УДК 512.7

О ПАРАХ МАНИНА[1]

© 2002 А.Н. Панов[2]

В работе дается классификация пар Манина для полупростых вещественных и комплексных алгебр Ли. Доказывается теорема о разложении для редуктивных алгебр Ли и изучаются разложения пар Манина в общей постановке.

Понятия пары и тройки Манина возникли в работах по квантовым группам [1, 2]. Квазиклассическим приближением квантовой группы является группа Ли, снабженная групповой скобкой Пуассона. Алгебра Ли этой группы обладает следующим свойством: ее сопряженное пространство также является алгеброй Ли, и обе алгебры Ли могут быть вложены в третью алгебру Ли, называемую дублем исходной алгебры Ли. Эти три алгебры Ли образуют тройку Манина. Классификация троек Манина для простых алгебр Ли была проведена в работе [3] в терминах решений классического уравнения Янга–Бакстера. Понятие пары Манина возникло в работе [1] в результате рассмотрения более общих, чем квантовые группы, объектов. Пара Манина дополняется до тройки Манина, если в ее дубле есть дополнительная к исходной алгебре Ли подалгебра.

В работе проводится классификация пар Манина для простых комплексных и вещественных алгебр Ли (теоремы 1.7 и 3.1). Оказывается, что для простых алгебр Ли любая пара Манина продолжается до тройки Манина. Для произвольной алгебры Ли это неверно (например, для коммутативных алгебр Ли). Для редуктивных алгебр Ли доказываются теоремы разложения (теоремы 1.13 и 3.2), сводящие классификацию к случаям простых и коммутативных алгебр Ли. Работа содержит общую теорему о расщеплении пар Манина (теорема 2.3).

1. Пары Манина для комплексных редуктивных алгебр Ли

Определение 1.1. Пусть $\mathfrak{d}$ — алгебра Ли над полем k с невырожденной $\mathrm{ad}_{\mathfrak{d}}$-инвариантной симметрической билинейной k-формой $< \cdot, \cdot >$. Пусть $\mathfrak{g}$ — подалгебра $\mathfrak{d}$.

Говорят, что $(\mathfrak{g}, \mathfrak{d})$ является парой Манина, если $\mathfrak{g}$ — лагранжево подпространство относительно $< \cdot, \cdot >$ (то есть $< x, y >= 0$ для всех $x, y \in \mathfrak{g}$ и $\dim \mathfrak{g} = \frac{1}{2} \dim \mathfrak{d}$). Алгебру Ли $\mathfrak{d}$ называют дублем для $\mathfrak{g}$.

[1]Представлена доктором физико-математических наук профессором В.Е. Воскресенским.

[2]Панов Александр Николаевич (panov@info.ssu.samara.ru), кафедра алгебры и геометрии Самарского государственного университета, 443011, Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

Для любой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ можно образовать пару Манина, в которой в качестве $\mathfrak{d}$ рассматривается полупрямая сумма $\mathfrak{g}$ и ее коприсоединенного представления в $\mathfrak{g}^*$ (коммутатор на $\mathfrak{g}^*$ нулевой). Такие пары Манина будем называть тривиальными.

Определение 1.2. Пусть $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{d}_1, < \cdot, \cdot >_1)$ и $(\mathfrak{g}_2, \mathfrak{d}_2, < \cdot, \cdot >_2)$ — две пары Манина над полем k. Изоморфизм алгебр Ли $\phi : \mathfrak{d}_1 \mapsto \mathfrak{d}_2$ будем называть изоморфизмом пар Манина, если $\phi(\mathfrak{g}_1) = \mathfrak{g}_2$ и существует число $\gamma \in k^*$ такое, что $< \phi(x), \phi(y) > = \gamma < x, y >$ для всех $x, y \in \mathfrak{d}_1$.

Определение 1.3. Пусть $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}'$ — две подалгебры Ли в алгебре Ли $\mathfrak{d}$ из определения 1.1. Тройка $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}', \mathfrak{d})$ называется тройкой Манина, если $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}'$ — лагранжевы подпространства относительно $< \cdot, \cdot >$ и $\mathfrak{d}$ — прямая сумма $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}'$ как линейных подпространств.

Заметим, что в этом случае $(\mathfrak{g}, \mathfrak{d})$ и $(\mathfrak{g}', \mathfrak{d})$ образуют пары Манина.

Определение 1.4. Рассмотрим две тройки Манина $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}'_1, \mathfrak{d}_1)$ и $(\mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}'_2, \mathfrak{d}_2)$. Изоморфизм алгебр Ли $\phi : \mathfrak{d}_1 \mapsto \mathfrak{d}_2$ будем называть изоморфизмом троек Манина, если $\phi(\mathfrak{g}_1) = \mathfrak{g}_2$, $\phi(\mathfrak{g}'_1) = \mathfrak{g}'_2$ и $< \phi(x), \phi(y) >= \gamma < x, y >$.

