МАТЕМАТИКА

УДК 517.9 + 531.3

ЗАДАЧА ГИЛЬДЕНА–МЕЩЕРСКОГО: ТРАЕКТОРИИ ДВИЖЕНИЯ

© 2002 Л.М. Беркович[1], О.Л. Старинова[2]

Задача Гильдена–Мещерского используется для описания эволюции двойных звезд при вековой потере массы за счет фотонной и корпускулярной активности. Она служит также математической моделью для различных случаев динамики двух тел переменной массы.

В данной работе рассмотрены законы изменения массы, допускающие приведение уравнений движения к стационарному виду. Построены траектории относительного движения как для ранее известных законов Мещерского и Эддингтона–Джинса, так и для других законов изменения массы.

Введение

Трудности исследования нестационарных задач небесной механики проявляются уже в простейшем случае задачи двух тел. Одна из них заключается в том, что в отличие от классической ситуации с постоянными массами здесь возможно множество различных постановок. Это вызвано тем, что характер реактивных сил, появляющихся вследствие изменения масс компонентов системы, может быть весьма разнообразным. Но каждой математической постановке соответствует определенное множество физических постановок.

Одной из наиболее известных в небесной механике является нестационарная задача Гильдена–Мещерского (ГМ) [1, 2], систематическое исследование которой было начато Г.Н. Дубошиным еще в 1925 г (см. также [3, 4]). Эта задача используется для описания движения двух тел — точек переменной массы без учета влияния вещества, испускаемого одним телом на другое, в предположении, что изменение массы каждого тела происходит изотропно. Задача ГМ служит также математической моделью для различных случаев динамики тел переменной массы, когда их ньютоновское взаимодействие значительно превосходит реактивные силы или когда имеется возмущающая сила типа "трения", компенсирующая реактивные силы, а также в ряде других случаев [5, 6, 7]. Речь идет об уравнении движения вида

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\mu(t)\frac{\mathbf{r}}{r^3}, \tag{1}$$

[1] Беркович Лев Мейлихович (`berk@ssu.samara.ru`), действительный член Академии нелинейных наук, кафедра алгебры и геометрии Самарского государственного университета, 443011, Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

[2] Старинова Ольга Леонардовна, кафедра теоретической механики Самарского государственного аэрокосмического университета.

где $\mathbf{r} = (x, y)$ — радиус-вектор относительного движения одной материальной точки относительно другой в плоскости орбиты, $r = |\mathbf{r}|$ — расстояние между точками, $\mu(t)$ — некоторая функция времени. Отметим, что к этому же уравнению приводит и космогоническая гипотеза Дирака о вековом изменении гравитационной постоянной (см. Dirac [8], Vinti [9]).

Известны следующие случаи изменения массы:

$$\mu(t) = (\alpha t + \beta)^{-1}, \quad \mu(t) = (\alpha t + \beta)^{-1/2}, \quad \mu(t) = (\alpha t^2 + \beta t + \gamma)^{-1/2}, \tag{2}$$

допускающие интегрирование задачи Гильдена–Мещерского (1) в квадратурах. Эти случаи часто называют соответственно первым, вторым и объединенным законами И.В. Мещерского [2, 10]. Установленные чисто математическим путем, они получили физическое обоснование, когда на основании теории внутреннего строения и эволюции звезд был открыт дифференциальный закон Эддингтона–Джинса [11]

$$\dot{\mu} = -k\mu^{\nu}. \tag{3}$$

При $\nu = 2$ имеем первый, а при $\nu = 3$ — второй закон Мещерского.

"Таким образом, мы можем считать, если угодно, закон ***И.В.*** *Мещерского законом природы, но мне лично кажется,* — писал Г.Н. Дубошин [3], — *что возможны и другие законы изменения масс небесных тел, открыть которые возможно только путем тщательного наблюдения".* Если $\nu = 0$, масса $\mu(t)$ изменяется по линейному, а при $\nu = 1$ — по экспоненциальному законам. Высказав гипотезу о том, что в природе возможны законы изменения массы, отличные от законов (2), (3), Г.Н. Дубошин [3] дал качественный анализ траекторий движения в задаче (1) при различных предположениях о характере изменения $\mu(t)$.

1. Автономизация задачи Гильдена–Мещерского

В работах [5, 6, 7] рассмотрена проблема преобразования задачи ГМ к автономному виду и получены законы изменения массы, допускающие такое преобразование. В данной работе впервые построены траектории относительного движения для различных случаев изменения массы.

Лемма 1. Для того, чтобы задачу (1) преобразованием Куммера–Лиувилля (КЛ)

$$\mathbf{r} = v(t)\bar{\rho}, \; d\tau = u(t)dt \tag{4}$$

привести к автономному виду

$$\bar{\rho}'' \pm b_1\bar{\rho}' + b_0\bar{\rho} = -\mu_0\frac{\bar{\rho}}{\rho^3}, \tag{5}$$

необходимо и достаточно, чтобы имели место соотношения:

$$\frac{1}{2}\frac{\ddot{u}}{u} - \frac{3}{4}\left(\frac{\dot{u}}{u}\right)^2 - \frac{1}{4}\delta u^2 = 0, \; \delta = b_1^2 - 4b_0, \tag{6}$$

$$\ddot{v} - b_0 v^{-3} = 0, \; b_1 = 0, \tag{7}$$

$$\ddot{v} - \frac{b_0}{b_1^2}\frac{v^{-3}}{\left(\int\limits_{t_0}^{t} v^{-2}dt\right)^2} = 0, \; b_1 \neq 0, \tag{8}$$

