УДК 517.928

ОБ АППРОКСИМАЦИИ СВЕРХУ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ С НЕЛИПШИЦЕВОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ[1]

© 2002 Е.В. Соколовская[2]

Доказана теорема об аппроксимации сверху дифференциальных включений с нелипшицевой правой частью и медленными переменными. Аппроксимирующими являются дифференциальные включения с односторонне липшицевой (OSL) правой частью.

Введение

Рассмотрим дифференциальные включения

$$\dot{x} \in \mu F(t, x, \mu), \ x(0) = x_0, \tag{1}$$

$$\dot{\xi} \in \mu F_0(t, \xi), \qquad \xi(0) = x_0, \tag{2}$$

где отображение $F : D \to K(\mathbb{R}^m)$, $D = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \times [0, a]$, $a > 0$; $K(\mathbb{R}^m)$ — совокупность всех непустых компактов в $\mathbb{R}^m$; отображение $F_0 : D_0 \to K(\mathbb{R}^m)$, $D_0 = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m$; μ — малый параметр.

Определение [1, с. 25]. Говорят, что задача (2) аппроксимирует сверху задачу (1), если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \mu_0 > 0$ такое, что $\forall \mu \in (0, \mu_0]$ и для любого решения $x(t)$ задачи (1) существует решение $\xi(t)$ задачи (2) такое, что выполняется неравенство

$$||x(t) - \xi(t)|| < \varepsilon \ \forall t \in [0, 1/\mu].$$

Здесь $||\cdot||$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^m$.

Известно [2, с. 55], что если отображение F не зависит от μ, полунепрерывно сверху по x и 2π-периодично по t, а отображение

$$F_0(\xi) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(t, \xi)\, dt$$

липшицево по ξ, то при некоторых дополнительных условиях задача (2) аппроксимирует сверху задачу (1). В [1] также в предположении липшицевости правых частей исходного и усредненного дифференциальных включений доказана теорема об

[1] Представлена доктором физико-математических наук профессором О.П. Филатовым.

[2] Соколовская Елена Валериевна, кафедра уравнений математической физики Самарского государственного университета, 443011, Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

аппроксимации сверху исходного включения усредненным и при наличии быстрых переменных.

Следуя [3], будем называть многозначное отображение

$$F : [0, +\infty)\times\mathbb{R}^m \to K(\mathbb{R}^m)$$

односторонне липшицевым[3] (OSL)(по x) , если найдется локально интегрируемая в $[0, +\infty)$ (по Лебегу) функция $L : [0, +\infty) \to \mathbb{R}_+$ такая, что $\forall x, y \in \mathbb{R}^m$ $\forall t \in \mathbb{R}_+$ + $\forall v \in F(t, x)$ существует такой вектор $w \in F(t, y)$, что

$$\langle x - y, v - w\rangle \leqslant L(t)||x - y||^2.$$

Здесь $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^m$.

При доказательстве основного результата настоящей работы существенно используется теорема Дончева ([3], с. 785) о существовании решения дифференциального включения с OSL правой частью. В этой теореме речь идет о таком дифференциальном включении

$$\dot{x}(t) \in G(t, x(t)),\ x(0) \in K_0, \tag{3}$$

где $G : [0, 1] \times \mathbb{R}^m \to K(\mathbb{R}^m)$, K_0 — компакт из $K(\mathbb{R}^m)$.