На протяжении всей статьи все алгебры Ли определены над полем характеристики нуль (обычно над $\mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$). Обозначим через $K(\cdot, \cdot)$ форму Киллинга алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Рассмотрим две комплексные коммутативные, ассоциативные подалгебры: $A_1 = \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2$ с ортогональными идемпотентами e_1, e_2 и $A_2 = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}e$ с нильпотентом $e^2 = 0$.

Для любого подпространства $\mathfrak{c}$ в $\mathfrak{g}$ обозначим через $\mathfrak{c}^{\perp_K}$ ортогональное дополнение к $\mathfrak{c}$ по отношению к форме Киллинга. Пусть $\mathfrak{g}$ — комплексная полупростая алгебра Ли и $\mathfrak{p}$ — ее параболическая подалгебра. Разложим $\mathfrak{p}$ в виде прямой суммы(как линейных подпространств) ее нильрадикала $\mathfrak{n}_p$ и редуктивной части $\mathfrak{r}$. Подалгебра $\mathfrak{r}$ является прямой суммой двух подалгебр Ли $\mathfrak{s} = [\mathfrak{r}, \mathfrak{r}]$ и ее центра $\mathfrak{z}$.

Лемма 1.5. Пусть $\mathfrak{c}$ — подалгебра в комплекной полупростой алгебре Ли $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{c}^{\perp_K} \subset \mathfrak{c}$. Тогда существует параболическая подалгебра $\mathfrak{p}$, содержащая $\mathfrak{c}$ такая, что $\mathfrak{c} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{n}_p$, где $\mathfrak{l}$ — подпространство в $\mathfrak{z}$ с условием $\mathfrak{l}^{\perp_K} \subset \mathfrak{l}$.

Доказательство. Известно [5], что любая собственная подалгебра полупростой комплексной алгебры Ли либо полупростая, либо параболическая. Подалгебра $\mathfrak{c}$ содержится в некоторой максимальной собственной подалгебре M. Предположение, что M полупростая, приводит к противоречию: $\mathfrak{g} = M \oplus M^{\perp_K}$ и $M^{\perp_K} \subset \mathfrak{c} \subset M$. Следовательно, M — параболическая подалгебра. Тогда $M^{\perp_K}$ — нильпотентный радикал и $\mathfrak{c} \supset M^{\perp_K}$. Доказательство завершается применением индукции к подалгебре $\mathfrak{c}/M^{\perp_K}$ в $M/M^{\perp_K}$.□

Следствие 1.6. Любая изотропная (по отношению к форме Киллинга) подалгебра $\mathfrak{g}$ является разрешимой подалгеброй. Любая лагранжева подалгебра в $\mathfrak{g}$ имеет вид $\mathfrak{l} + \mathfrak{n}$, где $\mathfrak{n}$ — максимальная нильпотентная подалгебра и $\mathfrak{l}$ — лагранжева подалгебра в соответствующей подалгебре Картана.

Теорема 1.7. Пусть $\mathfrak{g}$ — комплексная простая алгебра Ли и $(\mathfrak{g}, \mathfrak{d})$ — пара Манина. Тогда $(\mathfrak{g}, \mathfrak{d})$ изоморфна одной из следующих пар Манина (типа 1) или 2)):
1) $\mathfrak{d} = \mathfrak{g} \otimes A_1 = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$, где $\mathfrak{g}_i = \mathfrak{g}e_i$, $i = \overline{1, 2}$; алгебра Ли $\mathfrak{g}$ вкладывается в $\mathfrak{d}$ как диагональ $\mathfrak{g} = \{(x, x)\} = \{xe_1 + xe_2\}$ и $< (x_1, y_1), (x_2, y_2) >= c \cdot (K(x_1, x_2) - K(y_1, y_2))$ для $c \in \mathbb{C}$;
2) $\mathfrak{d}$ тривиальная пара Манина; в этом случае дубль изоморфен $\mathfrak{g} \otimes A_2$ и инвариантная форма задается по формуле $< (x_1, \lambda_1), (x_2, \lambda_2) >= \lambda_1(x_2) + \lambda_2(x_1)$.

Каждая пара Манина для простой комплексной алгебры Ли дополняется до тройки Манина.

Доказательство. Сначала заметим, что $\mathfrak{d}$ (как $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$-модуль) является прямой суммой двух эквивалентных неприводимых $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$-подмодулей $\mathfrak{d} = \mathfrak{g} \oplus V$, где V может быть отождествлено (через $v \in V \mapsto < \cdot, v > \in \mathfrak{g}^*$) с $\mathfrak{g}^*$ как $\mathfrak{g}$-модуль. Используя форму Киллинга, мы отождествляем $\mathfrak{g}^*$ с $\mathfrak{g}$. Любой $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$-подмодуль $\mathfrak{d}$ изоморфен присоединенному модулю $\mathfrak{g}$.

