - \exp(-x), \ \ x \in [0, +\infty[. \end{array}$$

Действительно, в этом случае

$$\begin{array}{l} H^{-1}\left(F(x)\right) = x^\beta; \\ F^{-1}\left(H(x)\right) = x^{1/\beta}, \ \ \rho = 1/\beta. \end{array}$$

В качестве следствия соотношения (13) получаем

$$H^{-1}\left(F(ax)\right) = a^{1/\rho} H^{-1}\left(F(x)\right), \ \forall x \geqslant 0.$$

Или

$$H^{-1}\left(F(x\cdot 1)\right) = x^{1/\rho}C_1, \tag{14}$$

где

$$C_1 := H^{-1}\left(F(1)\right) = \text{const}.$$

Поэтому система уравнений (7) принимает вид

$$\begin{cases} \xi_1 = \eta_1, \\ \xi_2 = \eta_1 {\eta_2}^{\rho^{-1}} C_1, \\ \xi_3 = \eta_1 \eta_2^{\rho^{-1}} \eta_3^{\rho^{-2}} C_1^{1+\rho^{-1}}, \\ \dots \\ \xi_n = \eta_1 {\eta_2}^{\rho^{-1}} {\eta_3}^{\rho^{-2}} \dots \eta_n^{\rho^{-(n-1)}} C_1^{1+\rho^{-1}+\dots+\rho^{-(n-2)}}, \\ \dots . \end{cases} \tag{15}$$

При этом имеет место марковское свойство

$$\xi_{n+1} = \xi_n \eta_{n+1}^{\rho^{-n}} C_1^{\rho^{-(n-1)}},\ n = 1, 2, \dots .$$

Далее

$$\begin{aligned} &F_{n|1\dots n-1}(x_n|x_1,\dots,x_{n-1}) = F\left((x_n x_{n-1}^{-1})^{\rho^{n-1}} C_1^{\rho}\right); \\ &q^{\circ}_{n|1\dots n-1}(x_1,x_2,\dots,x_{n-1}) = \frac{x_n^{\circ}}{x_{n-1}^{\circ}} x_{n-1}; \\ &F_{k|1}(x_k|x_1) = F_{1,k}\left(x_k x_1^{-1}\right); \\ &q^{\circ}_{k|1}(x_1) = \frac{x_k^{\circ}}{x_1^{\circ}} x_1. \end{aligned}$$

Таким образом, как и в примере 1, свойство (8) воспроизводимости условных квантилей тривиальным образом выполняется.

Литература

[1] Годбийон К. Дифференциальная геометрия и аналитическая механика. М.: Мир, 1973. 188 с.

[2] Де Гроот М. Оптимальные статистические решения. М.: Мир, 1974. 491 с.

[3] Мартынов Г. В. Критерии омега-квадрат. М.: Наука, 1978. 80 с.

[4] Вероятность и математическая статистика/ Гл. ред. Ю.В. Прохоров, М.: Изд-во "Большая Российская энциклопедия", 1999. 910 с.

[5] Шатских С.Я. Об одном варианте преобразования независимости// Теория вероятностей и ее применения. 1992. Т. 37. Вып. 4. С. 815–816.

[6] Шатских С.Я. Об одном варианте преобразования независимости// Мера и интеграл. Самара: Изд-во Самарского университета, 1995. С. 99–112.

[7] Шатских С.Я. Об одном свойстве условной медианы// Мера и интеграл, Самара: Изд-во Самарского университета, 1988. С. 156–163.

[8] Шатских С.Я., Кнутова Е.М. Воспроизводимость условных квантилей многомерного распределения Стьюдента// Известия РАЕН, серия МММИУ. 1997. Т. 1. № 1. С. 36–58.

[9] Ширяев А.Н. Вероятность. М.: Наука, 1989. 640 с.

[10] Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. Т. 1, 2. М.: Фазис, 1998.

[11] Rosenblatt M. Remarks on a multivariate transformation// Ann. Math. Stat. 1952. V. 23. P. 470–472.

[12] Shatskih S.Ya. Multivariate Cauchy distributions as locally gaussian distributions// Journal of Math. Sciences. NY, 1996. V. 78. No. 1. P. 102–108.

TRANSFORMATION OF INDEPENDENCE OF THE FAMILY OF RANDOM VARIABLES WHICH POSSESS THE REPRODUCIBILITY OF CONDITIONAL QUANTILES[3]

© 2002 S.Ya. Shatskih[4]

The paper is devoted to the study of properties of transformation of independence of random vectors which possess the reproducibility property of conditional quantiles under restriction on conditional quantiles of smaller dimension. It is determined that for such random vectors triangular transformation of independence can be presented by using superposition of two-dimensional conditional distribution functions only. Inversions of such transformations are used for construction of sequence of random variables wich possess the reproducibility of conditional quantiles.

Поступила в редакцию 16/ V/2002;
в окончательном варианте — 31/ V/2002.

[3] Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. S.V. Astashkin.

[4] Shatskih Sergey Yakovlevich (`shatskih@ssu.samara.ru`), Dept. of Functional Analysis and Theory of Functions, Samara State University, Samara, 443011, Russia.