Теорема [3, с. 785]. Предположим, что выполняются следующие условия: $G(\cdot, x)$ измеримо по t на [0,1] для каждого $x \in \mathbb{R}^m$ и полунепрерывно сверху по x для всех $t \in [0, 1]$; найдется интегрируемая на $[0, 1]$ функция $\lambda : [0, 1] \to \mathbb{R}_+$ такая, что $||G(t, x)|| \leqslant \lambda(t)(1 + ||x||)$ для всех $x \in \mathbb{R}^m$ и почти для всех $t \in [0, 1]$; G — OSL непрерывное отображение с интегрируемой на [0,1] функцией $L(t)$. Пусть $y : [0, 1] \to \mathbb{R}^m$ — абсолютно непрерывная функция, удовлетворяющая условию: расстояние $\rho(\dot{y}(t), G(t, y(t))) \leqslant g(t)$ для почти всех $t \in [0, 1]$, где $g(t)$ — интегрируемая на [0,1] функция. Тогда для любого $K_0 \in K(\mathbb{R}^m)$ существует решение $x(t)$ задачи(3) на $[0, 1]$ такое, что $||x(t) - y(t)|| \leqslant v(t)$, где

$$v(t) = d\exp(m(t)) + \int\limits_0^t \exp[m(t) - m(s)]g(s)\, ds,$$

$$d = \rho(y(0), K_0)\ , m(t) = \int\limits_0^t L(s)\, ds.$$

В настоящей работе доказывается возможность аппроксимации сверху задачи (1) задачей (2) при отсутствии липшицевости отображений F и F_0.

1. Основной результат

Пусть для отображений F и F_0 выполнены следующие условия:
1) отображения F и F_0 ограничены константой c, то есть

$$||F(t, x, \mu)|| \leqslant c \quad \forall(t, x, \mu) \in D;\ ||F_0(t, \xi)|| \leqslant c \quad \forall(t, \xi) \in D_0.$$

2) отображение $F(t, x, \mu)$ измеримо по t на $\mathbb{R}_+$ $\forall x \in \mathbb{R}^m$, $\forall \mu \in [0, a]$.
3) $\forall\varepsilon > 0$ $\exists\delta > 0$ $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^m$ $\forall t \in \mathbb{R}_+$ $\forall\mu \in [0, a]$ | $||x_1 - x_2|| < \delta$, $0 < \mu < \delta \Rightarrow$

[3] В работе [3] приводится определение односторонне липшицевого непрерывного отображения $F : [0, 1] \times \mathbb{R}^m \to K(\mathbb{R}^m)$; в нем функция $L(t)$ предполагается интегрируемой на [0,1].

$\Rightarrow \beta(F(t,x_1,\mu),F(t,x_2,0)) < \varepsilon$ $\quad (\beta(A,B) = \max\limits_{a\in A}||a-B||$ — полуотклонение по Хаусдорфу множества A от множества B).

4) $F_0(t,\xi)$ измеримо по t на $\mathbb{R}_+$ $\forall \xi \in \mathbb{R}^m$.

5)$\forall\varepsilon > 0$ $\exists\delta > 0$ $\forall\xi_1,\xi_2 \in \mathbb{R}^m$ $\forall t \in \mathbb{R}_+$ | $||\xi_1-\xi_2|| < \delta \Rightarrow \beta(F_0(t,\xi_1),F_0(t,\xi_2)) < \varepsilon$.

6) $\lim\limits_{\Delta\to\infty}\beta(\frac{1}{\Delta}\int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta}F(t,\xi_0,0)\,dt, \frac{1}{\Delta}\int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta}F_0(t,\xi_0)\,dt) = 0$ равномерно по $(t_0,\xi_0)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^m$.

7) отображение F таково, что задача (1) имеет решение на $[0,1/\mu]$.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1. Пусть отображение F_0 — односторонне липшицево (OSL) по ξ с локально интегрируемой на $\mathbb{R}_+$ функцией $L(t)$ такой, что $m(t) = \int\limits_0^t L(s)\,ds \leqslant d\cdot t$ при всех $t \geqslant t_1$ (t_1, d — некоторые числа). И пусть для отображений F и F_0 выполняются условия 1)–7). Тогда задача (2) аппроксимирует сверху задачу (1).

Доказательство теоремы приводится во второй части работы. Здесь же приведем пример, иллюстрирующий ее.