причем $v(t)$ и $u(t)$ связаны соотношениями:

$$v(t) = |u(t)|^{-1/2} \exp \left(\pm \frac{1}{2} b_1 \int\limits_{t_0}^{t} u(t) dt \right), \tag{9}$$

$$\ddot{v} - b_0 u^2(t) v = 0, \tag{10}$$

$$\mu(t) = \mu_0 u^2(t) v^3(t). \tag{11}$$

Доказательство. Необходимость. Применив к (1) преобразование (4), получим

$$\bar{\rho}'' + \frac{1}{u^2} \left(2\frac{\dot{v}}{v} u + \dot{u} \right) \bar{\rho}' + \frac{\ddot{v}}{u^2 v} \bar{\rho} = -\frac{\mu(t)}{u^2 v^3} \frac{\bar{\rho}}{\rho^3}. \tag{12}$$

Сопоставление уравнений (12) и (5) позволяет установить зависимости (10) и (11). Приравняв коэффициенты при $\bar{\rho}'$, придем к линейному уравнению относительно v:

$$\dot{v} = \left(-\frac{1}{2} \frac{\dot{u}}{u} \pm \frac{b_1}{2} u \right) v, \tag{13}$$

интегрируя которое, получим формулу (9). Подставив формулу (9) в выражение (10), получим уравнение (6). Выбрав в (13) в качестве независимой переменной u, получим уравнение Бернулли

$$\dot{u} = -2u \frac{\dot{v}}{v} \pm b_1 u^2,$$

которое имеет решения

$$u = v^{-2}, \quad \text{если } b_1 = 0, \tag{14}$$

$$u = \mp \frac{v^{-2}}{b_1 \int\limits_{t_0}^{t} v^{-2} dt}, \quad \text{если } b_1 \neq 0. \tag{15}$$

Подставив формулы (14) или (15) в выражение (10), получим уравнения (7) или (8).

Достаточность. Пусть выполнены утверждения леммы 1. Тогда преобразованием (4) уравнение (1) приводится к виду (12). Поскольку выполнены условия (9)–(11), то уравнение (12) становится тождественным (5). Уравнение (6) будем называть уравнением Куммера–Шварца, (7) — уравнением Ермакова, а преобразование

$$\mathbf{r} = |u|^{-1/2} \exp \left(\pm \frac{1}{2} b_1 \int\limits_{t_0}^{t} u dt \right) \bar{\rho}, \ d\tau = u dt \tag{16}$$

— преобразованием Куммера–Лиувилля — в честь авторов, занимавшихся указанными уравнениями и преобразованием.

Если $b_1 = 0$, преобразование (16) становится преобразованием Нехвила

$$\mathbf{r} = |u|^{-1/2} \bar{\rho}, \ d\tau = u dt, \tag{17}$$

которое фактически ранее применялось Лиувиллем.

Теорема 1 [7]. Для того чтобы задачу (1) преобразованием (17) (при $b_1 = 0$) привести к виду

$$\bar{\rho}'' + b_0\bar{\rho} = -\mu_0 \frac{\bar{\rho}}{\rho^3}, \tag{18}$$

необходимо и достаточно, чтобы масса $\mu(t)$ удовлетворяла дифференциальному уравнению

$$\ddot{\mu} - \frac{2}{\mu}\dot{\mu}^2 + b_0\mu^5 = 0, \tag{19}$$

при этом преобразование (17) принимает вид

$$\mathbf{r} = \mu^{-1}(t)\bar{\rho},\ d\tau = \mu^2(t)dt. \tag{20}$$

Доказательство. Необходимость. Так как в силу (17) $v(t) = u^{-1/2}$, то формула (11) примет вид $\mu(t) = \mu_0 u^{1/2}$, откуда, если положить $\mu_0 = 1$, получим

$$u(t) = \mu^2(t),\ v(t) = \mu^{-1}(t). \tag{21}$$

Подставив (21) в уравнения (4),(6), получим (20), (19).

Достаточность. Пусть $\mu(t)$ удовлетворяет (19). Подстановками

$$\mu(t) = u^{-2},\ \mu(t) = v^{-1}$$

уравнение (19) приводится к виду (6) и (7) соответственно. А это является критерием приводимости (1) к (18) преобразованием Нехвила (17).

Следствие 1. Для того чтобы задачу (1) преобразованием (4) привести к виду

$$\bar{\rho}'' = -\mu_0 \frac{\bar{\rho}}{\rho^3}, \tag{22}$$

необходимо и достаточно, чтобы $\mu(t)$ изменялось согласно первому закону Мещерского (2).

Действительно, при $b_0 = 0$ из (18) получается (22) и уравнение (19) принимает вид

$$\ddot{\mu} - \frac{2}{\mu}\dot{\mu}^2 = 0. \tag{23}$$

Общим интегралом этого уравнения и является первый закон Мещерского (2).

