УДК 517.928

ПОСТРОЕНИЕ ТОЧНОГО СВЕРХУ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ ДЛЯ ЗАДАЧ С НЕПРЕРЫВНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ[1]

© 2002 Н.А. Зайчикова[2]

В статье рассмотрена задача построения точного сверху дифференциального включения для случая медленных переменных, когда правая часть непрерывна по фазовой переменной равномерно по времени. Доказательство теоремы о точном сверху дифференциальном включении основано на теореме об аппроксимации сверху. Для построения правой части аппроксимирующего дифференциального включения используется определение усредненной опорной функции через верхний предел, равномерный по начальным условиям.

Приведен пример построения точного сверху дифференциального включения для задачи с непрерывной правой частью, а также пример, показывающий существенность условия равномерности верхнего предела из определения усредненной опорной функции.

Введение

Построение правой части аппроксимирующего дифференциального включения связано с вычислением усредненной опорной функции [3]

$$M\{c(F,\psi)\}(x_0) = \lim_{\Delta\to\infty} \frac{1}{\Delta} \int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta} c(F(t,x_0),\psi)\,dt. \tag{1}$$

Для задач с быстрыми и медленными переменными в [4] рассмотрено построение точного сверху дифференциального включения для исходного включения с липшицевой правой частью и показано, что если предел (1) не существует, то усредненную опорную функцию можно определить следующим образом:

$$M\{c(F,\psi)\}(\chi_0) = \overline{\lim_{\Delta\to\infty}} \frac{1}{\Delta} \int\limits_{\tau_0}^{\tau_0+\Delta} c(F(t,\chi_0),\psi)\,dt, \tag{2}$$

где верхний предел существует равномерно по начальным условиям $(\tau_0,\chi_0)\in D_0$.

В [2] была доказана теорема об аппроксимации сверху дифференциального включения с полунепрерывной сверху правой частью для случая медленных переменных и определения (2) усредненной опорной функции $M\{c(F,\psi)\}$.

[1]Представлена доктором физико-математических наук профессором О.П. Филатовым.

[2]Зайчикова Надежда Анатольевна (zana@ssu.samara.ru), кафедра уравнений математической физики Самарского государственного университета, 443011, Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

В данной статье для частного случая, когда дифференциальные включения содержат только медленные переменные, а отображение из правой части исходного включения непрерывно по фазовой переменной x равномерно относительно времени t, приводится теорема о построении точного сверху дифференциального включения. Предлагаемая теорема основана на следствии теоремы об аппроксимации сверху из [2] для случая непрерывной правой части исходного включения.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу Коши для дифференциального включения (ДВ)

$$dx/dt \in \mu F(t,x), \quad x(t_0) = x_0, \tag{3}$$

где $\mu \in (0,a]$, $a > 0$, отображение $F : D_0 \to Kv(\mathbb{R}^m)$ определено на множестве $D_0 = \mathbb{R}_+ \times P$ и принимает непустые компактные выпуклые значения из евклидова пространства $\mathbb{R}^m$, область $P \subset \mathbb{R}^m$. Начальные данные $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}_+ \times P$. Множество всех решений типа Каратеодори задачи (3), определенных на отрезке $T(t_0,\mu) = [t_0, t_0 + 1/\mu]$, $\mu > 0$, будем обозначать символом $X(t_0, x_0, \mu)$.

Далее рассмотрим задачу аппроксимации сверху [3] дифференциального включения (3) в некоторой области $P_0 \subset P$ с помощью более простой задачи

$$d\xi/dt \in \mu F_0(\xi), \quad \xi(t_0) = x_0, \tag{4}$$

где $F_0 : P \to Kv(\mathbb{R}^m)$. Это означает, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists \mu_0 > 0\ \forall \mu \in (0,\mu_0]$ выполняется условие: для любого решения $x(t)$ задачи (3) существует решение $\xi(t)$ задачи (4) такое, что $\|x(t) - \xi(t)\|_m < \varepsilon \quad \forall t \in T(t_0,\mu)$ для любых начальных условий $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}_+ \times P_0$. Здесь $\|\cdot\|_m$ — евклидова норма в пространстве $\mathbb{R}^m$ со скалярным произведением $< \cdot, \cdot >$.

