УДК 517.928

АНАЛОГ ЗАДАЧИ БИЦАДЗЕ–САМАРСКОГО ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЛЕРСТЕДТА В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ[1]

© 2002 Е.В. Филимонова[2]

Для уравнения Геллерстедта в неограниченной области исследован аналог задачи Бицадзе–Самарского, в которой краевое условие содержит линейную комбинацию обобщенных дробных интегродифференциальных операторов с гипергеометрической функцией Гаусса $F(a,b;c;x)$ в ядре.

1. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение смешанного типа

$$LU = \operatorname{sgn} y\, |y|^m\, U_{xx} + U_{yy} = 0, \qquad m > 0 \tag{1.1}$$

в области $D \quad (x > 0)$, ограниченной осью $y \quad (y > 0)$ и характеристикой

$$\xi = x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 0$$

уравнения (1.1).

Примем следующие обозначения:
D_1 и D_2 — эллиптическая и гиперболическая части смешанной области D соответственно;
I — полубесконечный интервал $0 < x < +\infty$ прямой $y = 0$;
$\Theta_0(x)$ — аффикс точки пересечения характеристики уравнения (1.1), выходящей из точки $x \in I$ с характеристикой $\xi = 0$;
$(I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta} f)(x)$ — обобщенный оператор дробного интегродифференцирования [1,2].
$(I_{0+}^{\alpha} f)(x)$ и $(D_{0+}^{\alpha} f)(x)$ — операторы дробного интегродифференцирования в смысле Римана–Лиувилля [2].

При $y > 0$ положим $R = \sqrt{x^2 + \dfrac{4}{(m+2)^2} y^{m+2}}$.

Аналог задачи БС (Бицадзе – Самарского). Найти функцию $U(x,y)$ со следующими свойствами:

1) $LU \equiv 0$ в области $D = D_1 \cup D_2$;

2) $U(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(\overline{D} \setminus I) \cap C^2(D \setminus I)$;

3) $\lim\limits_{R \to +\infty} U(x,y) = 0 \qquad (x \geqslant 0,\ y \geqslant 0)$;

---

[1] Представлена доктором физико-математических наук профессором О.П. Филатовым.

[2] Филимонова Екатерина Вадимовна, кафедра уравнений математической физики Самарского государственного университета, 443011, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

4) $U(0,y)=0 \quad (y\geqslant 0)$;

5) $U(x,+0)=U(x,-0) \quad (x\in\overline{I})$,

$\lim\limits_{y\to 0+0} U_y(x,y)=\lim\limits_{y\to 0-0} U_y(x,y) \quad (x\in I)$;

6) $A(I_{0+}^{a,b,\beta-a-1}U[\Theta_0(t)])(x)+B(I_{0+}^{a+\beta,b,\beta-a-1}U(t,0))(x)+$

$+C(I_{0+}^{a+1-\beta,b+2\beta-1,\beta-a-1}U_y(t,0))(x)=\psi(x) \quad (x>0)$,

где $\beta=\dfrac{m}{2m+4}$, $\psi(x)$ — заданная функция, удовлетворяющая при любых конечных значениях x условию Гельдера порядка λ на $[0,\infty)$,

$$\max\{a+\beta,1-2\beta\}<\lambda\leqslant 1, \tag{1.2}$$

a,b,A,B,C — действительные постоянные, такие, что

$$\max\{\beta-1,-\beta\}<a<1-\beta, \qquad b>0, \tag{1.3}$$

$$A>0,B>0,C<0 \quad \text{или} \quad A<0,B<0,C>0. \tag{1.4}$$

2. Единственность решения задачи БС

Соотношение между $\tau(x)=U(x,+0)$ и $\nu_+(x)=\lim\limits_{y\to 0+0}U_y(x,y)$, принесенное из области эллиптичности D_1 уравнения (1.1) на линию $y=0$, $0<x<\infty$, имеет вид [3]

$$\tau(x)=-k_1\int\limits_0^{+\infty}\nu_+(t)[|x-t|^{-2\beta}-(x+t)^{-2\beta}]dt, \tag{2.1}$$

$$k_1=\frac{1}{4\pi}(\frac{4}{m+2})^{2\beta}\frac{\Gamma^2(\beta)}{\Gamma(2\beta)}.$$