Теорема 2 [7]. Для того, чтобы задачу (1) преобразованием (16) привести к виду (15) (при $b_1 \neq 0$), необходимо и достаточно, чтобы масса $\mu(t)$ удовлетворяла интегродифференциальному уравнению

$$\ddot{\mu} - \frac{2}{\mu}\dot{\mu}^2 + \frac{1}{4}\left(9b_1^2 - \delta\right)\frac{\mu^5}{9b_1^2\left(\int\limits_{t_0}^{t}\mu^2 dt\right)^2} = 0, \tag{24}$$

при этом преобразование КЛ (16) имеет вид

$$\mathbf{r} = \mu^{-1}\left(3b_1\int\limits_{t_0}^{t}\mu^2 dt\right)^{2/3}\bar{\rho},\ d\tau = \mu^2\left(\pm 3b_1\int\limits_{t_0}^{t}\mu^2 dt\right)^{-1} dt. \tag{25}$$

Доказательство. Необходимость. Подставив (9) в (11), будем иметь

$$\mu(t) = \mu_0 u^{1/2} \exp\left(\pm b_1 \int\limits_{t_0}^{t} u dt\right), \ \mu_0 = 1, \tag{26}$$

откуда получим уравнение Бернулли относительно u:

$$\dot{u} = 2\frac{\dot{\mu}}{\mu}u \mp 3b_1 u^2, \ b_1 \neq 0,$$

решением которого является

$$u = \mu^2 \left(\pm 3b_1 \int\limits_{t_0}^{t} \mu^2 dt\right)^{-1}. \tag{27}$$

Подставив (27) в (6), (16), получим соответственно (24) и (25).

Достаточность. Пусть масса $\mu(t)$ удовлетворяет уравнению (24). Из (11) в силу (15) имеем

$$\mu(t) = b_1^{-2} v^{-1} \left(\int\limits_{t_0}^{t} v^{-2} dt\right)^{-2}.$$

Подставляя это выражение и (26) в (24), получаем (6) и (8) соответственно. А это является критерием приводимости (1) преобразованием (4) к виду (5).

Уравнения (19) и (24) будем называть соответственно дифференциальным и интегродифференциальным законами изменения массы, из которых конечные формулы могут быть получены путем интегрирования.

2. Нахождение законов изменения массы

Для построения законов изменения массы нам необходимо найти в явном виде преобразования Куммера–Лиувилля (Нехвила). А для этого необходимо знать решения уравнений Куммера–Шварца (6) и Ермакова (7).

Лемма 2 [12]. Общее решение уравнения Куммера–Шварца (6) имеет вид

$$u(t) = (\alpha_1 t + \beta_1)^{-1}(\alpha_2 t + \beta_2)^{-1}, \ \delta = (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2 > 0, \tag{28}$$

$$u(t) = (At^2 + Bt + C)^{-1}, \ \delta = B^2 - 4AC < 0, \tag{29}$$

$$u(t) = (\alpha t + \beta)^{-2}, \ \delta = 0. \tag{30}$$

Доказательство. Справедливость формул (28)–(30) проверяется непосредственной подстановкой.

В дальнейшем будут использованы следующие частные случаи решения $u(t)$:

$$u(t) = (\alpha t + \beta)^{-1}, \ \delta = \alpha^2, \tag{31}$$

$$u(t) = 1, \ \delta = 0. \tag{32}$$

Лемма 3 [12]:

а) Общее решение уравнения Ермакова (7) описывается следующими формулами:

$$v(t) = \sqrt{(\alpha_1 t + \beta_1)(\alpha_2 t + \beta_2)},\ -4b_0 = (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2 > 0, \tag{33}$$

$$v(t) = \sqrt{At^2 + Bt + C},\ -4b_0 = B^2 - 4AC < 0, \tag{34}$$

$$v(t) = \alpha t + \beta,\ b_0 = 0; \tag{35}$$

важными частными случаями являются формулы

$$v(t) = \sqrt{\alpha t + \beta}, \tag{36}$$

$$v = 1; \tag{37}$$

б) Общее решение интегродифференциального уравнения (8) описывается формулами:

$$v(t) = (\alpha_1 t + \beta_1)^{\frac{1}{2} \pm \frac{b_1}{2\sqrt{\delta}}}(\alpha_2 t + \beta_2)^{\frac{1}{2} \mp \frac{b_1}{2\sqrt{\delta}}},\ b_1 \in \mathbf{R},\ \delta = (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2 > 0, \tag{38}$$

$$v(t) = \sqrt{(\alpha_1 t + \beta_1)(\alpha_2 t + \beta_2)} \exp\left(\pm\frac{i\omega}{2\sqrt{\delta}} \ln\left|\frac{\alpha_1 t + \beta_1}{\alpha_2 t + \beta_2}\right|\right),\ b_1 = i\omega, \tag{39}$$

$$v(t) = \sqrt{At^2 + Bt + C} \exp\left(\pm\frac{b_1}{\sqrt{\delta}} \arctan\frac{2At + B}{\sqrt{|\delta|}}\right),\ \delta = B^2 - 4AC < 0, \tag{40}$$

$$v(t) = (\alpha t + \beta) \exp\left(\mp\frac{b_1}{2\alpha}(\alpha t + \beta)\right),\ \delta = 0, \tag{41}$$

$$v(t) = (\alpha t + \beta)^{\frac{1}{2} \pm \frac{b_1}{2\alpha}},\ b_1 \in \mathbf{R}, \tag{42}$$

$$v(t) = \sqrt{\alpha t + \beta} \exp\left(\pm\frac{i\omega}{2\alpha} \ln|\alpha t + \beta|\right),\ b_1 = i\omega,\ \delta = \alpha^2, \tag{43}$$

$$v(t) = \exp(\pm\frac{1}{2}b_1 t),\ \delta = 0 \tag{44}$$

(всюду b_1 принимает как вещественные, так и чисто мнимые значения).