Дифференциальное включение (4) будем называть точным в задаче аппроксимации сверху дифференциального включения (3) в классе $L_0(m,P)$, если включение (4) аппроксимирует сверху задачу (3), при этом любая другая аппроксимирующая сверху задача из класса $L_0(m,P)$ аппроксимирует сверху также и точное ДВ. Дифференциальное включение (4) называется точным в области $P_0 \subset P$, если начальное условие x_0 в задачах (3), (4) можно взять произвольно в области P_0.

Отображения F и F_0 берутся из классов $N(m, D_0)$ и $L_0(m,P)$ соответственно. Чтобы определить указанные классы, напомним, что взаимное расположение ограниченных множеств $A, B \subset \mathbb{R}^m$ характеризуется полуотклонением этих множеств $\beta(A,B) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subset [B]^\varepsilon\}$ и отклонением множеств $\alpha(A,B) = \max\{\beta(A,B), \beta(B,A)\}$.

Класс $N(m, D_0)$ составляют измеримые по $t \in \mathbb{R}_+$ отображения $F : D_0 \to Kv(\mathbb{R}^m)$ такие, что 1) для некоторой постоянной $C = C(F) > 0$ имеет место неравенство $|F(t, x(t)| = \sup\{\|f\|_m : f \in F(t,x)\} \leqslant C$ почти всюду по $t \in \mathbb{R}_+$ и при любом $x \in P$, то есть отображение F равномерно ограничено; 2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ такое, что если $\|x - x_0\| < \delta$, $x \in D$, то выполняется неравенство $\alpha(F(t,x), F(t,x_0)) < \varepsilon$ сразу для всех $t \in \mathbb{R}_+$, то есть отображение F непрерывно по x равномерно относительно t.

Класс $L_0(m,P)$ образуют измеримые по t отображения $F_0 : P \to Kv(\mathbb{R}^m)$ такие, что 1) отображение F_0 равномерно ограничено с константой $C = C(F_0)$; 2) функция F_0 удовлетворяет условию Липшица с общей постоянной $l = l(F_0)$, то есть $\forall x_1, x_2 \in P \quad \alpha(F(x_1), F(x_2)) \leqslant l\|x_1 - x_2\|$ почти для всех $t \in \mathbb{R}_+$.

Напомним, что вещественная функция $c(A,\psi)$ векторного аргумента $\psi \in \mathbb{R}^m$ называется опорной функцией ограниченного множества $A \subset \mathbb{R}^m$ и определяется формулой $c(A,\psi) = \sup\{< a, \psi >: a \in A\}$. Определим теперь усредненную опорную функцию [4]:

$$M\{c(F,\psi)\}(\chi_0) = \overline{\lim_{\Delta\to\infty}} \frac{1}{\Delta} \int\limits_{\tau_0}^{\tau_0+\Delta} c(F(t,\chi_0),\psi)\,dt, \tag{5}$$

причем $M\{c(F,\psi)\}$ равномерна по векторам $(\tau_0,\chi_0) \in D_0$ и $\psi \in \mathbb{R}^m$, $\quad ||\psi|| = 1$. Таким образом, введена функция $M\{c(F,\psi)\}$, которая является опорной к множеству $F_0(\xi)$ и определяет правую часть дифференциального включения (4) в классе $L_0(m,P)$.

2. Основная теорема

Рассмотрим следующие условия.

Условие (a): для некоторой непустой области $P_0 \subset P \quad \exists \rho_0 > 0$ такое, что для любого $x \in X(t_0,x_0,\mu)$ выполняется включение $[x(t)]^{\rho_0} \subset P \quad \forall\, t \in T(t_0,\mu)$.

Условие (b): равномерно по векторам $(\tau_0,\chi_0) \in D_0$ и $\psi \in \mathbb{R}^m$, $\quad ||\psi|| = 1$, существует верхний предел (5).

Условие (c): отображение F_0, определяемое усредненной опорной функцией (5), принадлежит классу $L_0(m,P)$.

Теорема. *Пусть отображение F из ДВ (3) принадлежит классу $N(m,D_0)$, и выполняются условия (a)–(c). Тогда ДВ (4) является точным сверху для задачи (3) в области $P_0 \subset P$ в классе отображений $L_0(m,P)$.*

Доказательство.

Согласно следствию из теоремы об аппроксимации сверху дифференциального включения с полунепрерывной правой частью, доказанной в [2], ДВ (4) аппроксимирует сверху задачу (3). Теперь остается доказать, что оно является точным сверху для исходного дифференциального включения.