Пример. В качестве задач (1) и (2)рассматриваются следующие задачи:

$$\dot{x} \in \mu F(t,x,\mu),\ x(0) = 0, \tag{4}$$

$$\dot{\xi} \in \mu F_0(t,\xi), \quad \xi(0) = 0. \tag{5}$$

Здесь отображение $F : \mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^1\times[0,a] \to K(\mathbb{R}^1)$ задается равенством

$$F(t,x,\mu) = g(x)(\sin(t+\mu) + [-1;-0,5]),$$

где

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ \sqrt{x}, & 0 < x \leqslant 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Отображение $F_0 : \mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^1 \to K(\mathbb{R}^1)$ задается таким равенством

$$F_0(t,\xi) = g(\xi)[-1;-0,5].$$

Для задач (4), (5)выполнены все условия сформулированной теоремы. Следовательно, задача (5) аппроксимирует сверху задачу (4).

2. Доказательство теоремы 1

Возьмем $\varepsilon > 0$ произвольное. По нему найдем $\delta_1 > 0$ из выполнения условия 5) теоремы. По числу $\gamma = \min\{\delta_1/2,\varepsilon\}/2$ найдем $\delta_2 > 0$ из выполнения условия 3). По этому же числу γ найдем $\Delta_0 > 0$ так, чтобы при $\Delta > \Delta_0$ выполнялось

$$\beta(\frac{1}{\Delta}\int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta}F(t,\xi_0,0)\,dt, \frac{1}{\Delta}\int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta}F_0(t,\xi_0)\,dt) < \gamma \quad \forall(t_0,\xi_0) \in D_0. \tag{6}$$

Возьмем $\mu_1 > 0$ так, чтобы $\mu_1 < \delta_2$ и $\mu_1 < 1/t_1$, где t_1 — константа из условия OSL отображения $F_0(t,\xi)$ доказываемой теоремы. Положим $\delta = \min\{\delta_1/2, \delta_2, \varepsilon\}$. Возьмем $\mu_0 \leqslant \mu_1$ так, чтобы $\delta/\mu_0 c > \Delta_0$. Тем более, $\delta/\mu c > \Delta_0$ при $\mu < \mu_0$ (тогда $\delta_1/\mu c > \Delta_0$ и $\delta_2/\mu c > \Delta_0$).

Возьмем теперь произвольное $\mu \in (0, \mu_0]$ и произвольное решение $x(t)$ задачи (1). Имеем

$$x(t) = x_0 + \mu \int\limits_0^t v(s)\,ds,$$

где $v(s)$ — селектор отображения $F(s, x(s), \mu)$. В силу условия 1) это решение $x(t)$ — липшицевая функция с константой Липшица μc :

$$||x(t_1) - x(t_2)|| \leqslant \mu c|t_1 - t_2|.$$

Положим $\Delta = \delta/\mu c$ и разобьем $\mathbb{R}_+$ точками $t_j = j \cdot \Delta$ $(j = \overline{0,\infty})$ на частичные отрезки длиной Δ. И пусть $x(t_j) = x_j$ $\forall j = \overline{0,\infty}$. Заметим, что так как $\delta = \min\{\delta_1/2, \delta_2, \varepsilon\}$, то $\Delta \leqslant \delta_2/\mu c$. Поэтому $\forall t \in [t_{j-1}, t_j], j = \overline{1,k}$ $(k = [1/\mu\Delta])$ выполняется неравенство

$$||x(t) - x_{j-1}|| \leqslant \mu c|t - t_{j-1}| \leqslant \mu c\Delta \leqslant \mu c \frac{\delta_2}{\mu c} = \delta_2.$$

Так как число δ_2 выбиралось по числу γ из выполнения условия 3) доказываемой теоремы, получим

$$\beta(F(t, x(t), \mu), F(t, x_{j-1}, 0)) < \gamma \quad \forall t \in [t_{j-1}, t_j], \quad j = \overline{1,k}.$$