Доказательство:

а) так как уравнения (7) и (6) связаны между собой преобразованием $v = u^{-1/2}$, то из (28)–(30) получим формулы (33)–(35), а из (31), (32) формулы (36), (37);

б) в силу (9) из (28)–(30) получим соотношения (38)–(41), а из (31)–(32) формулы (42)–(44).

Вместо нелинейных уравнений (7) и (8) для множителя преобразования будем рассматривать линейное уравнение (10) с переменным коэффициентом $u^2(t)$, который можно вычислить, исходя из формул (28)—(32). При этом придем к уравнению Лиувилля (называемому также уравнением Безга):

$$\ddot{v} + \frac{d}{(at^2 + bt + c)}v = 0,\ a, b, c, d = \text{const}. \tag{45}$$

Лемма 4.

1. Пусть $\delta = (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2 > 0$, тогда уравнение Лиувилля принимает вид

$$\ddot{v} + \frac{1}{4}\left((\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2 - b_1^2\right)(\alpha_1 t + \beta_1)^{-2}(\alpha_2 t + \beta_2)^{-2} v = 0$$

и имеет в качестве фундаментальной системы решений (ФСР)

формулы (38), если $b_1 \neq 0$ — вещественное;

формулы (39), если $b_1 = i\omega$; и

формулы: $\left(\sqrt{(\alpha_1 t+\beta_1)(\alpha_2 t+\beta_2)},\ \sqrt{(\alpha_1 t+\beta_1)(\alpha_2 t+\beta_2)}\ln\left|\dfrac{\alpha_1 t+\beta_1}{\alpha_2 t+\beta_2}\right|\right)$, если $b_1 = 0$.

2. Пусть $\delta = B^2 - 4AC < 0$, уравнение Лиувилля принимает вид

$$\ddot{v} + \frac{1}{4}(B^2 - 4AC - b_1^2)(At^2 + Bt + C)^{-2} v = 0$$

и имеет в качестве ФСР

формулы (40), если $b_1 \neq 0$;

формулы $\left(\sqrt{At^2+Bt+C},\ \sqrt{At^2+Bt+C}\,\arctan\dfrac{2At+B}{\sqrt{|\delta|}}\right)$, если $b_1 = 0$.

3. Пусть $\delta = 0$, тогда уравнение Лиувилля примет вид

$$\ddot{v} - \frac{1}{4} b_1^2 (\alpha t + \beta)^{-4} v = 0$$

и имеет в качестве ФСР

формулы (41), если $b_1 \neq 0$; и

формулы $(\alpha t + \beta,\ 1)$, если $b_1 = 0$.

4. Пусть $\delta = \alpha^2 > 0$, тогда уравнение Лиувилля вырождается в уравнение Эйлера–Лежандра

$$\ddot{v} + \frac{1}{4}(\alpha^2 - b_1^2)(\alpha t + \beta)^{-2} v = 0$$

и имеет в качестве ФСР

формулы (42), если $b_1 \neq 0$ — вещественное;

формулы (43), если $b_1 = i\omega$,

формулы $\left(\sqrt{\alpha t+\beta},\ \sqrt{\alpha t+\beta}\ln|\alpha t+\beta|\right)$, если $b_1 = 0$.

5. Пусть $\delta = 0$, $u \equiv 1$, тогда уравнение Лиувилля вырождается в уравнение с постоянными коэффициентами

$$\ddot{v} - \frac{1}{4} b_1^2 v = 0$$

и имеет в качестве ФСР

формулы (44), если $b_1 \neq 0$, и

формулы $(1,\ t)$, если $b_1 = 0$.

Теорема 3 [5, 6]. Все математические законы изменения массы $\mu(t)$ в задаче (1), допускающей приведение к автономному виду (5) преобразованием (4), даются конечными уравнениями

$$\mu(t) = (\alpha_1 t + \beta_1)^{-\frac{1}{2} \pm \frac{3b_1}{2\sqrt{\delta}}} (\alpha_2 t + \beta_2)^{-\frac{1}{2} \mp \frac{3b_1}{2\sqrt{\delta}}},\ b_1 \in \mathbf{R}; \tag{46}$$

$$\mu(t) = (\alpha_1 t + \beta_1)^{-\frac{1}{2}} (\alpha_2 t + \beta_2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\pm i \frac{3\omega}{2\sqrt{\delta}} \ln\left|\frac{\alpha_1 t + \beta_1}{\alpha_2 t + \beta_2}\right|\right),$$

$$b_1 = i\omega,\ \delta = b_1^2 - 4b_0 = (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2 > 0,\ \alpha_1 \neq 0,\ \alpha_2 \neq 0; \tag{47}$$

$$\mu(t) = (At^2 + Bt + C)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\pm \frac{3b_1}{\sqrt{|\delta|}} \arctan\frac{2At+B}{\sqrt{|\delta|}}\right),\ \delta = B^2 - 4AC < 0; \tag{48}$$

$$\mu(t) = (\alpha t+\beta)^{-1}\exp\left(\mp\frac{3b_1}{2\alpha}\frac{1}{\alpha t+\beta}\right),\ \delta=0; \tag{49}$$

$$\mu(t) = (\alpha t+\beta)^{-\frac{1}{2}\pm\frac{3b_1}{2\alpha}},\ b_1\in\mathbf{R}; \tag{50}$$

$$\mu(t) = (\alpha t+\beta)^{-\frac{1}{2}}\exp\left(\pm i\frac{3\omega}{2\alpha}\ln|\alpha t+\beta|\right),\ \operatorname{Im} b_1 = i\omega,\ \delta=\alpha^2; \tag{51}$$

$$\mu(t) = \mu_0\exp(\pm\frac{3}{2}b_1 t),\ \delta=0 \tag{52}$$

(всюду, где не оговорено особо, b_1 принимает как вещественные, так и чисто мнимые значения).