Доказательство проведем от противного. Предположим, что ДВ (4) не является точным сверху для (3). Тогда найдется отображение $F_1 \in L_0(m,P)$ такое, что дифференциальное включение

$$d\xi/dt \in \mu\, F_1(\xi), \quad \xi(t_0) = x_0 \tag{6}$$

аппроксимирует сверху задачу (3) в области P_0, но условие $F_0(x) \subset F_1(x)\ \forall\, x \in P_0$ не выполняется в некоторой точке $x_* \in P_0$. Это означает, что при достаточно малом $\varepsilon_* > 0$ найдется вектор $\psi_* \in \mathbb{R}^m$, $||\psi_*|| = 1:$

$$c(F_0(x_*),\psi_*) - c(F_1(x_*),\psi_*) > \varepsilon_*.$$

В силу существования равномерного верхнего предела (5) существует последовательность

$$\left\{ \frac{1}{\Delta_j} \int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta_j} v_j(t,x_*)\,dt \right\}$$

такая, что

$$c\left(\frac{1}{\Delta_j} \int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta_j} v_j(t,x_*)\,dt, \psi_* \right) - c(F_1(x_*),\psi_*) > \varepsilon_*, \quad j = 1,2,3,\ldots.$$

Тогда

$$\rho\left(\frac{1}{\Delta_j}\int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta_j} v_j(t,x_*)\,dt, F_1(x_*)\right) > \varepsilon_*, \quad j=1,2,3,\ldots. \tag{7}$$

Поскольку $F(t,x)$ непрерывно зависит от x, то ближайшая к $v_j(t,x_*)$ точка $v_j(t,x)$:

$$\|x(t)-x_*\| < \delta_*$$

будет тоже непрерывно зависеть от x [1, теорема 31, с. 207], а также отметим, что функция $v_j(t,x)$ измерима по t , $\forall\, x\in P,\ j=1,2,3,\ldots$ [1, теорема 28, с. 207].

Поскольку отображение $F(t,x)$ непрерывно по x равномерно относительно t, то для некоторого $0<\delta_0\leqslant C$, где C — константа из условия равномерной ограниченности отображений F и F_0, из неравенства (7) следует оценка

$$\rho\left(\frac{1}{\Delta_j}\int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta_j} v_j(t,x(t))\,dt, F_1(x(t))\right) \geqslant \varepsilon_*/2 \quad j=1,2,3,\ldots, \tag{8}$$

где $x(t)$ — непрерывная функция, график которой принадлежит области $[t_0,t_0+\Delta_j]\times\times\overline{B}(x_*,\delta_0)$, где $\overline{B}(x_*,\delta_0)$ — замкнутый шар пространства $\mathbb{R}^m$ с центром в точке x_* радиуса δ_0.

Определим μ_0 из условия аппроксимации сверху задачи (3) задачей (6) и $\mu\in(0,\mu_0]$. Выберем номер j такой, чтобы выполнялось условие $\Delta_j\leqslant 1/\mu$. Зафиксируем этот номер и положим $\Delta=\Delta_j,\ v(t,x)=v_j(t,x),\ x(t)\in\overline{B}(x_*,\delta_0)$.

Задача

$$dx/dt\in\mu\, v(t,x), \quad x(t_0)=x_0$$

имеет некоторое решение $x(t)$, которое можно считать определенным на промежутке $T(t_0,\mu)$, поскольку $|F(t,x)|\leqslant C$.

Пусть $\eta(t)$ — решение задачи (6), которое аппроксимирует решение $x(t)$ при заданной точности ε :

$$0<\varepsilon<min\{\delta_0/2,\ \delta_0\varepsilon_*/2C\},$$

то есть выполняется неравенство

$$\|x(t)-\eta(t)\|<\varepsilon \quad \forall\, t\in T(t_0,\mu), \tag{9}$$

где $\mu\in(0,\mu_0],\ \mu_0=\mu_0(\varepsilon)$.

