УДК 517.928

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ В ТЕОРЕМАХ УСРЕДНЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

© 2002 О.П. Филатов[1]

Для дифференциальных включений с медленными переменными и с управлением доказано, что основные условия в теоремах усреднения являются необходимыми.

1. Постановка задачи

Рассмотрим дифференциальное включение с управлением

$$\dot{x} \in \mu F\big(t, x, u(t), \mu\big), \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

где управление $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ принадлежит множеству функций U, определенных в промежутке $\mathbb{R}_+$, малый параметр $\mu \in [0, a]$. Отображение $F : D \to Kv(\mathbb{R}^m)$ определено на множестве $D = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times [0, a]$, $a > 0$ и принимает компактные и выпуклые значения из евклидова пространства $\mathbb{R}^m$ со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и соответствующей нормой $||\cdot||^2 = \langle\cdot,\cdot\rangle$.

Под решением задачи (1) понимается абсолютно непрерывная функция

$$x : [0, 1/\mu] \to \mathbb{R}^m,$$

определенная на отрезке $[0, 1/\mu]$, $\mu > 0$, удовлетворяющая почти всюду по $t \in [0, 1/\mu]$ дифференциальному включению (1) и начальному условию $x(0) = x_0$ для данного управления $u \in U$. Множество всех таких решений обозначим $X(x_0, u, \mu)$.

Наряду с (1) рассмотрим еще одну задачу

$$\dot{y} \in \mu F_0\big(t, y, v(t), \mu\big), \quad y(0) = x_0 \tag{2}$$

с тем же начальным вектором $x_0 \in \mathbb{R}^m$, что и в (1). Здесь управление $v : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ принадлежит множеству функций V и отображение $F_0 : D \to Kv(\mathbb{R}^m)$.

Множество решений задачи (2) для данного управления $v \in V$, определенных на отрезке $[0, 1/\mu]$, обозначим $Y(x_0, v, \mu)$.

Определение 1. Задача (2) аппроксимирует снизу задачу (1), если $\forall \varepsilon > 0$ $\forall x_0 \in \mathbb{R}^m$ $\exists \mu_0 > 0$ $\forall \mu \in (0, \mu_0]$ $\forall v \in V$ $\forall y \in Y(x_0, v, \mu)$ $\exists u \in U$ и существует такое решение $x \in X(x_0, u, \mu)$, что выполняется неравенство

$$||y(t) - x(t)|| \leqslant \varepsilon \quad \forall t \in [0, 1/\mu].$$

[1] Филатов Олег Павлович (filt@ssu.samara.ru), кафедра уравнений математической физики Самарского государственного университета, 443011, Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

Если одновременно задача (1) аппроксимирует снизу задачу (2), то будем говорить, что задача (2) взаимно аппроксимирует задачу (1).

Основная цель данной статьи заключается в том, чтобы при общих требованиях на отображения $F, F_0 : D \to Kv(\mathbb{R}^m)$ доказать необходимость основных условий, которые формулируются в терминах средних (см. п. 2) для задач аппроксимации в смысле определения 1.

Заметим, что достаточность указанных условий для дифференциальных включений с управлением доказана в [3], где рассматривался более общий случай систем дифференциальных включений с быстрыми и медленными переменными и поэтому основные условия формулировались в несколько усиленной форме.

Сама постановка задач связана с теорией усреднения дифференциальных включений [1, 2] и восходит к принципу усреднения Н.Н. Боголюбова [5] для обыкновенных дифференциальных уравнений с медленными переменными.

2. Общие и основные предположения

Пусть $B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^m : \|x - x_0\| < r\}$ — шар с центром в точке $x_0 \in \mathbb{R}^m$ радиуса $r > 0$. Для ограниченных множеств $A, C \subset \mathbb{R}^m$ полуотклонение первого множества от второго обозначим

$$\beta(A, C) = \inf_{r>0}\{A \subset C + B(0, r)\},$$

где $C + B = \{c + b : c \in C, b \in B\}$ — алгебраическая сумма множеств C и B. Отклонение по Хаусдорфу множеств A и C обозначается $\alpha(A, C) = \max\{\beta(A, C), \beta(C, A)\}$.