Доказательство. На основе формулы (11) (лемма 1), связывающей массу $\mu(t)$ с ядром $u(t)$ и множителем $v(t)$ преобразования (4), вычисляемых согласно леммам 2 и 3, или леммам 2 и 4, получим конечные уравнения для законов изменения массы .

Следствие 2. Вещественная масса $\mu(t)$ в задаче (1), приводимой к (5) преобразованием (4), не может изменяться по периодическому закону и не может быть колеблющейся.

Из теорем 2 и 3 при $b_1=0$ вытекает

Теорема 4. Для того чтобы задача (1) преобразованием (4) приводилась к виду

$$\bar\rho'' \pm b_1\bar\rho' = -\mu_0\frac{\bar\rho}{\rho^3}, \tag{53}$$

необходимо и достаточно, чтобы масса $\mu(t)$ удовлетворяла интегро–дифференциальному уравнению

$$\ddot\mu - 2\frac{\dot\mu^2}{\mu} + \frac{2\mu^5}{g\left(\int\limits_{t_0}^{t}\mu^2 dt\right)} = 0, \tag{54}$$

и описывалась следующими конечными уравнениями:

$$\mu(t) = \alpha t+\beta, \tag{55}$$

$$\mu(t) = (\alpha t+\beta)^{-2}, \tag{56}$$

$$\mu(t) = (\alpha_1 t+\beta_1)(\alpha_2 t+\beta_2)^{-2}. \tag{57}$$

Таким образом, можно сделать вывод: для того чтобы задача ГМ (1) при помощи преобразования Куммера–Лиувилля (4) приводилась к автономному виду, законы изменения массы $\mu(t)$ должны представлять собой решения следующих нелинейных дифференциального и интегродифференциального уравнений:

$$\ddot\mu - 2\frac{\dot\mu^2}{\mu} + \frac{b_0 \pm +2b_1^2)\mu^5}{(k\pm 3b_1\int\mu^2 dt)^2} = 0,\ b_0, b_1, k = \text{const}, \tag{58}$$

$$\ddot\mu - 2\frac{\dot\mu^2}{\mu} + b_0\mu^5 = 0,\ b_0 = 0, \tag{59}$$

и описываться конечными формулами

$$\mu_1(t) = (\alpha_1 t+\beta_1)^{-\frac{1}{2}\pm\frac{3b_1}{2\sqrt{\delta_1}}}(\alpha_2 t+\beta_2)^{-\frac{1}{2}\mp\frac{3b_1}{2\sqrt{\delta_1}}},\ \delta_1>0; \tag{60}$$

$$\mu_2(t) = (At^2+Bt+C)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\pm\frac{3b_1}{\sqrt{-\delta_2}} \arctan\frac{2At+B}{\sqrt{-\delta_2}}\right), \ \delta_2 < 0; \tag{61}$$

$$\mu_3(t) = (\alpha t+\beta)^{-1} \exp\left(\mp\frac{3b_1}{2\alpha}\frac{1}{\alpha t+\beta}\right), \ \delta_3 = 0, \ \alpha \neq 0; \tag{62}$$

$$\mu_4(t) = (\alpha t+\beta)^{-\frac{1}{2} \pm \frac{3b_1}{2\alpha}}, \ \delta_4 = \alpha^2 > 0; \tag{63}$$

$$\mu_5(t) = \exp(\pm\frac{3}{2}b_1 t), \ \delta_5 = 0, \ \alpha = 0. \tag{64}$$

Заметим, что описанные законы изменения массы (60)–(64) охватывают законы Мещерского (2), а также дифференциальный закон Эддингтона–Джинса (3).

3. Конкретные примеры

Пример 1. Рассмотрим преобразование нестационарной задачи ГМ (1) к автономному виду, если масса материальной точки изменяется по следующему закону:

$$\mu(t) = (2t+1)^{5/2}(t+1)^{-7/2}, \tag{65}$$

который соответствует формуле (60) с параметрами $\alpha_1 = 2$, $\beta_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $\beta_2 = 1$, $\delta_1 = (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2 = 1$. Ядро $u(t)$ и множитель $v(t)$ преобразования Куммера–Лиувилля для задачи (1), (65) будут иметь вид

$$u = (\alpha_1 t+\beta_1)^{-1}(\alpha_2 t+\beta_2)^{-1},$$

$$v = (\alpha_1 t+\beta_1)^{\frac{1}{2} \pm \frac{b_1}{2\sqrt{\delta_1}}}(\alpha_2 t+\beta_2)^{\frac{1}{2} \mp \frac{b_1}{2\sqrt{\delta_1}}}.$$

Таким образом, задача (1), (65) приводится к автономной форме преобразованием Куммера–Лиувилля, имеющим в этом случае вид

$$\mathbf{r} = \frac{(2t+1)^{3/2}}{(t+1)^{1/2}}\bar{\rho}, \ d\tau = \frac{dt}{(2t+1)(t+1)}. \tag{66}$$

Тогда

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{(2t+1)^{1/2}(2t+5/2)}{(t+1)^{3/2}}\bar{\rho} + \frac{(2t+1)^{1/2}}{(t+1)^{3/2}}\frac{d\bar{\rho}}{d\tau}, \tag{67}$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = (t+1)^{-5/2}(2t+1)^{-1/2}\left(\frac{d^2\bar{\rho}}{d\tau^2} + 2\frac{d\bar{\rho}}{d\tau} + \frac{3}{4}\bar{\rho}\right), \tag{68}$$

а соответствующее автономное дифференциальное уравнение:

$$\bar{\rho}'' + 2\bar{\rho}' + \frac{3}{4}\bar{\rho} = -\frac{\bar{\rho}}{\rho^3}, \ \bar{\rho} = (\xi, \eta). \tag{69}$$

Построим фазовые траектории нестационарной и соответствующей стационарной задач для закона изменения массы (65) (см. рис. 1).