По теореме об измеримом селекторе существует селектор (определенный на $[t_{j-1}, t_j]$) $v_j^1(t) \in F(t, x_{j-1}, 0)$ такой, что

$$||v(t) - v_j^1(t)|| = \rho(v(t), F(t, x_{j-1}, 0)) \leqslant \beta(F(t, x(t), \mu), F(t, x_{j-1}, 0)) < \gamma$$

$\forall t \in [t_{j-1}, t_j],\ j = \overline{1,k}$. Так как $\Delta = \delta/\mu c > \Delta_0$, в силу условия (6)

$$\beta(\frac{1}{\Delta} \int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta} F(t, \xi_0, 0)\,dt, \frac{1}{\Delta} \int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta} F_0(t, \xi_0)\,dt) < \gamma \ \ \forall (t_0, \xi_0) \in D_0.$$

По теореме об измеримом селекторе на $[t_{j-1}, t_j]$ найдется селектор $v_j^2(t) \in F_0(t, x_{j-1})$ такой, что

$$||\frac{1}{\Delta} \int\limits_{t_{j-1}}^{t_{j-1}+\Delta} v_j^1(s)\,ds - \frac{1}{\Delta} \int\limits_{t_{j-1}}^{t_{j-1}+\Delta} v_j^2(s)\,ds|| = \rho(\frac{1}{\Delta} \int\limits_{t_{j-1}}^{t_{j-1}+\Delta} v_j^1(s)\,ds, \frac{1}{\Delta} \int\limits_{t_{j-1}}^{t_{j-1}+\Delta} F_0(s, x_{j-1})\,ds) \leqslant$$

$$\leqslant \beta(\frac{1}{\Delta} \int\limits_{t_{j-1}}^{t_{j-1}+\Delta} F(s, x_{j-1}, 0)\,ds, \frac{1}{\Delta} \int\limits_{t_{j-1}}^{t_{j-1}+\Delta} F_0(s, x_{j-1})\,ds) < \gamma \quad \forall j = \overline{1,k}.$$

Введем на $[0, 1/\mu]$ функцию

$$v^2(t) = \begin{cases} v_j^2(t), & t \in [t_{j-1}, t_j] \quad (j = \overline{1,k}), \\ 0, & t \in [k \cdot \Delta, 1/\mu]. \end{cases}$$

Пусть $u(t) = x_0 + \mu \int\limits_0^t v^2(s)\, ds$. Оценим, насколько $u(t)$ отличается от $x(t)$ в узлах $t_0, t_1, ..., t_k$. Имеем

$$||x(t_j) - u(t_j)|| = ||x_0 + \mu \int\limits_0^{t_j} v(s)\, ds - x_0 - \mu \int\limits_0^{t_j} v^2(s)\, ds|| =$$

$$= ||\mu \sum_{i=1}^{j} \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} v(s)\, ds - \mu \sum_{i=1}^{j} \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} v_i^2(s)\, ds|| = \mu || \sum_{i=1}^{j} \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} (v(s) - v_i^2(s))\, ds|| \leqslant$$

$$\leqslant \mu \sum_{i=1}^{j} \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} ||v(s) - v_i^1(s)||\, ds + \mu \sum_{i=1}^{j} || \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} (v_i^1(s) - v_i^2(s))\, ds|| \leqslant$$

$$\leqslant \mu\gamma\Delta j + \mu\gamma\Delta j = 2\mu\gamma\Delta j \leqslant 2\mu\gamma/\mu = 2\gamma \leqslant \varepsilon \quad \forall j = \overline{0,k}.$$

Таким образом, получили оценку

$$||x(t_j) - u(t_j)|| \leqslant \varepsilon \quad \forall j = \overline{0,k}. \tag{7}$$