Введем класс $L(D, U)$ таких отображений $F : D \to Kv(\mathbb{R}^m)$, которые удовлетворяют следующим условиям:

а) для любого $x \in \mathbb{R}^m$ существует $r(x) > 0$ такое, что

$$F(t, x, u, \mu) \subset B\big(x, r(x)\big) \quad \forall (t, x, u, \mu) \in D;$$

б) для каждого управления $u \in U$ отображение $F\big(\cdot, x, u(\cdot), \mu\big)$ является измеримым при любых $(x, \mu) \in \mathbb{R}^m \times [0, a]$;

в) для отображения F существует постоянная Липшица $l > 0$ такая, что

$$\alpha\big(F(t, x, u, \mu), F(t, y, u, \mu)\big) \leqslant l\|x - y\|$$

для любых $(t, x, u, \mu) \in D, y \in \mathbb{R}^m$;

г) для любого компакта $K \subset \mathbb{R}^m$ отображение $F(t, x, u, \cdot)$ непрерывно по параметру μ в точке $\mu = 0$:

$$\lim_{\mu \to 0} \alpha\big(F(t, x, u, \mu), F(t, x, u, 0)\big) = 0$$

равномерно по $(t, x, u) \in \mathbb{R}_+ \times K \times \mathbb{R}^n$.

Переходим к основным условиям в задачах аппроксимации.

Рассмотрим объединение средних

$$M_F(x_0, U, \Delta) = \bigcup_{u \in U} \frac{1}{\Delta} \int_0^{\Delta} F\big(t, x_0, u(t), 0\big)\, dt$$

по всевозможным управлениям $u \in U$, при этом интеграл вычисляется при фиксированном $x_0 \in R^m$ и $\mu = 0$.

В задаче аппроксимации снизу требуется, чтобы

$$\lim_{\Delta\to\infty} \beta\big(M_{F_0}(x_0, V, \Delta), M_F(x_0, U, \Delta)\big) = 0 \tag{3}$$

для любого начального вектора $x_0 \in \mathbb{R}^m$.

В задаче о взаимной аппроксимации полуотклонение β в (3) заменяется на отклонение по Хаусдорфу α. Таким образом, должно выполняться условие

$$\lim_{\Delta\to\infty} \alpha\big(M_{F_0}(x_0, V, \Delta), M_F(x_0, U, \Delta)\big) = 0 \tag{4}$$

для любого вектора $x_0 \in \mathbb{R}^m$.

3. Основные результаты

Теорема 1. Пусть $F \in L(D, U)$, $F_0 \in L(D, V)$. Тогда задача (2) аппроксимирует снизу задачу (1) тогда и только тогда, когда выполняется условие (3).

Поскольку условие (4) влечет (3), а также предельное равенство

$$\lim_{\Delta\to\infty} \beta\big(M_F(x_0, U, \Delta), M_{F_0}(x_0, V, \Delta)\big) = 0$$

для любого начального вектора $x_0 \in \mathbb{R}^m$, то из теоремы 1 непосредственно следует критерий взаимной аппроксимации.

Теорема 2. Пусть $F \in L(D, U)$, $F_0 \in L(D, V)$. Тогда задача (2) взаимно аппроксимирует задачу (1) тогда и только тогда, когда выполняется условие (4).

Замечание. В теоремах 1, 2 для простоты формулировок область изменения фазовых переменных совпадает со всем пространством $\mathbb{R}^m$. В более общем случае такая область должна быть инвариантной относительно всех решений задач (1), (2).

Приведенные результаты примыкают к теории усреднения дифференциальных включений [1, 2].

В [3] для дифференциальных включений с быстрыми и медленными переменными с управлением было показано, что условия вида (3), (4) (в несколько усиленной форме) являются достаточными в соответствующих задачах усреднения.