Используя решение задачи Коши для уравнения (1.1) в области D_2 [3]

$$U(x,y)=\gamma_1\int\limits_0^1\tau[x+\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(2t-1)](t-t^2)^{\beta-1}dt+$$

$$+(\frac{4}{m+2})^{1-2\beta}\gamma_2 y\int\limits_0^1\nu_-[x+\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(2t-1)](t-t^2)^{-\beta}dt, \tag{2.2}$$

$$\gamma_1=\frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)}, \qquad \gamma_2=\frac{1}{2}(\frac{4}{m+2})^{2\beta}\frac{\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)},$$

можем записать [4]

$$U[\Theta_0(x)]=\gamma_1\Gamma(\beta)(I_{0+}^{\beta,0,\beta-1}\tau(t))(x)-\gamma_2\Gamma(1-\beta)(I_{0+}^{1-\beta,2\beta-1,\beta-1}\nu_-(t))(x), \tag{2.3}$$

где

$$\nu_-(x)=\lim_{y\to 0-0}U_y(x,y).$$

Подставив (2.3) в краевое условие 6), на основании формулы [5,6]

$$(I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta}(I_{0+}^{\gamma,\delta,\alpha+\eta}f)(t))(x)=(I_{0+}^{\alpha+\gamma,\beta+\delta,\eta}f)(x) \qquad (\gamma>0)$$

и применения к полученному выражению обратного оператора

$$[(I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta}f)(x)]^{-1}=(I_{0+}^{-\alpha,-\beta,\alpha+\eta}f)(x)$$

найдем функциональное соотношение между $\tau(x)=U(x,-0)$ и $\nu_-(x)$, принесенное из области гиперболичности D_2 уравнения (1.1) на линию $y=0$, $0<x<\infty$:

$$\tau(x)=\frac{A\gamma_2\Gamma(1-\beta)-C}{A\gamma_1\Gamma(\beta)+B}(I_{0+}^{1-2\beta}\nu_-(t))(x)+\frac{1}{A\gamma_1\Gamma(\beta)+B}(I_{0+}^{-a-\beta,-b,2\beta-1}\psi(t))(x). \quad (2.4)$$

Из (2.4) нетрудно выразить $\nu_-(x)$:

$$\nu_-(x)=\frac{A\gamma_1\Gamma(\beta)+B}{A\gamma_2\Gamma(1-\beta)-C}(D_{0+}^{1-2\beta}\tau(t))(x)-$$
$$-\frac{1}{A\gamma_2\Gamma(1-\beta)-C}(D_{0+}^{1-2\beta}(I_{0+}^{-a-\beta,-b,2\beta-1}\psi)(t))(x). \quad (2.5)$$

Лемма 1. Если функция $U(x,y)$ — решение уравнения (1.1) в области D_2 таково, что $\tau(x)$ достигает наибольшего положительного (наименьшего отрицательного) значения в точке $x=x_0$, $0<x_0<+\infty$, при этом $\psi(x)\equiv 0$, $A>0$, $B>0$, $C<0$ или $A<0$, $B<0$, $C>0$, то $\nu_-(x_0)>0$ $(\nu_-(x_0)<0)$.

Доказательство леммы 1 непосредственно следует из формулы (2.5) и принципа экстремума для операторов дробного дифференцирования [7].

Перейдем к доказательству единственности решения задачи БС.

Пусть D_{1R} — конечная область, ограниченная в области D_1 "нормальной" кривой Г: $x^2+\frac{4}{(m+2)^2}y^{m+2}=R^2$ и отрезками: $\widetilde{\gamma}_1:\ y=0,\ x\geqslant 0;$ $\widetilde{\gamma}_2:\ x=0,\ y\geqslant 0$.

Справедлива следующая

Теорема 1. Решение задачи БС единственно в классе функций, представимых в области D_2 по формуле (2.2) решения задачи Коши, если $A>0$, $B>0$, $C<0$ или $A<0$, $B<0$, $C>0$.