Выберем $\Delta_0(\varepsilon)$ так, чтобы $\forall\,\Delta\geqslant\Delta_0$ выполнялось

$$\frac{\delta_0}{C\,\Delta}\leqslant\mu_0.$$

Положим $\mu=\delta_0/C\,\Delta$. За счет выбора числа δ_0 полагаем $\delta_0/C<1$, следовательно,

$$T(t_0,\mu,\delta_0)=[t_0,t_0+\delta_0/C\,\Delta]\subset T(t_0,\mu).$$

Тогда $\forall\, t\in[t_0,t_0+\Delta]$, $x(t)\in\overline{B}(x_*,\delta_0/2)$ справедливы оценки:

$$\|x(t)-x_*\|\leqslant\mu C\delta=\delta_0,$$

$$\|\eta(t)-x_*\|\leqslant\|\eta(t)-x(t)\|+\|x(t)-x_*\|\leqslant\varepsilon+\delta_0/2=\delta_0.$$

Отсюда для $x(t)$ и $\eta(t)$ выполняется оценка (8).

По теореме об отделимости выпуклых компактных множеств [5, с.23] из (8) следует, что существуют две параллельные гиперплоскости Π_1 и Π_2, каждая из которых разделяет точку $v = \frac{1}{\Delta}\int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta} v(t, x(t))\, dt$ и множество $F_1(\eta(t))$, причем расстояние между гиперплоскостями равно $\varepsilon_*/2$.

Пусть e — единичный нормальный вектор гиперплоскостей Π_1 и Π_2, выбранный так, чтобы выполнялось неравенство

$$< e, v - f_1 > \geqslant \varepsilon_*/2, \quad f_1 \in F_1(\eta(t)).$$

Отсюда имеем:

$$< e, x(\Delta) - \eta(\Delta) > = < e, \mu\, v\, \Delta - \mu \int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta} \dot{\eta}(t)\, dt > \geqslant \mu\, \Delta\, \varepsilon_*/2 = \frac{\delta_0\, \varepsilon_*}{2C} > \varepsilon.$$

Таким образом, $\|x(\Delta) - \eta(\Delta)\| > \varepsilon$ при $\Delta \leqslant 1/\mu$. Полученное неравенство противоречит (9). Следовательно, наше предположение ошибочно, и дифференциальное включение (4) точно аппроксимирует задачу (3) сверху. Что и требовалось доказать.

Замечание: для того чтобы аппроксимирующее сверху включение было точным, достаточно, чтобы его правая часть принадлежала классу $N^a(m, P)$, то есть подмножеству отображений класса $N(m, D_0)$, не зависящих от времени t. Следующее утверждение устанавливает, будет ли точным сверху дифференциальное включение, определяемое усредненной опорной функцией $M\{c(F, \psi)\}$, в случае, когда задачи связаны условием аппроксимации.

Утверждение. *Пусть отображения F и F_0 из ДВ (3) и (4) принадлежат классам $N(m, D_0)$ и $N^a(m, P)$ соответственно, и выполняются условия (a), (b). Задача (4) аппроксимирует сверху задачу (3) в области $P_0 \subset P$. Тогда ДВ (4) является точным сверху для включения (3) в области P_0 в классе отображений $N^a(m, P)$.*

3. Пример

Для иллюстрации теоремы приведем следующий пример.

Рассмотрим дифференциальное включение:

$$dx/dt \in \mu F(t, x), \quad x(0) = x_0, \tag{10}$$

где $F(t, x) = A(t)C(x) + f(t)$ принадлежит классу непрерывных отображений. $A(t)C(x) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to Kv(\mathbb{R})$, где $A(t)$ и $C(x)$ такие, что

$$A(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ -k\, exp(-kt), & t \geqslant 0, \end{cases} \qquad C(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ [0, \sqrt{x}\,], & 0 < x \leqslant 1, \\ [0, 1], & x > 1, \end{cases}$$

где $C(x)$ — непрерывное отображение, не удовлетворяющее условию Липшица, а функцию $f(t) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ построим следующим образом:

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [\Delta_{2n}, \Delta_{2n+1}], \\ 0, & t \in (\Delta_{2n+1}, \Delta_{2n+2}), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \end{cases}$$

причем так, чтобы ее среднего не существовало, то есть

$$\frac{1}{\Delta_{2j}}\int\limits_0^{\Delta_{2j}} f(t)\,dt = p_j, \quad \frac{1}{\Delta_{2j+1}}\int\limits_0^{\Delta_{2j+1}} f(t)\,dt = q_j,$$

$p = 1/2j, \quad q = 1 - 1/(2j+1), \quad j = 1,2,3,\dots, \quad \Delta_0 = \Delta_1 = 1$. Тогда

$$\varliminf_{\Delta\to\infty}\frac{1}{\Delta}\int\limits_0^{\Delta} f(t)\,dt = 0, \quad \varlimsup_{\Delta\to\infty}\frac{1}{\Delta}\int\limits_0^{\Delta} f(t)\,dt = 1.$$

Теперь построим правую часть точного сверху дифференциального включения. Усредненная опорная функция

$$M\{c(F,\psi)\} = \begin{cases} 0, & \psi \leqslant 0, \\ 1, & \psi > 0 \end{cases}$$

определяет отрезок [0,1].