Заметим, что если отображения F и F_0 являются векторнозначными и не зависят от управлений, то условия (3) и (4) совпадают. Этот случай реализуется для обыкновенных дифференциальных уравнений с медленными переменными. Для этой ситуации в [4] было установлено, что если соответствующие задачи аппроксимируют друг друга, то средние от правых частей дифференциальных уравнений по времени t в промежутке $[0, \infty)$ при равных и фиксированных значениях фазовых переменных должны совпадать (обращение принципа усреднения Н.Н. Боголюбова [5]).

4. Доказательство теоремы 1

Допустим, что задача (2) аппроксимирует снизу задачу (1) и условие (3) не выполняется. Тогда существуют начальный вектор $x_0 \in \mathbb{R}^m$, число $\varepsilon > 0$ и последовательность $\{\Delta_n\} \to \infty$ при $n \to \infty$ такие, что

$$\beta\big(M_{F_0}(x_0, V, \Delta_n), M_F(x_0, U, \Delta_n)\big) > \varepsilon_0$$

для любого $n = 1, 2, \ldots$. Отсюда следует, что для некоторой последовательности управлений $\{v_n\}, v_n \in V$ выполняется неравенство

$$\beta\left(\frac{1}{\Delta_n}\int_0^{\Delta_n} F_0(t, x_0, v_n(t), 0)\,dt, M_F(x_0, U, \Delta_n)\right) > \varepsilon_0 \tag{5}$$

при любом $n = 1, 2, \ldots$. Заметим теперь, что для произвольного решения задачи (1) $x \in X(x_0, u, \mu)$ по формуле Ньютона–Лейбница

$$x(t) = x_0 + \mu\int_0^t \dot{x}(t)\,dt,$$

где $\dot{x}(t) \in F\big(t, x(t), u(t), \mu\big)$. Поскольку

$$\alpha\left(F\big(t, x(t), u(t), \mu\big), F\big(t, x_0, u(t), \mu\big)\right) \leqslant l_1\|x(t) - x_0\|, \tag{6}$$

где l_1 — постоянная Липшица для отображения $F \in L(D, U)$, то выполняется включение

$$\dot{x}(t) \in F\big(t, x_0, u(t), \mu\big) + B(0, l_1\|x(t) - x_0\|),$$

а значит

$$\|\dot{x}(t)\| \leqslant r_1(x_0) + l_1\|x(t) - x_0\|,$$

где $r_1(x_0)$ берется из условия а) для отображения $F \in L(D, U)$. Следовательно,

$$\|x(t) - x_0\| \leqslant \mu\int_0^t (r_1(x_0) + l\|x(t) - x_0\|)\,dt.$$

Так как решение рассматривается на отрезке $[0, 1/\mu]$, то отсюда по лемме Гронуолла – Беллмана получим априорную оценку

$$\|x(t) - x_0\| \leqslant r_1(x_0)\exp(l_1), \quad t \in [0, 1/\mu],$$

которая совместно с (7) позволяет сделать вывод, что

$$F\big(t, x(t), u(t), \mu\big) \subset B\big(x_0, r_1(x_0)\big) + B\big(0, l_1 r_1(x_0)\exp(l)\big) = B(x_0, m_1),$$

где

$$m_1 = r_1(x_0)\big(1 + l_1\exp(l_1)\big).$$

Аналогичный вывод получим и для отображения F_0 из задачи (2):

$$F_0\big(t, y(t), v(t), \mu\big) \subset B(x_0, m_2),$$

где $m_2 = r_2(x_0)(1 + l_2\exp(l_2)$. Здесь l_2 — постоянная Липшица из условия в), а функция $r_2(x_0)$ — из условия а) для отображения $F_0 \in L(D, V)$.