Ориентируясь теперь на теорему [3], введем вспомогательную задачу

$$\dot{b} \in G_0(s, b), \;\; b(0) = x_0 \; . \tag{8}$$

Здесь отображение $G_0 \; : \; [0,1] \times \mathbb{R}^m \; \to \; K(\mathbb{R}^m)$ задается равенством $G_0(s, b) = F_0(s/\mu, b)$. Если функция $b(s)$ — решение задачи (8) на [0,1], то функция $\xi(t) = b(\mu t)$ — решение на $[0, 1/\mu]$ задачи (2). В качестве функции $y(s)$ из теоремы [3] возьмем функцию $u(s/\mu)$. Заметим, что

$$y(s) = u(s/\mu) = x_0 + \int\limits_0^s v^2(\alpha/\mu)\, d\alpha \quad (s \in [0,1]).$$

Одним из условий теоремы [3] является оценка

$$\rho(\dot{y}(s), G_0(s, y(s))) \leqslant g(s)$$

для почти всех $s \in [0,1]$, где $g(s)$ — интегрируемая на [0,1] функция. Получим ее.

1. Если $s \in [\mu t_{j-1}, \mu t_j]$, $j = \overline{1,k}$, то

$$\rho(\dot{y}(s), G_0(s, y(s))) = \rho(v^2(s/\mu), F_0(s/\mu, u(s/\mu))) \leqslant$$

$$\leqslant \beta(F_0(s/\mu, x_{j-1}), F_0(s/\mu, u(s/\mu))) = [s/\mu = t] = \beta(F_0(t, x_{j-1}), F_0(t, u(t))),$$

где $t \in [t_{j-1}, t_j]$– некоторое число. Таким образом, получили оценку

$$\rho(\dot{y}(s), G_0(s, y(s))) \leqslant \beta(F_0(t, x_{j-1}), F_0(t, u(t))), \tag{9}$$

где $t \in [t_{j-1}, t_j]$– некоторое число (зависящее от s). Чтобы теперь использовать условие 5), требуемое от отображения F_0, оценим сначала $||x_{j-1} - u(t)||$ для $t \in [t_{j-1}, t_j]$. Имеем

$$||x_{j-1} - u(t)|| \leqslant ||x_{j-1} - u(t_{j-1})|| + ||u(t_{j-1}) - u(t)|| \leqslant$$

$$\leqslant 2\gamma+\mu\int\limits_{t_{j-1}}^{t}||v^2(s)||\,ds\leqslant 2\gamma+\mu c\Delta=2\gamma+\mu c\frac{\delta}{\mu c}=2\gamma+\delta\leqslant\frac{\delta_1}{2}+\frac{\delta_1}{2}=\delta_1\ \forall t\in[t_{j-1},t_j].$$

Поэтому, в силу условия 5), $\beta(F_0(t,x_{j-1}),F_0(t,u(t)))\leqslant\varepsilon\ \forall t\in[t_{j-1},t_j]$ и, следовательно, учитывая (9), получаем

$$\rho(\dot y(s),G_0(s,y(s)))\leqslant\varepsilon\quad\forall s\in[0,\mu t_k].$$

2. Если $s\in[\mu t_k,1]$, то

$$\rho(\dot y(s),G_0(s,y(s)))=\rho(v^2(s/\mu),F_0(s/\mu,u(s/\mu)))=\rho(0,F_0(s/\mu,u(s/\mu)))=$$

$$=||F_0(s/\mu,u(s/\mu))||\leqslant c.$$

Если теперь ввести на [0,1] функцию

$$g(s)=\begin{cases}\varepsilon, & s\in[0,\mu t_k],\\ c, & s\in[\mu t_k,1],\end{cases}$$

то $\forall s\in[0,1]$ выполняется неравенство

$$\rho(\dot y(s),G_0(s,y(s)))\leqslant g(s).$$

Таким образом, для задачи (8) выполнены все условия теоремы [3]. При этом функция $L_1(s)$, фигурирующая в условии OSL для отображения $G_0(s,b)$, будет такой: $L_1(s)=L(s/\mu)$, где $L(t)$ — функция из условия OSL для отображения $F_0(t,\xi)$.