Предположим, что $\mathfrak{d}$ — простая алгебра Ли. Тогда $< \cdot, \cdot > = c \cdot K(\cdot, \cdot)$ и $\mathfrak{g}$ изотропна по отношению к форме Киллинга. По следствию 1.6 $\mathfrak{g}$ — разрешимая подалгебра. Противоречие. Следовательно, $\mathfrak{d}$ не является простой алгеброй Ли.

Пусть I — ненулевой идеал в $\mathfrak{d}$. Его ортогональное дополнение $I^\perp$ по отношению к $< \cdot, \cdot >$ также является идеалом. Оба идеала изоморфны $\mathfrak{g}$ как $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$-модули. В частности, $\dim \mathfrak{g} = \dim(I) = \dim(I^\perp)$. Пересечение $I \bigcap I^\perp$ является $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$-модулем, который является нулевым или изоморфным присоединенному модулю $\mathfrak{g}$. В последнем случае $I = I^\perp = I \bigcap I^\perp$.

Предположим, что $I \bigcap I^\perp = 0$. Тогда $\mathfrak{d}$ является прямой суммой подпространств I и $I^\perp$. Поскольку $[I, I^\perp] \subset I \bigcap I^\perp = 0$, то $\mathfrak{d}$ — прямая сумма идеалов $\mathfrak{d} = I \oplus I^\perp$. Лагранжева подалгебра $\mathfrak{g}$ не может содержаться в одной компоненте $\mathfrak{d}$ (в противном случае эта подалгебра может быть расширена до изотропного в $\mathfrak{d}$ подпространства с помощью элемента из I или $I^\perp$). Гомоморфизмы проектирования $\mathfrak{g} \mapsto I$ и $\mathfrak{g} \mapsto I^\perp$ являются изоморфизмами. Дубль $\mathfrak{d}$ изоморфен $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ (т.е. типа 1 из утверждения теоремы) с диагональным вложением $\mathfrak{g}$.

Что касается инвариантной формы $< \cdot, \cdot >$, мы замечаем

$$0 = < 0, \mathfrak{d} > = < [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2], \mathfrak{d} > = < \mathfrak{g}_1, [\mathfrak{g}_2, \mathfrak{d}] > = < \mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2 > . \tag{1.1}$$

Ограничение $< \cdot, \cdot >$ на каждую компоненту $\mathfrak{g}_i$ дает инвариантную невырожденную форму на $\mathfrak{g}_i$. Эта форма равна форме Киллинга с точностью до константы $c_i \in \mathbb{C}$. Мы имеем

$$< (x_1, y_1), (x_2, y_2) > = c_1 K(x_1, x_2) + c_2 K(y_1, y_2)).$$

Форма $< \cdot, \cdot >$ нулевая на диагонали. Это доказывает, что $c_1 = -c_2$ и завершает доказательство в случае 1.

Рассмотрим случай $I = I^\perp$, то есть I — изотропное подпространство. Наблюдение

$$< \mathfrak{d}, [I, I] > = < [\mathfrak{d}, I], I > = < I, I > = 0$$

влечет $[I, I] = 0$ (т.е. I — коммутативный идеал). Пересечение $\mathfrak{g}$ и I нулевое. Следовательно, $\mathfrak{d} = \mathfrak{g} \oplus I$. Обозначим $V := I$ и отождествим V с $\mathfrak{g}^*$ через $v \in V \mapsto < \cdot, v > = = v^* \in \mathfrak{g}^*$. Присоединенное $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$-действие $\mathfrak{g}$ на V соответствует babкоприсоединенному действию на $\mathfrak{g}^*$. Форма $< \cdot, \cdot >$ равна нулю на $\mathfrak{g}$ и на V и $< x, v > = v^*(x)$ для всех $x \in \mathfrak{g}$, $v \in V$.

Хорошо известно, что каждая пара Манина типа 1 или 2 дополняется до тройки Манина [4]. □

Определение 1.8. Будем называть пару Манина $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{d}_1)$ подпарой пары Манина $(\mathfrak{g}, \mathfrak{d})$, если $\mathfrak{g}_1$ — подалгебра $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{d}_1$ — подалгебра $\mathfrak{d}$ и билинейная форма на первой паре получается ограничением билинейной формы второй пары.

Определение 1.9. Будем говорить, что пара Манина $(\mathfrak{g}, \mathfrak{d})$ является прямой суммой двух подпар $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{d}_1)$ и $(\mathfrak{g}_2, \mathfrak{d}_2)$, если $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}_1 \oplus \mathfrak{d}_2$ и $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ как алгебр Ли и $< \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2 > = 0$.

Теорема 1.10. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{s}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{s}_k$ — комплексная полупростая алгебра Ли с простыми компонентами $\mathfrak{s}_i$. Любая пара Манина $(\mathfrak{g}, \mathfrak{d})$ единственным образом разлагается в прямую сумму подпар $(\mathfrak{s}_i, \mathfrak{d}_i)$.