Положим $m_0 = \max\{m_1, m_2\}$. Тогда, если в качестве компакта

$$K = K(x_0) \subset \mathbb{R}^m$$

из условия г) для отображений $F \in L(D, U), F_0 \in L(D, V)$ взять замыкание шара $B(x_0, m_0)$, то из (5) следует, что для некоторого $\mu_1 > 0$ и любого $\mu \in (0, \mu_1]$ выполняется неравенство

$$\beta\left(\frac{1}{\Delta_n}\int_0^{\Delta_n} F_0\big(t, x_0, v_n(t), \mu\big)\,dt, \bigcup_{u\in U}\frac{1}{\Delta}\int_0^{\Delta} F\big(t, x_0, u(t), \mu\big)\,dt\right) > \varepsilon_0.$$

Отсюда следует существование измеримого по $t \in R_+$ селектора

$$f_n(t, x_0, \mu) \in F_0\big(t, x_0, v_n(t), \mu\big),$$

для которого

$$\rho\left(\frac{1}{\Delta_n}\int_0^{\Delta_n} f_n(t, x_0, \mu)\,dt, \bigcup_{u\in U}\frac{1}{\Delta}\int_0^{\Delta} F\big(t, x_0, u(t), \mu\big)\,dt\right) > \varepsilon_0, \tag{7}$$

где $\rho(a, A)$ — расстояние от точки $a \in \mathbb{R}^m$ до множества $A \subset \mathbb{R}^m$.

Пусть

$$f_n(t, x, \mu) \in F_0\big(t, x, v_n(t), \mu\big)$$

— ближайшая к $f_n(t, x_0, \mu)$ точка. Тогда согласно [6, теорема 31, с. 207] функция $f_n(t, x, \mu)$ является непрерывной по $x \in \mathbb{R}^m$ и измеримой по $t \in \mathbb{R}_+$ для любого фиксированного $x \in \mathbb{R}^m$.

Поскольку

$$||f_n(t, x, \mu) - f_n(t, x_0, \mu)|| \leqslant l||x - x_0||,$$

то существует $0 < \delta_0 < m_0$ такое, что если произвольные непрерывные функции $x, y : [0, \Delta_n] \to \mathbb{R}^m$ удовлетворяют неравенствам

$$||x(t) - x_0|| \leqslant \delta_0, \quad ||y(t) - x_0|| \leqslant \delta_0$$

при любом $t \in [0, \Delta_n]$, то из (7) следует соотношение

$$\rho\left(\frac{1}{\Delta_n}\int_0^{\Delta_n} f_n(t, y(t), \mu)\,dt, \bigcup_{u\in U}\frac{1}{\Delta_n}\int_0^{\Delta_n} F\big(t, x(t), u(t), \mu\big)\,dt\right) > \varepsilon_0/2. \tag{8}$$

Задача Коши

$$\dot{y} = f_n(t, y, \mu), \quad y(0) = x_0$$

имеет некоторое решение $y_n(t)$, определенное на отрезке $[0, 1/\mu]$. По условию задача (2) аппроксимирует снизу задачу (1), поэтому для заданной точности аппроксимации

$$0 < \varepsilon < \delta_0\varepsilon_0/(2m_0) \tag{9}$$

существует $\mu_0 = \mu_0(\varepsilon) > 0$ и найдется решение $x_n(t)$ задачи (1), для которого

$$||x_n(t) - y_n(t)|| \leqslant \varepsilon \quad \forall t \in [0, 1/\mu], \tag{10}$$

где $\mu \in (0, \mu_0]$. Теперь выберем число Δ_n настолько большим, чтобы

$$\delta_0/(m_0\Delta_n) < \mu_0,$$

и положим в задачах (1), (2)

$$\mu = \delta_0/(m_0\Delta_n). \tag{11}$$

Тогда для любого $t \in [0, \Delta_n] \subset [0, 1/\mu]$ будут выполнены оценки

$$||x_n(t) - x_0|| \leqslant \mu m_0\Delta_n = \delta_0, \quad ||y_n(t) - x_0|| \leqslant \delta_0.$$