Тогда, согласно этой теореме, существует решение $b(s)$ задачи (8) на [0,1] такое, что

$$||b(s)-y(s)||\leqslant\int\limits_0^s\exp[m_1(s)-m_1(\tau)]g(\tau)\,d\tau,\tag{10}$$

где $m_1(s)=\int\limits_0^s L_1(\tau)\,d\tau=\int\limits_0^s L(\tau/\mu)\,d\tau=\mu\int\limits_0^{s/\mu}L(\alpha)\,d\alpha=\mu m(s/\mu)$ (здесь $m(t)$ — функция из условия OSL отображения $F_0(t,\xi)$ доказываемой теоремы). Используя то, что $m(t)\leqslant d\cdot t$ при всех $t\geqslant t_1$, из (10) находим:

$$||b(s)-y(s)||\leqslant\int\limits_0^s\exp[m_1(s)-m_1(\tau)]g(\tau)\,d\tau\leqslant\int\limits_0^1\exp[m_1(s)]g(\tau)\,d\tau=$$

$$=\int\limits_0^1\exp[\mu m(s/\mu)]g(\tau)\,d\tau\leqslant\int\limits_0^1\exp[\mu m(1/\mu)]g(\tau)\,d\tau\leqslant\int\limits_0^1\exp[\mu d/\mu]g(\tau)\,d\tau=$$

$$=\exp(d)(\int\limits_0^{\mu t_k}\varepsilon\,d\tau+\int\limits_{\mu t_k}^1 c\,d\tau)=\exp(d)(\varepsilon\mu t_k+(1-\mu t_k)c)=$$

$$=\exp(d)[\varepsilon\mu t_k+\mu c(1/\mu-t_k)]\leqslant\exp(d)(\varepsilon\mu/\mu+\mu c\Delta)=$$

$$=\exp(d)(\varepsilon+\mu c\delta/\mu c)=\exp(d)(\varepsilon+\delta)\leqslant 2\exp(d)\varepsilon.$$

Таким образом, $\forall s \in [0,1] \quad ||b(s) - y(s)|| \leqslant 2\exp(d)\varepsilon$. Отсюда следует, что $\forall t \in [0, 1/\mu]$ выполняется неравенство

$$||b(\mu t) - y(\mu t)|| \leqslant 2\exp(d)\varepsilon.$$

Учитывая, что $b(\mu t) = \xi(t)$ — решение задачи (2) на $[0, 1/\mu]$, а $y(\mu t) = u(t)$, запишем последнее неравенство в виде

$$||\xi(t) - u(t)|| \leqslant 2\exp(d)\varepsilon \quad \forall t \in [0, 1/\mu].$$

Таким образом, на $[0, 1/\mu]$ найдено решение $\xi(t)$ задачи (2) такое, что $||\xi(t) - u(t)|| \leqslant 2\exp(d)\varepsilon \quad \forall t \in [0, 1/\mu]$, где $u(t) = x_0 + \mu \int\limits_0^t v^2(s)\,ds$.

Чтобы получить оценку для $||x(t) - \xi(t)||$ при каждом $t \in [0, 1/\mu]$, получим сначала оценку для этой нормы в узлах t_j $(j = \overline{0,k})$. С учетом (7) имеем

$$||x(t_j) - \xi(t_j)|| \leqslant ||x(t_j) - u(t_j)|| + ||u(t_j) - \xi(t_j)|| \leqslant \varepsilon + 2\exp(d)\varepsilon =$$

$$= \varepsilon(1 + 2\exp(d)) \ (j = \overline{0,k}).$$

Теперь найдем оценку для $||x(t) - \xi(t)||$ при $t \neq t_j$ $(t \in [0, 1/\mu])$. Рассмотрим два случая.