Доказательство. Пусть $U(x,y)$ — решение однородной задачи БС и, следовательно, ему присущи свойства 3) – 6) этой задачи, причем $\psi(x)=0$, $x\geqslant 0$. Покажем, что $U(x,y)\equiv 0$ в $\overline{D}_1$. Допустим, что это не так. Тогда найдется такая область D_{1R}, в которой $U(x,y)\not\equiv 0$. Следовательно, $\max\limits_{\overline{D}_{1R}}|U|>0$. Без ограничения общности можно считать, что $\max\limits_{\overline{D}_{1R}}|U|=\max\limits_{\overline{D}_{1R}}U>0$. Поскольку $U(0,y)\equiv 0$ при $y\geqslant 0$, то он не должен достигаться на $\widetilde{\gamma}_2$, и в силу хорошо известного свойства эллиптических уравнений [8] он должен достигаться на отрезке $\widetilde{\gamma}_1$ в некоторой его внутренней точке $(x_0,0)$. Но тогда в силу леммы типа леммы К.И. Бабенко [9] должно быть $\nu_+(x_0)=$ $=\lim\limits_{y\to 0+0}U_y(x_0,y)<0$, что противоречит $\nu_-(x_0)>0$ в силу леммы 1. Следовательно, $\max U$ должен достигаться на Г. Отсюда $\lim\limits_{R\to\infty}|U|\neq 0$, что противоречит условию 3) задачи БС. Поэтому $U(x,y)\equiv 0$ в $\overline{D}_1$ и, в частности, $U(x,+0)=\tau(x)\equiv 0$ на прямой $y=0$, $x\geqslant 0$. Но тогда из (2.5) следует, что $\nu_-(x)\equiv 0$, и на основании формулы (2.2) получаем, что $U(x,y)\equiv 0$ и в области $\overline{D}_2$. Тем самым теорема 1 доказана.

3. Сведение задачи БС к интегральному уравнению абелева типа и его решение

Исключая $\tau(x)$ из уравнений (2.1) и (2.4), вводя обозначение $\nu(x) = \nu_+(x) = \nu_-(x)$, будем иметь

$$k_1 \int_0^{+\infty} [|x-t|^{-2\beta} - (x+t)^{-2\beta}]\nu(t)dt + \gamma_3 \int_0^x (x-t)^{-2\beta}\nu(t)dt = f(x), \tag{3.1}$$

где

$$\gamma_3 = \frac{A\gamma_2\Gamma(1-\beta) - C}{[A\gamma_1\Gamma(\beta) + B]\Gamma(1-2\beta)},$$
$$f(x) = -\frac{1}{A\gamma_1\Gamma(\beta) + B}(I_{0+}^{-a-\beta,-b,2\beta-1}\psi(t))(x).$$

Применив к обеим частям (3.1) оператор $\Gamma(2\beta)D_{0+}^{1-2\beta}$, после вычислений получим уравнение

$$\nu(x) + \lambda_1 \int_0^{\infty} \left(\frac{t}{x}\right)^{1-2\beta} \left[\frac{1}{t-x} - \frac{1}{t+x}\right] \nu(t)dt = F(x), \tag{3.2}$$

где

$$\lambda_1 = \frac{k_1}{k_1\pi\ \mathrm{tg}\pi\beta + \dfrac{A\gamma_2\Gamma(1-\beta) - C}{A\gamma_1\Gamma(\beta) + B} * \dfrac{\pi}{\sin 2\pi\beta}},$$

$$F(x) = \frac{\Gamma(2\beta)}{k_1\pi\ \mathrm{tg}\pi\beta + \dfrac{A\gamma_2\Gamma(1-\beta) - C}{A\gamma_1\Gamma(\beta) + B} * \dfrac{\pi}{\sin 2\pi\beta}}(D_{0+}^{1-2\beta}f(t))(x).$$

Для дальнейшего нам потребуются две леммы, доказанные в работе [10].

Лемма 2. Пусть $0 < -\alpha < \lambda \leqslant 1$ и $\beta < \min[0, \eta+1]$. Если $\varphi(x) \in H^\lambda[0,1]$, то

$$(I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta}\varphi)(x) \in H^{\min[\lambda+\alpha,-\beta]}[0,1].$$

Лемма 3. Пусть $0 < \alpha < \lambda < 1$, $\lambda - \alpha < 1$ и $\rho(x) = x^\mu$, где $0 \leqslant \mu < \lambda - \alpha + 1$. Если $\varphi(x) \in H_0^\lambda(\rho; [0,1])$, то

$$(D_{0+}^\alpha\varphi)(x) \in H_0^{\lambda-\alpha}(\rho; [0,1]).$$

Здесь $H^\lambda[0,1]$ $(0 < \lambda \leqslant 1)$ — пространство функций, удовлетворяющих на отрезке $[0, 1]$ условию Гельдера фиксированного порядка λ, а $H_0^\lambda[0,1]$ — его подпространство [2]:

$$H_0^\lambda[0,1] = \{\varphi(x) \in H^\lambda[0,1]; \varphi(0) = \varphi(1) = 0\}.$$

Перейдем к исследованию функции $F(x)$.