Доказательство. Как $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$-модуль, $\mathfrak{d}$ может быть разложено в прямую сумму $\mathfrak{d} = \mathfrak{g} \oplus V$. Дополнительный подмодуль V может быть отождествлен с коприсоединенным модулем $\mathfrak{g}^*$, поскольку $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли, $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^*$ изоморфны как $\mathfrak{g}$-модули. Получаем разложение

$$\mathfrak{d} = \mathfrak{g} + V = \mathfrak{s}_1 + \ldots + \mathfrak{s}_k + V_1 + \ldots + V_k \tag{1.2}$$

в прямую сумму неприводимых $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$-подмодулей. Действие $\mathfrak{s}_i$ на V_j нулевое для $i \neq = j$ и действие $\mathfrak{s}_i$ на V_i изоморфно присоединенному действию. Обозначим через $\mathfrak{d}_i$ подпространство $\mathfrak{s}_i + V_i$. Наша цель — показать, что $\mathfrak{d}_i$ — подалгебра Ли и $\mathfrak{d} = = \mathfrak{d}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{d}_k$ есть прямая сумма алгебр Ли.

Покажем, что $\mathfrak{d}_i$ — подалгебра Ли. Очевидно, что $[\mathfrak{s}_i, \mathfrak{s}_i] \subset \mathfrak{s}_i$ и $[\mathfrak{s}_i, V_i] \subset V_i$. Осталось показать, что $[V_i, V_i] \subset V_i$. Подпространство $[V_i, V_i]$ аннулируется $\mathfrak{s}_j$ для любого $j \neq i$. Из (1.2) заключаем $[V_i, V_i] \subset V_i$.

Для различных i и j рассмотрим подпространство $[V_i, V_j]$. Как $\mathfrak{s}_i$-модуль, $[V_i, V_j]$ — прямая сумма присоединеннных $\mathfrak{s}_i$-модулей и из (1.2) содержится в $\mathfrak{d}_i$. Это же верно для j. Поскольку $\mathfrak{d}_i \bigcap \mathfrak{d}_j = 0$, получаем $[V_i, V_j] = 0$. Мы имеем разложение $\mathfrak{d} = = \mathfrak{d}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{d}_k$ алгебры Ли $\mathfrak{d}$ в прямую сумму коммутирующих идеалов. Аналогично (1.1) показывается, что $\mathfrak{d}_i$ ортогональны относительно $< \cdot, \cdot >$.

Разложение $\mathfrak{d}$ единственно, так как единственно разложение $\mathfrak{d}$ как $\mathfrak{s}$-модуля в прямую сумму изотипических компонент. □

Наша следующая цель — доказать теорему о парах Манина для редуктивных алгебр Ли. Нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 1.11. Пусть $\mathfrak{g}$ — комплексная полупростая алгебра Ли. На $\mathfrak{g}$ нет ненулевых кососимметрических ad-инвариантных билинейных форм.

Лемма 1.12. Пусть $\mathfrak{d}$ — алгебра Ли с ненулевой инвариантной невырожденной симметрической билинейной формой $< \cdot, \cdot >$. Пусть $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{d}_2$ — два подпространства такие, что ограничение $< \cdot, \cdot >$ на каждое подпространство невырождено и $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}_1 + + \mathfrak{d}_2$ — ортогональное разложение $\mathfrak{d}$. Если $\mathfrak{d}_1$ и $\mathfrak{d}_2$ — подалгебры Ли, то $[\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2] = 0$ (т.е. имеет место прямая сумма алгебр Ли).

Доказательство. Заметим, что

$$< \mathfrak{d}_1, [\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2] >=< [\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_1], \mathfrak{d}_2 >=< \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2 >= 0,$$

$$< \mathfrak{d}_2, [\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2] >=< [\mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_2], \mathfrak{d}_1 >\subset< \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_1 >= 0.$$

Это влечет $[\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2] \perp \mathfrak{d}$. Тогда $[\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2] = 0$.□

Теорема 1.13. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{z}$ — комплексная редуктивная алгебра Ли с полупростой и коммутативной частями $\mathfrak{s}$ и $\mathfrak{z}$. Любая пара Манина $(\mathfrak{g}, \mathfrak{d})$ единственным образом разлагается в прямую сумму подпар Манина $(\mathfrak{s}, \mathfrak{d}_{\mathfrak{s}})$ и $(\mathfrak{z}, \mathfrak{d}_{\mathfrak{z}})$.