Если $t \in (t_{j-1}, t_j)$, $1 \leqslant j \leqslant k$, то

$$||x(t) - \xi(t)|| \leqslant ||x(t) - x(t_{j-1})|| + ||x(t_{j-1}) - \xi(t_{j-1})|| + ||\xi(t_{j-1}) - \xi(t)|| \leqslant$$

$$\leqslant \mu \int\limits_{t_{j-1}}^{t} ||v(s)||\,ds + \varepsilon(1 + 2\exp(d)) + \int\limits_{t_{j-1}}^{t} ||\dot{\xi}(s)||\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \mu c\Delta + \varepsilon(1 + 2\exp(d)) + \mu c\Delta = 2\mu c\Delta + \varepsilon(1 + 2\exp(d)) =$$

$$= 2\mu c\delta/\mu c + \varepsilon(1 + 2\exp(d)) \leqslant 2\varepsilon + \varepsilon(1 + 2\exp(d)) = \varepsilon(3 + 2\exp(d)).$$

Во втором случае $t \in (t_k, 1/\mu]$, поэтому

$$||x(t) - \xi(t)|| \leqslant ||x(t) - x(t_k)|| + ||x(t_k) - \xi(t_k)|| + ||\xi(t_k) - \xi(t)|| \leqslant$$

$$\leqslant \mu \int\limits_{t_k}^{t} ||v(s)||\,ds + \varepsilon(1 + 2\exp(d)) + \int\limits_{t_k}^{t} ||\dot{\xi}(s)||\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \mu c\Delta + \varepsilon(1 + 2\exp(d)) + \mu c\Delta = 2\mu c\Delta + \varepsilon(1 + 2\exp(d)) =$$

$$= 2\mu c\delta/\mu c + \varepsilon(1 + 2\exp(d)) \leqslant 2\varepsilon + \varepsilon(1 + 2\exp(d)) = \varepsilon(3 + 2\exp(d)).$$

Таким образом, для найденного решения $\xi(t)$ задачи (2) выполняется неравенство

$$||x(t) - \xi(t)|| \leqslant \varepsilon(3 + 2\exp(d)) \quad \forall t \in [0, 1/\mu].$$

В силу произвольности ε это означает выполнение условия аппроксимации сверху задачи (1) задачей (2). Теорема доказана.

3. Случай дифференциальных уравнений с нелипшицевой правой частью

Рассмотрим задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = \mu f(t, x, \mu), \;\; x(0) = x_0, \tag{11}$$

$$\dot{\xi} = \mu f_0(t, \xi), \quad\;\; \xi(0) = x_0, \tag{12}$$

где функция $f : D \to \mathbb{R}^m, D = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \times [0, a], a > 0; \mu$ — малый параметр; функция $f_0 : D_0 \to \mathbb{R}^m, D_0 = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m$.

Предположим, что для функций f и f_0 выполнены следующие условия:
1) функции f и f_0 ограничены константой с, т.е. $||f(t, x, \mu)|| \leqslant c \;\; \forall(t, x, \mu) \in D$; $||f_0(t, \xi)|| \leqslant c \;\; \forall(t, \xi) \in D_0$.
2) функция f измерима по t на $\mathbb{R}_+$ $\forall x \in \mathbb{R}^m, \;\forall \mu \in [0, a]$.
3) $\forall \varepsilon > 0\; \exists \delta > 0\; \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^m\; \forall t \in \mathbb{R}_+\; \forall \mu \in [0, a] \mid ||x_1 - x_2|| < \delta \;,\; 0 < \mu < \delta \Rightarrow$ $\Rightarrow ||f(t, x_1, \mu) - f(t, x_2, 0)|| < \varepsilon$.
4) функция f_0 измерима по t на $\mathbb{R}_+$ $\forall \xi \in \mathbb{R}^m$.
5)$\forall \varepsilon > 0\; \exists \delta > 0\; \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^m\; \forall t \in \mathbb{R}_+ \mid ||\xi_1 - \xi_2|| < \delta \Rightarrow ||f_0(t, \xi_1) - f_0(t, \xi_2)|| < \varepsilon$.
6) $\lim\limits_{\Delta\to\infty} ||\frac{1}{\Delta} \int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta} f(t, \xi_0, 0)\, dt - \frac{1}{\Delta} \int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta} f_0(t, \xi_0)\, dt|| = 0$ равномерно по $(t_0, \xi_0) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m$.
7) функция f такова, что задача (11) имеет хотя бы одно решение на $[0, 1/\mu]$.