Начальные условия для фазовых координат стационарной задачи возьмем в виде: $\xi(0) = 1$, $\eta(0) = 1$, $\dot{\xi}(0) = 0$, $\dot{\eta}(0) = 1$. Согласно формулам (66), (67) начальные условия соответствующей нестационарной задачи примут вид: $x(0) = 1$, $y(0) = 1$, $\dot{x}(0) = \frac{5}{2}$, $\dot{y}(0) = \frac{7}{2}$. Нестационарную задачу будем рассматривать на промежутке

$t \in [0, 20]$, тогда стационарная задача должна быть рассмотрена на промежутке $\tau \in [0, \ln \frac{41}{21}]$, т. к.

$$\tau = \int\limits_0^{20} \frac{dt}{(2t+1)(t+1)} = \ln \frac{41}{21}.$$

На рис. 2 показаны траектории относительного движения материальной точки нестационарной задачи ГМ (1), (65) и соответствующей стационарной задачи (69).

Пример 2. Рассмотрим преобразование нестационарной задачи ГМ (1) к автономному виду, если масса материальной точки изменяется по следующему закону:

$$\mu(t) = \frac{\exp(\frac{3}{2}\arctan t)}{\sqrt{t^2+1}}, \tag{70}$$

который соответствует формуле (61) с параметрами $A = 1$, $B = 0$, $C = 1$, $\delta_2 = B^2 - 4AC = -4$, $b_1 = 1$. Определим ядро $u(t)$ преобразования Куммера–Лиувилля из уравнения Куммера–Шварца [1]

$$\frac{1}{2}\frac{\ddot{u}}{u} - \frac{3}{4}\left(\frac{\dot{u}}{u}\right)^2 + u^2 = 0.$$

Ядро $u(t)$ и множитель $v(t)$ преобразования Куммера–Лиувилля для задачи (1), (70) будут иметь вид

$$u = \frac{1}{t^2+1},\ v = \sqrt{t^2+1}\exp\left(\frac{\arctan t}{2}\right).$$

Таким образом, задача (1), (70) приводится к автономной форме преобразованием Куммера–Лиувилля

$$\mathbf{r} = \sqrt{t^2+1}\exp\left(\frac{\arctan t}{2}\right)\bar{\rho},\ d\tau = \frac{dt}{t^2+1}. \tag{71}$$

Тогда получим

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\exp(1/2\arctan t)}{\sqrt{t^2+1}}\left(\frac{2t+1}{2}\bar{\rho} + \frac{d\bar{\rho}}{d\tau}\right), \tag{72}$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{\exp(1/2\arctan t)}{(t^2+1)^{3/2}}\left(\frac{d^2\bar{\rho}}{dt^2} + \frac{d\bar{\rho}}{d\tau} + \frac{5}{4}\bar{\rho}\right). \tag{73}$$

Соответствующее автономное дифференциальное уравнение будет иметь вид

$$\bar{\rho}'' + \bar{\rho}' + \frac{5}{4}\bar{\rho} = -\frac{\bar{\rho}}{\rho^3}. \tag{74}$$

Построим фазовые траектории нестационарной и соответствующей стационарной задачи для закона изменения массы (70) (см. рис. 3).

Начальные условия для фазовых координат стационарной задачи возьмем в виде: $\xi(0) = 1$, $\eta(0) = 1$, $\dot{\xi}(0) = 0$, $\dot{\eta}(0) = 1$. По формулам (71) (72) вычислим начальные условия соответствующей нестационарной задачи: $x(0) = 1$, $y(0) = 1$, $\dot{x}(0) = \frac{1}{2}$, $\dot{y}(0) = \frac{3}{2}$. Нестационарную задачу будем рассматривать на промежутке $t \in [0, 20]$, тогда согласно формуле (71) стационарная задача должна быть рассмотрена на промежутке $\tau \in [0, \arctan 20]$, т. к.

$$\tau = \int\limits_0^{20} \frac{dt}{t^2+1} = \arctan 20.$$

На рис. 4 показаны траектории относительного движения материальной точки нестационарной задачи ГМ (1), (70) и соответствующей стационарной задачи (74).