Доказательство. Как $\mathfrak{s}$-модуль, $\mathfrak{d}$ — прямая сумма двух изотипических подмодулей $\mathfrak{d}_1 = \mathfrak{d}_{\mathfrak{s}} + \mathfrak{d}_{\mathfrak{z}}$. Первый подмодуль равен $\mathfrak{d}_{\mathfrak{s}} = \mathfrak{s} + V$, где $\mathfrak{s}$-модуль V изоморфен $\mathfrak{s}$. Второй подмодуль $\mathfrak{d}_{\mathfrak{z}}$ является подпространством, состоящим из $\mathfrak{s}$-инвариантных векторов. Ограничения $< \cdot, \cdot >$ на $\mathfrak{d}_{\mathfrak{s}}$ и $\mathfrak{d}_{\mathfrak{z}}$ невырождены.

Шаг 1. ${\mathfrak{d}_{\mathfrak{s}}}^{\perp} = \mathfrak{d}_{\mathfrak{z}}$. Достаточно доказать, что $\mathfrak{d}_{\mathfrak{s}}$ и $\mathfrak{d}_{\mathfrak{z}}$ ортогональны:

$$< \mathfrak{d}_{\mathfrak{s}}, \mathfrak{d}_{\mathfrak{z}} >=< [\mathfrak{d}_{\mathfrak{s}}, \mathfrak{s}], \mathfrak{d}_{\mathfrak{z}} >=< \mathfrak{d}_{\mathfrak{s}}, [\mathfrak{s}, \mathfrak{d}_{\mathfrak{z}}] >=< \mathfrak{d}_{\mathfrak{s}}, 0 >= 0.$$

Шаг 2. $\mathfrak{d}_{\mathfrak{s}}$ — подалгебра. Поскольку $\mathfrak{s}$ — подалгебра и V является $\mathrm{ad}_{\mathfrak{s}}$-модулем, достаточно доказать, что $[V, V] \subset V$. Для любого $\lambda \in \mathfrak{d}_{\mathfrak{z}}$ рассмотрим кососимметрическую билинейную форму $f(v, w) =< \lambda, [v, w] >$ на V. Так как $\mathrm{ad}_{\mathfrak{s}}(\lambda) = 0$, то эта форма $\mathrm{ad}_{\mathfrak{s}}$-инвариантна. По лемме 1.11, $f = 0$ и отсюда $[V, V] \subset \mathfrak{d}_{\mathfrak{s}}$.

Шаг 3. $\mathfrak{d}_{\mathfrak{z}}$ — подалгебра. Подпространство $[\mathfrak{d}_{\mathfrak{z}}, \mathfrak{d}_{\mathfrak{z}}]$ состоит из $\mathrm{ad}_{\mathfrak{s}}$-инвариантных векторов. Следовательно, $[\mathfrak{d}_{\mathfrak{z}}, \mathfrak{d}_{\mathfrak{z}}] \subset \mathfrak{d}_{\mathfrak{z}}$.
Шаг 4. Лемма 1.12 завершает доказательство.□

2. О разложении пар Манина

Определение 2.1. Будем говорить, что подпара $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{d}_1)$ является идеалом в паре $(\mathfrak{g}, \mathfrak{d})$, если $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{d}_1$ — идеалы в $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{d}$. В этом случае $(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_1, \mathfrak{d}/\mathfrak{d}_1)$ — пара Манина.

Предложение 2.2. Пусть $\mathfrak{s}$ — полупростая подалгебра Ли и $\mathfrak{d} = \mathfrak{s} + V$ — ее тривиальный дубль. Любое дифференцирование алгебры Ли $\mathfrak{d}$ равняется по модулю внутренних дифференцирований дифференцированию, которое равно нулю на $\mathfrak{s}$ и скалярно на неприводимых компонентах V.

Доказательство. Алгебра Ли $\mathfrak{s}$ является прямой суммой простых подалгебр $\mathfrak{s} = \oplus\mathfrak{s}_i$, и $V = \oplus V_i$ — прямая сумма соответствующих неприводимых представлений.

Пусть $\phi : V \to \mathfrak{s}$ — изоморфизм отождествления V и $\mathfrak{s}$ как $\mathrm{ad}_{\mathfrak{s}}$-модулей. Для любых $x \in \mathfrak{s}$ и $v \in V$ имеет место равенство $[x, \phi(v)] = \phi(\mathrm{ad}_x(v))$. Отсюда вытекает $[\phi(v), \phi(w)] = \phi(\mathrm{ad}_{\phi(v)} w)$ и

$$\mathrm{ad}_{\phi(v)} w = \phi^{-1}([\phi(v), \phi(w)]). \tag{2.1}$$

Пусть δ — дифференцирование $\mathfrak{d}$. Для $x \in \mathfrak{s}$ и $v \in V$ обозначим

$$\delta(x) = s_x + \lambda_x,$$
$$\delta(v) = t_v + \mu_v$$

с $s_x, t_v \in \mathfrak{s}$ и $\lambda_x, \mu_v \in V$. Для $x \in \mathfrak{s}$ и $v \in V$ имеем $[\delta(x), v] + [x, \delta(v)] = \delta(\mathrm{ad}_x(v))$. После подстановки получаем