Непосредственным следствием теоремы, доказанной в п.2 настоящей работы, является следующая теорема.

Теорема 2. Пусть для функции f_0 существует локально интегрируемая на $\mathbb{R}_+$ функция $L : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ такая, что функция $m(t) = \int\limits_0^t L(s)\, ds \leqslant d{\cdot}t$ при всех $t \geqslant t_1$ (t_1, d — некоторые числа) и $\forall x, y \in \mathbb{R}^m\; \forall t \in \mathbb{R}_+$ выполняется неравенство

$$\langle x - y, f_0(t, x) - f_0(t, y)\rangle \leqslant L(t)||x - y||^2.$$

Предположим, кроме того, что для функций f и f_0 выполнены перечисленные выше условия 1) – 7). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\mu_0 > 0$ такое, что для любого $\mu \in (0, \mu_0]$ и для любого решения $x(t)$ задачи (11) найдется решение $\xi(t)$ задачи (12) такое, что выполняется неравенство

$$||x(t) - \xi(t)|| < \varepsilon \quad \forall t \in [0, 1/\mu].$$

Пример. Для задачи

$$\dot{x} = \mu g(x)(\sin(t + \mu) - 0,5), \;\; x(0) = 0 \tag{13}$$

усредненная задача имеет вид

$$\dot{\xi} = -\mu g(\xi)/2, \qquad\qquad \xi(0) = 0, \tag{14}$$

где

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ \sqrt{x}, & 0 < x \leqslant 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Можно показать, что задача (13) имеет бесконечное множество решений, а задача (14) имеет единственное нулевое решение. При этом выполняются все условия теоремы 2. Поэтому $\forall\varepsilon > 0\ \exists\mu_0 > 0$ такое, что $\forall\mu \in (0, \mu_0]$ и для любого решения $x(t)$ задачи (13) выполняется $||x(t)|| < \varepsilon\ \forall t \in [0, 1/\mu]$.

Таким образом, в этом примере принцип усреднения выполняется, хотя правые части уравнений (13) и (14) нелипшицевы.

Литература

[1] Филатов О.П., Хапаев М.М. Усреднение систем дифференциальных включений. М.: Изд-во МГУ, 1998. 160 с.

[2] Плотников В.А., Плотников А.В., Витюк А.Н. Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы. Одесса: Астропринт, 1999. 356 с.

[3] Donchev T., Farkhi E. Stability and Euler approximation of one-sided Lipschitz differential inclusions// SIAM J. Control and Optimization. 1998. V.36. No.2. P. 780–796.

ON AN UPPER APPROXIMATION OF THE DIFFERENTIAL INCLUSIONS WITH NON-LIPSCHITZ RIGHT-HAND SIDE[4]

© 2002 E.V. Sokolovskaya[5]

A theorem about upper approximation of differential inclusions with non-Lipschitz right-hand side and slow variables is proved. The inclusions with one-sided Lipschitz right-hand are used for the approximation.

Поступила в редакцию $1/IV/2002$;
в окончательном варианте — $7/V/2002$.

[4] Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. O.P. Filatov.

[5] Sokolovskaya Elena Valerievna, Dept. of Partial Differential Equations, Samara State University, Samara, 443011, Russia.