Пример 3. Рассмотрим преобразование нестационарной задачи ГМ (1) к автономной задаче, если масса материальной точки изменяется по первому закону Мещерского с параметрами $\alpha = 0.01$, $\beta = 1$:

$$\mu(t) = \frac{1}{0.01t + 1} \tag{75}$$

(закон Эддингтона–Джинса с $\nu = 2$ или закон (62) с параметрами $b_1 = 0$, $b_0 = 0$). Приведем задачу (1), (75) к автономной форме при помощи преобразования Куммера–Лиувилля. Для определения $u(t)$ и $v(t)$ используем формулы [2]:

$$u(t) = \mu^2(t) = \frac{1}{(\alpha t + \beta)^2}, \; v(t) = \mu^{-1}(t) = \alpha t + \beta.$$

Преобразование Куммера–Лиувилля (Нехвила) будет иметь вид

$$\mathbf{r} = (\alpha t + \beta)\bar{\rho}, \; d\tau = \frac{dt}{(\alpha t + \beta)}. \tag{76}$$

Применяя его к (1), получим соответствующее автономное дифференциальное уравнение

$$\bar{\rho}'' = -\frac{\bar{\rho}}{\rho^3}, \tag{77}$$

так как

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \alpha\bar{\rho} + \frac{1}{\alpha t + \beta}\frac{d\bar{\rho}}{d\tau}, \tag{78}$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{1}{(\alpha t + \beta)^3}\frac{d^2\bar{\rho}}{d\tau^2}. \tag{79}$$

Построим фазовые траектории нестационарной и соответствующей стационарной задачи для закона изменения массы (75) (см. рис. 5).

Начальные условия для фазовых координат стационарной задачи возьмем: $\xi(0) = 1$, $\eta(0) = 1$, $\dot{\xi}(0) = 0$, $\dot{\eta}(0) = 1$ (кеплеровское движение по эллипсу). Согласно формулам (76), (78) начальные условия соответствующей нестационарной задачи: $x(0) = 1$, $y(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0.01$, $\dot{y}(0) = 1.01$. Нестационарную задачу будем рассматривать на промежутке $t \in [0, 100]$, тогда стационарная задача должна быть рассмотрена на промежутке $\tau \in [0, 50]$, так как

$$\tau = \int_0^{20} \frac{dt}{(0.01t + 1)^2} = 50.$$

На рис. 6 показаны траектории относительного движения материальной точки нестационарной задачи ГМ (1), (75) и соответствующей стационарной задачи (77).

Пример 4. Рассмотрим преобразование нестационарной задачи ГМ (1) к автономной форме, если масса материальной точки изменяется по второму закону Мещерского с параметрами $\alpha = 0.01$, $\beta = 1$

$$\mu(t) = \frac{1}{0.01t + 1}. \tag{80}$$

Этот закон соответствует закону Эддингтона–Джинса с $\nu = 3$ или закону изменения массы (63) с $b_1 = b_0 = 0$. Определяем ядро $u(t)$ и множитель $v(t)$ преобразования Куммера–Лиувилля по формулам

$$u(t) = \mu^2(t) = \frac{1}{\alpha t + \beta},\ v(t) = \mu^{-1}(t) = \sqrt{\alpha t + \beta}.$$

Преобразование Куммера–Лиувилля для задачи (1), (80) будет иметь вид

$$\mathbf{r} = \sqrt{\alpha t + \beta}\bar{\rho},\ d\tau = \frac{dt}{\alpha t + \beta}. \tag{81}$$

Применяя (81) к (1), получим

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\alpha t + \beta}}\left(\frac{\alpha}{2}\bar{\rho} + \frac{d\bar{\rho}}{d\tau}\right), \tag{82}$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{1}{(\alpha t + \beta)^{3/2}}\left(\frac{d^2\bar{\rho}}{d\tau^2} - \frac{\alpha^2}{4}\bar{\rho}\right), \tag{83}$$

$$\bar{\rho}'' - \frac{\alpha^2}{4}\bar{\rho} = -\frac{\bar{\rho}}{\rho^3}. \tag{84}$$

Построим фазовые траектории нестационарной и соответствующей стационарной задачи для закона изменения массы (80) (см. рис. 7).

Начальные условия для фазовых координат стационарной задачи возьмем в виде: $\xi(0) = 1$, $\eta(0) = 1$, $\dot{\xi}(0) = 0$, $\dot{\eta}(0) = 1$. Согласно формулам (81), (82) начальные условия соответствующей нестационарной задачи: $x(0) = 1$, $y(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0.005$, $\dot{y}(0) = 1.005$. Нестационарную задачу будем рассматривать на промежутке $t \in [0, 100]$, тогда стационарная задача должна быть рассмотрена на промежутке $\tau \in [0, 100\ln 2]$, так как

$$\tau = \int_0^{20} \frac{dt}{0.01t + 1} = 100\ln 2.$$

На рис. 8 показаны траектории относительного движения материальной точки нестационарной задачи ГМ (1), (80) и соответствующей стационарной задачи (84).

Пример 5. Рассмотрим преобразование нестационарной задачи ГМ (1) к автономному виду, если масса материальной точки изменяется по следующему закону:

$$\mu(t) = e^{-0.01t}, \tag{85}$$

соответствующему закону Эддингтона–Джинса с $\nu = 1$ или закону изменения массы (64) с параметром $b_1 = -\frac{3}{200}$. Согласно уравнению Куммера–Шварца ядро $u(t)$ преобразования Куммера–Лиувилля для задачи (1), (85) примет вид $u(t) \equiv 1$. Множитель преобразования Куммера–Лиувилля $v(t)$ определим по формуле

$$v(t) = |u|^{-1/2}\exp(\frac{b_1}{2}\int u(t)dt) = \exp(-\frac{t}{300})\bar{\rho}.$$

Таким образом, задача (1), (85) преобразованием Куммера–Лиувилля

$$\mathbf{r} = e^{-\frac{t}{300}}\bar{\rho},\ d\tau = dt \tag{86}$$

приводится к автономной форме

$$\bar{\rho}'' - \frac{2}{300}\bar{\rho} + \frac{1}{90000}\bar{\rho} = -\frac{\bar{\rho}}{\rho^3}, \tag{87}$$

т. к. имеют место соотношения:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left(-\frac{1}{300}\bar{\rho} + \frac{d\bar{\rho}}{d\tau}\right) e^{-\frac{t}{300}}, \tag{88}$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = e^{-\frac{t}{300}} \left(\frac{d^2\bar{\rho}}{d\tau^2} - \frac{2}{300}\frac{d\bar{\rho}}{d\tau} + \frac{1}{90000}\bar{\rho}\right). \tag{89}$$

Построим фазовые траектории нестационарной и соответствующей стационарной задач для закона изменения массы (85) (см. рис. 9).