Следовательно, для функций $x(t) = x_n(t), y(t) = y_n(t)$ выполняется неравенство (8). В таком случае существуют две параллельные гиперплоскости

$$P_1, P_2 \subset \mathbb{R}^m, \quad \rho(P_1, P_2) = \varepsilon_0/2,$$

каждая из которых разделяет точку

$$b = \frac{1}{\Delta_n} \int_0^{\Delta_n} f_n(t, y_n(t), \mu)\, dt$$

и множество

$$Z = \bigcup_{u \in U} \frac{1}{\Delta_n} \int_0^{\Delta_n} F\big(t, x_n(t), u(t), \mu\big)\, dt.$$

Поэтому, если $h \in \mathbb{R}^m$ — единичный нормальный вектор гиперплоскостей P_1, P_2, то выполняется неравенство

$$\langle h, b - z \rangle \geqslant \varepsilon_0/2 \quad \forall z \in Z.$$

Отсюда, согласно (9) и (11), получим оценку

$$\langle h, y_n(\Delta_n) - x_n(\Delta_n) \rangle = \langle h, \mu b \Delta_n - \mu \int_0^{\Delta_n} \dot{x}_n(t)\, dt \rangle \geqslant \mu \Delta_n \varepsilon_0/2 > \varepsilon,$$

которая противоречит (10). Таким образом, необходимость условия (3) доказана.

Что касается достаточности условия (3), то заметим, что задачи (1), (2) содержат только медленные переменные, поэтому в условии (3) соответствующие средние можно вычислять по отрезкам вида $[0, \Delta]$, $\Delta > 0$. В общем случае быстрых и медленных переменных средние вычисляются по промежуткам $[t_0, t_0 + \Delta]$ вдоль решений порождающего дифференциального включения и требуется равномерность предельного перехода по $t_0 \in \mathbb{R}_+$ и другим начальным условиям.

В теореме 1 равномерность предельного перехода в условии (3) выполняется автоматически по начальному вектору $x_0 \in K$ для любого компакта $K \subset \mathbb{R}^m$, в частности, для компакта $K(x_0)$, который содержит любые решения задач (1), (2), определенных на асимптотически большом отрезке $[0, 1/\mu]$, $\mu \to \infty$. По этой причине доказательство достаточности условия (3) укладывается в общую схему доказательства теорем усреднения для дифференциальных включений [1, 2, 3, 7] и поэтому для краткости изложения опускается. Теорема 1 доказана.

Общее замечание

Теоремы 1, 2 не удается обобщить на дифференциальные включения с быстрыми и медленными переменными, так как соответствующие условия вида (3), (4) (см. [3]), как показывают простые примеры, являются только достаточными условиями в теоремах усреднения.

Литература

[1] Плотников В.А., Плотников А.В., Витюк А.Н. Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы. Одесса: Астропринт, 1999. 356 с.

[2] Филатов О.П., Хапаев М.М. Усреднение систем дифференциальных включений. М.: Изд–во Московского университета, 1998. 160 с.

[3] Филатов О.П. Усреднение дифференциальных включений с управлением// Дифференц. уравнения. 1997. Т.33. № 6. С. 782–785.

[4] Вульпе И.М. О сущности принципа усреднения// IX Международная конференция по нелинейным колебаниям. Тезисы докладов. Киев, 1981. С. 88.

[5] Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 504 с.

[6] Благодатских В.И., Филиппов А.Ф. Дифференциальные включения и оптимальное управление// Труды Математ. инст. АН СССР. 1985. Т.169. С. 194–252.

[7] Филатов О.П. Доказательство теорем усреднения для дифференциальных включений// Вестник Самарского государственногго университета. 2001. № 2(20). С. 20–33.

THE NECESSARY AND SUFFICIENT CONDITIONS IN THE AVERAGING THEOREMS OF DIFFERENTIAL INCLUSIONS

 O.P. Filatov[2]

It is proved that the principal conditions of the averaging theorem of control differential inclusions with slow variables are the necessary conditions.

Поступила в редакцию 7/V/2002;
в окончательном варианте — 28/V/2002.

[2] Filatov Oleg Pavlovich (filt@ssu.samara.ru), Dept. of Partial Differential Equations, Samara State University, Samara, 443011, Russia.