Поскольку выполнены условия (a)–(c) представленной теоремы, то полученное включение

$$d\xi/dt \in \mu[0,1], \quad \xi(0) = x_0$$

является точным в задаче аппроксимации сверху дифференциального включения (10).

Замечание: условие (b) является существенным. Для того чтобы проверить это утверждение, достаточно в предыдущем примере в качестве $f(t)$ взять следующую функцию:

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [\Delta_{2n}, \Delta_{2n+1}], \\ 0, & t \in (\Delta_{2n+1}, \Delta_{2n+2}), \quad n = 0,1,2,\dots, \end{cases}$$

$$\frac{1}{\Delta_{2j}}\int\limits_0^{\Delta_{2j}} f(t)\,dt = p, \quad \frac{1}{\Delta_{2j+1}}\int\limits_0^{\Delta_{2j+1}} f(t)\,dt = q,$$

$0 < p < q < 1, \quad \Delta_0 = \Delta_1 = 1$. Тогда

$$\varliminf_{\Delta\to\infty}\frac{1}{\Delta}\int\limits_0^{\Delta} f(t)\,dt = p, \quad \varlimsup_{\Delta\to\infty}\frac{1}{\Delta}\int\limits_0^{\Delta} f(t)\,dt = q.$$

Условие равномерности верхнего предела по начальному времени из определения усредненной опорной функции здесь не выполняется.

Построим правую часть аппроксимирующего дифференциального включения. Усредненная опорная функция

$$M\{c(F,\psi)\} = \begin{cases} p, & \psi \leqslant 0, \\ q, & \psi > 0 \end{cases}$$

определяет отрезок [p,q]. Полученное включение

$$d\xi/dt \in \mu[p,q], \quad \xi(0) = x_0$$

не только не является точным в задаче аппроксимации сверху дифференциального включения (10), но и не является аппроксимирующим сверху для (10).

Литература

[1] Благодатских В.И., Филиппов А.Ф. Дифференциальные включения и оптимальное управление// Труды Математ. инст. АН СССР. 1985. Т.169. С. 194–252.

[2] Зайчикова Н.А. Усреднение дифференциальных включений с полунепрерывной правой частью// Научные труды конференции СГПУ. Самара: СГПУ, 2001. С. 34–42.

[3] Филатов О.П., Хапаев М.М. Усреднение систем дифференциальных включений. М.: МГУ, 1998. 160 с.

[4] Филатов О.П. Точные дифференциальные включения в теории усреднения// Труды Средневолжского матем. об-ва. 1999. Т.2. № 1. С. 28-33.

[5] Филатов О.П. Лекции по многозначному анализу и дифференциальным включениям. Самара: Изд-во Сам. гос. ун-та, 2000. 116 с.

THE EXACT UPPER DIFFERENTIAL INCLUSION CONSTRUCTION FOR THE PROBLEMS WITH CONTINUOUS RIGHT-HAND SIDE[3]

© 2002 N.A. Zaychikova[4]

In this paper the exact upper differential inclusion construction problem for a slow variables case is considered, when the right-hand side is continuous on a phase variable uniformly with respect to time. The proof of the theorem about exact upper differential inclusion is based on the upper approximation theorem. For an approximating differential inclusion right-hand side construction is used the averaged supporting function definition through uniform on the initial conditions upper limit.

The exact upper differential inclusion construction example for the problem with a continuous right-hand side is given. One more example given shows that the upper limit uniformity condition from the averaged supporting function definition is essential.

Поступила в редакцию $13/IV/2002$;
в окончательном варианте — $14/V/2002$.

[3] Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. O.P. Filatov.

[4] Zaychikova Nadegda Anatolevna (zana@ssu.samara.ru), Dept. of Partial Differential Equations, Samara State University, Samara, 443011, Russia.