Так как $\psi(x) \in H^\lambda[0,1]$, $0 < a+\beta < \lambda \leqslant 1$, $b > 0$, то на основании леммы 2

$$(I_{0+}^{-a-\beta,-b,2\beta-1}\psi(t))(x) \in H^{\min[\lambda-a-\beta,b]}[0,1]. \tag{3.3}$$

Далее, поскольку $f(0) = 0$, $0 < 1-2\beta < \lambda < 1$, $\lambda + 2\beta - 1 < 1$, то на основании леммы 3 и (3.3)

$$(D_{0+}^{1-2\beta}f(t))(x) \in H_0^{\min[\lambda-a-\beta,b]+2\beta-1}[0,1]. \tag{3.4}$$

Опираясь на (3.4), нетрудно показать, что функция $F(x)$ при любых конечных значениях x удовлетворяет условию Гельдера на $[0, \infty)$.

Теперь будем искать решение уравнения (3.2) в классе функций, ограниченных при $x \to \infty$ и обращающихся в бесконечность интегрируемого порядка при $x = 0$.

Используя результат работы [3], выпишем явный вид решения уравнения (3.2)

$$\nu(x) = \frac{1}{1+\lambda_1^2\pi^2}\left[F(x) - \lambda_1 \int\limits_0^\infty \left(\frac{t}{x}\right)^{\frac{1}{2}-\beta} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{t+x}\right) F(t)dt\right]. \qquad (3.5)$$

Отсюда нетрудно заключить, что функция $\nu(x)$ обладает теми же свойствами, что и функция $F(x)$.

Таким образом, справедлива

Теорема 2. Пусть $\psi(x)$ — заданная функция, удовлетворяющая условию Гельдера порядка λ при любых конечных значениях $x \in [0, +\infty)$; выполняются неравенства (1.2) – (1.4), и решение уравнения (3.2) имеет вид (3.5).

Тогда решение задачи БС для уравнения (1.1) существует и единственно.

Литература

[1] Saigo M. // Math Rep. Kyushu Univ. 1978. V.11. No.2. P. 135–143.

[2] Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск, 1987. 688 с.

[3] Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. М., 1985. 304 с.

[4] Килбас А.А., Репин О.А. // Дифференциальные уравнения. 1998. Т.34. № 6. С. 799–805.

[5] Saigo M. // Math. Japan. 1979. Vol.24. № 4. P. 377–384.

[6] Репин О.А. Краевые задачи со смещением для уравнений гиперболического и смешанного типов. Саратов, 1992. 161 с.

[7] Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. М., 1995. 301 с.

[8] Олейник О.А. // Мат. сб. 1952. Т.30 (72). Вып.3. С. 695–702.

[9] Лернер М.Е., Репин О.А. // Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск. Изд-во Института математики. 1998. С. 63–78.

[10] Saigo M., Kilbas A.A. // Transform Methods and Special Functions. Sofia. 1995. P. 282–293.

AN ANALOG OF BITSADZE–SAMARSKI PROBLEM FOR GELLERSTEDT EQUATION IN UNBOUNDED RANGE[3]

© 2002 K.V. Filimonova[4]

An analog of Bitsadze–Samarski problem had been investigated for Gellerstedt equation in unbounded range, when boundary condition contains linear combination of generalized fractional integro-differential operators with the Gauss hypergeometric function $F(a, b; c; x)$ in the kernel.

Поступила в редакцию $8/IV/2002$;
в окончательном варианте — $30/V/2002$.

[3] Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. O.P. Filatov.

[4] Filimonova Kate Vadimovna, Dept. of Partial Differential Equations, Samara State University, Samara, 443011, Russia.