$$[x, t_v] = t_{\mathrm{ad}_x v}, \tag{2.2}$$

$$[s_x, v] + [x, \mu_v] = \mu_{\mathrm{ad}_x v}. \tag{2.3}$$

Отображение $v \mapsto t_v$ является морфизмом $\mathfrak{s}$-модулей $V \to \mathfrak{s}$. Получаем, что $t|_{V_i} = \alpha_i \phi|_{V_i}$, для некоторой системы констант $\alpha = (\alpha_i, \ldots .\alpha_k)$. Для всех $v, w \in V_i$ имеем

$$0 = \delta([v, w]) = [\delta(v), w] + [v, \delta(w)] = [t_v + \mu_v, w] + [v, t_w + \mu_w] =$$

$$= [\alpha_i \phi(v), w] + [v, \alpha_i \phi(w)] = \alpha_i(\mathrm{ad}_{\phi(v)} w - \mathrm{ad}_{\phi(w)} v) = 2\alpha_i \phi^{-1}([\phi(v), \phi(w)]).$$

Получаем $\alpha_i = 0$, отсюда $t_v = 0$ для всех $v \in V$. Дифференцирование δ имеет вид

$$\begin{array}{rcl} \delta(x) & = & s_x + \lambda_x, \\ \delta(v) & = & \mu_v. \end{array}$$

Для всех $x, y \in \mathfrak{s}$ из соотношения $[\delta(x), y] + [x, \delta(y)] = \delta([x, y])$ вытекает

$$[s_x, y] + [x, s_y] = s_{[x,y]}, \tag{2.4}$$

$$[\lambda_x, y] + [x, \lambda_y] = \lambda_{[x,y]}. \tag{2.5}$$

Получаем, что s_x является дифференцированием и λ_x является 1-коциклом $\mathfrak{s}$ со значением в присоединенном представлении. Полупростая алгебра Ли имеет тривиальные H^1-когомологии [6]. Существуют $b_0 \in \mathfrak{s}$ и $v_0 \in V$ такие, что $s_x = [b_0, x]$ и

$\lambda_x = [x, v_0] = \mathrm{ad}_x(v_0)$. Обозначим $a_0 = b_0 + v_0$. Имеем $[a_0, x] = [b_0 + v_0, x] = \delta(x)$ и $[a_0, v] = [b_0, v]$ для любого $v \in V$. Перепишем (2.3) следующим образом:

$$[[b_0, x], v] + [x, \mu_v] = \mu_{\mathrm{ad}_x v}. \tag{2.6}$$

Вычитаем из (2.6) $[[b_0, x], v] + [x, [b_0, v]] = [b_0, [x, v]]$, получаем

$$[x, (\mu - \mathrm{ad}_{b_0})(v)] = (\mu - \mathrm{ad}_{b_0})([x, y]),$$

то есть $\mu - \mathrm{ad}_{a_0} : V \mapsto V$ является морфизмом $\mathfrak{s}$-модулей. Этот морфизм скалярен на неприводимых компонентах V:

$$\mu - \mathrm{ad}_{a_0}|_{V_i} = c_i \ \mathrm{id}|_{V_i}.$$

Дифференцирование $\delta - \mathrm{ad}_{a_0}$ совпадает с дифференцированием δ_c, которое нулевое на $\mathfrak{s}$ и скалярное $v_i \to c_i v_i$ на V_i.□

Теорема 2.3. Пусть $(\mathfrak{s}, \mathfrak{d})$ — пара Манина с полупростой алгеброй Ли $\mathfrak{s}$. Если $(\mathfrak{s}, \mathfrak{d})$ — идеал в некоторой паре Манина $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$, то $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ расщепляется в прямую сумму $(\mathfrak{s}, \mathfrak{d})$ и его дополнения.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{d} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$. Каждое дифференцирование $\mathfrak{d}$ внутреннее. Отсюда для любого $x \in \mathfrak{a}$ существует $b_x \in \mathfrak{d}$ такой, что элемент $y = x - b_x$ коммутирует с $\mathfrak{d}$. Элементы $\{y\}$ образуют дополнительную подалгебру, коммутирующую с $\mathfrak{d}$. Пара $(\mathfrak{s}, \mathfrak{d})$ расщепляется.

Если $\mathfrak{d}$ — тривиальный дубль, то для любого $x \in \mathfrak{a}$ существует $b_x \in \mathfrak{d}$ такой, что элемент $y = x - b_x$ обладает следующими свойствами: $\mathrm{ad}_y(\mathfrak{s}) = 0$ и $\mathrm{ad}_y v_i = \alpha_i v_i$ на V_i. Наблюдение

$$0 =< [\mathfrak{s}, y], V_i >=< \mathfrak{s}, [y, V_i] >= \alpha_i < \mathfrak{s}, V_i >$$

влечет $\alpha_i = 0$. Элементы $\{y\}$ образуют дополнительную подалгебру, коммутирующую с $\mathfrak{d}$. Пара $(\mathfrak{s}, \mathfrak{d})$ расщепляется.□

3. Случай вещественных алгебр Ли

Пусть $\mathfrak{g}$ — вещественная простая алгебра Ли. Известно, что $\mathfrak{g}$ или вещественная форма комплексной простой алгебры Ли или $\mathfrak{g}$ допускает комплексную структуру. В этом случае она изоморфна овеществленной комплексной простой алгебре Ли.

Обозначим через $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ комплексификацию алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и через σ — комплексное сопряжение $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ над $\mathfrak{g}$. Рассмотрим вещественные коммутативные ассоциативные алгебры: $A_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_2$, порожденные ортогональными идемпотентами e_1 и e_2 , $A_2 = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}e$ с $e^2 = 0$ (это вещественные формы A_1 и A_2).

Теорема 3.1. Любая пара Манина $(\mathfrak{g}, \mathfrak{d})$ с вещественной простой алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ имеет вид:
1) $\mathfrak{d} = \mathfrak{g} \otimes A_1(\mathbb{R}) = \mathfrak{g}e_1 \oplus \mathfrak{g}e_2$ с билинейной формой как и в комплексном случае (теорема 1.7);
2) (этот случай только для вещественных форм) $\mathfrak{d} = \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ с $< \cdot, \cdot >= c \cdot \mathrm{I}mK(\cdot, \cdot)$, $c \in \mathbb{R}$;
3) (тривиальный случай) полупрямая сумма $\mathfrak{g}$ и ее конрисоединенного представления.

Каждая пара Манина для простой вещественной алгебры Ли дополняется до тройки Манина.

Доказательство. Для вещественной пары Манина $(\mathfrak{g}, \mathfrak{d})$ пара $(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{d}^{\mathbb{C}})$ является комплексной парой Манина. Здесь $\mathfrak{d} = (\mathfrak{d}^{\mathbb{C}})^{\overline{\sigma}}$ и $\mathfrak{g} = (\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})^{\overline{\sigma}} = (\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})^{\sigma}$.

A) Рассмотрим случай, когда $\mathfrak{g}$ — вещественная форма комплексной простой алгебры Ли $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$.

Предположим, что $\mathfrak{d}^{\mathbb{C}}$ — дубль типа 1, то есть $\mathfrak{d}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}_1^{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{g}_2^{\mathbb{C}}$, где $\mathfrak{g}_i^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} e_i$. Напомним, что $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ вкладывается в $\mathfrak{d}^{\mathbb{C}}$ диагональным образом $x \mapsto xe_1 + xe_2$. Обозначим через $\overline{\sigma}$ сопряжение $\mathfrak{d}^{\mathbb{C}}$ над $\mathfrak{d}$. Ограничение $\overline{\sigma}$ на $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ совпадает с σ. Для всех $x \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ получаем

$$\sigma(x)e_1 + \sigma(x)e_2 = \sigma(x) = \overline{\sigma}(xe_1 + xe_2) = \overline{\sigma}(xe_1) + \overline{\sigma}(xe_2). \tag{3.1}$$

Заметим, что образы $\overline{\sigma}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} e_i)$ являются простыми комплексными подалгебрами в $\mathfrak{d}^{\mathbb{C}}$. Алгебра Ли $\mathfrak{d}^{\mathbb{C}}$ имеет единственное разложение в прямую сумму идеалов. Если $\overline{\sigma}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} e_i) = \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} e_i$, то из (4.1) имеем $\overline{\sigma}(xe_i) = \sigma(x)e_i$. Получаем

$$\mathfrak{d} = (\mathfrak{d}^{\mathbb{C}})^{\overline{\sigma}} = \mathfrak{g}e_1 \oplus \mathfrak{g}e_2.$$

Если $\overline{\sigma}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} e_1) = \overline{\sigma}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} e_2)$ (соотв. $\overline{\sigma}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} e_2) = \overline{\sigma}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} e_1)$), то из(4.1) $\overline{\sigma}(xe_1) = \sigma(x)e_2$ и $\overline{\sigma}(x)e_2 = \sigma(x)e_1$. Дубль

$$\mathfrak{d} = (\mathfrak{d}^{\mathbb{C}})^{\overline{\sigma}} = \{xe_1 + \sigma(x)e_2 : x \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}\}$$

изоморфен $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ и

$$< xe_1 + \sigma(x)e_2, ye_1 + \sigma(y)e_2 >= K(x,y) - K(\sigma(x), \sigma(y)) = 2\,\mathrm{Im}K(x,y).$$

Случай $\mathfrak{d}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{d}^{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{d}^{\mathbb{C}} e$ рассматривается аналогично.

B) Рассмотрим случай, когда $\mathfrak{g}$ — простая алгебра с комплексной структурой. Пусть $i : x \to xi$, $i^2 = -1$ — комплексная структура на $\mathfrak{g}$. Расширение поля констант алгебры Ли $\mathfrak{g}$ до поля комплексных чисел $\mathbb{C} = \mathbb{R}(j)$, $j^2 = -1$ дает $\mathfrak{d}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{d}p \oplus \mathfrak{d}q$, где $p = \frac{1+ij}{2}$ и $q = \frac{1-ij}{2}$ – ортогональные идемпотенты. Сопряжение σ действует на $\mathfrak{d}^{\mathbb{C}}$ следующим образом: $\overline{\sigma}(xp) = xq$ и $\overline{\sigma}(xq) = xp$. Как выше, $(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{d}^{\mathbb{C}})$ — пара Манина и из теоремы 1.10 разлагается в прямую сумму комплексных пар Манина $(\mathfrak{g}p, \mathfrak{d}_1)$ и $(\mathfrak{g}q, \mathfrak{d}_2)$. Эти пары сопряжены относительно $\overline{\sigma}$. Следовательно, они имеют общий тип 1 или 2. Предположим, что они имеют тип 1, то есть $\mathfrak{d}_1 = (\mathfrak{g}p)e_1 + (\mathfrak{g}p)e_2$ и $\mathfrak{d}_2 = (\mathfrak{g}q)f_1 + (\mathfrak{g}q)f_2$ с ортогональными идемпотентами e_1, e_2 и f_1, f_2. Каждый образ $\overline{\sigma}((\mathfrak{g}p)e_i)$ является простой алгеброй Ли. Мы можем предположить, что $\overline{\sigma}((\mathfrak{g}p)e_i) = (\mathfrak{g}q)f_i$. Ограничение $\overline{\sigma}$ на диагональ совпадает с σ:

$$xqf_1 + xqf_2 = xq = \sigma(xp) = \overline{\sigma}(xp) = \overline{\sigma}(xpe_1) + \overline{\sigma}(xpe_2).$$

Получаем $\overline{\sigma}(xpe_1) = xqf_1$ и $\overline{\sigma}(xpe_2) = xqf_2$. Окончательно

$$\mathfrak{d} = (\mathfrak{d}^{\mathbb{C}})^{\overline{\sigma}} = \{d + \overline{\sigma}(d) : d \in \mathfrak{d}^{\mathbb{C}}\} = \{xe_1 + ye_2 : x, y \in \mathfrak{g}\} = \mathfrak{g}e_1 \oplus \mathfrak{g}e_2.$$

Случай дубля типа 2 рассматривается аналогично.

Каждая пара Манина типа 1, 2 или 3 дополняется до тройки Манина [4].

Теорема 3.2. Любая пара Манина для вещественной редуктивной алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{s}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{s}_k \oplus \mathfrak{z}$ (здесь $\mathfrak{s}_i$ — простые компоненты и $\mathfrak{z}$ — коммутативная компонента) единственным образом разлагается в прямую сумму $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}_{\mathfrak{s}_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{d}_{\mathfrak{s}_k} \oplus \mathfrak{d}_{\mathfrak{z}}$ пар Манина.

Доказательство получается из единственности разложения пары Манина для комплексной редуктивной алгебры Ли.

Работа поддержана грантом РФФИ 02-01-00017.

Литература

[1] Дринфельд В.Г. Квази-Хопфовы алгебры// Алгебра и анализ. 1989. Т.1. № 6. С. 1419–1457.

[2] Drinfel'd V.G. Quantum groups// Proc.Int.Congress.Math. Berkeley, 1986.

[3] Белавин А.А., Дринфельд В.Г. О классическом уравнении Янга-Бакстера для простых алгебр Ли// Функц.анализ и его прилож. 1982. Т.16.

[4] Cahen M., Gut S., Rawnsley J. Some remarks on the classification of Poisson Lie groups// Contemporary Math. 1994. V.179. P. 1–15.

[5] Карпелевич Ф.И. О неполупростых максимальных подалгебрах полупростых алгебр Ли// ДАН СССР. 1951. Т.76. № 6. С. 775–778.

[6] Гото М., Гроссханс Ф. Полупростые алгебры Ли. М.: Мир, 1981.

ON MANIN PAIRS[3]

 A.N. Panov[4]

We present classification of Manin pairs for semisimple real and complex Lie algebras. We prove the decomposition statement for reductive Lie algebras and study a decomposition of Manin pairs in general setting.

Поступила в редакцию 14/V/2002;
в окончательном варианте — 14/V/2002.

[3] Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. V.E. Voskresenskii.

[4] Panov Alexander Nikolaevich (panov@info.ssu.samara.ru), Dept. of Algebra and Geometry, Samara State University, Samara, 443011, Russia.