Начальные условия для фазовых координат стационарной задачи возьмем: $\xi(0) = 1$, $\eta(0) = 1$, $\dot{\xi}(0) = 0$, $\dot{\eta}(0) = 1$. Согласно формулам (86), (88) начальные условия соответствующей нестационарной задачи имеют вид: $x(0) = 1$, $y(0) = 1$, $\dot{x}(0) = -\frac{3}{1000}$, $\dot{y}(0) = 1 - \frac{3}{1000}$. Нестационарную задачу (1), (85) будем рассматривать на промежутке $t \in [0, 100]$, тогда стационарная задача (87) должна быть рассмотрена на этом же промежутке $\tau \in [0, 100]$, так как $\tau \equiv t$. На рис. 10 показаны траектории движения материальной точки нестационарной задачи ГМ (1), (85) и соответствующей стационарной задачи (87).

Литература

[1] Gylden H. Die bahnbewegungen in einem systeme von zwei korpern in dem fall, das die massen veranderungen unterworfen sind// Astron. Nachr. 1884. V. 109, P. 2593–2594.

[2] Meshcherskii J. Ein special fall des Gylden'schen problems// Astron. Nachr. 1893. V. 132, No. 3153, P. 129–130.

[3] Дубошин Г.Н. О форме траекторий в задаче о двух телах с переменными массами// Астрон. журнал. 1930. Т. 7. Вып. 3–4. С. 153–172.

[4] Дубошин Г.Н. Небесная механика. Аналитические и качественные методы. 2-е изд., перераб. М., Наука, 1978.

[5] Беркович Л.М. Задача Гильдена–Мещерского и законы изменения массы// Докл. АН СССР. 1980. Т. 250. № 5. С. 1088–1091.

[6] Berkovich L.M. Gylden–Meshcherskii problem// Celestial Mechanics. 1980. V. 24. P. 407–429.

[7] Беркович Л.М. Об интегрируемости задачи Гильдена-Мещерского// Прикл. Мат. Мех. 1982. Т. 46. № 1. С. 165–167.

[8] Dirac P.A.M. The cosmological constants// Nature. 1937. V. 139. No. 3512. P. 323.

[9] Vinti J.P. Newtonian cosmology with a varying gravitational constant// Celestial Mechanics. 1977. V. 16. No. 4. P. 391–406.

[10] Мещерский И.В. Работы по механике тел переменной массы. Гостехиздат, 1949.

[11] Jeans J.H. Cosmogonic problems associated with a secular decrease of mass// Monthly Notices Roy. Astron. Soc. 1924. V. 85. No. 1.

[12] Беркович Л.М. Преобразование обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Куйбышев: Изд-во КуГУ, 1978.

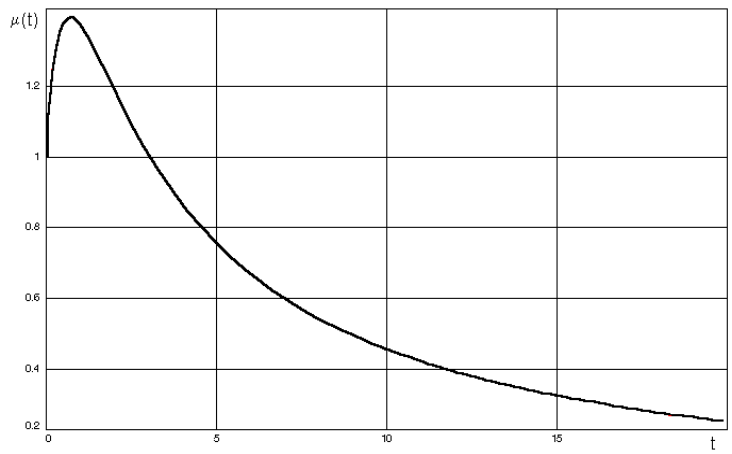

Рис. 1. Закон изменения массы, использованный в примере 1

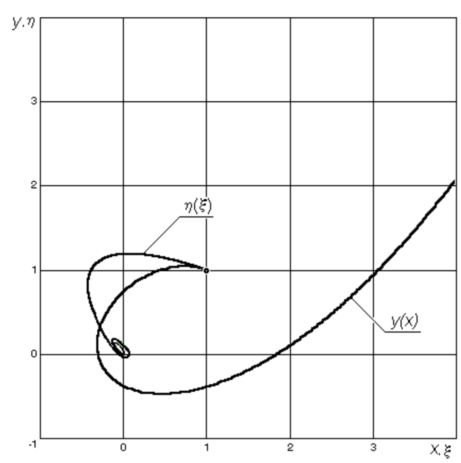

Рис. 2. Траектория относительного движения точки для первого закона изменения массы

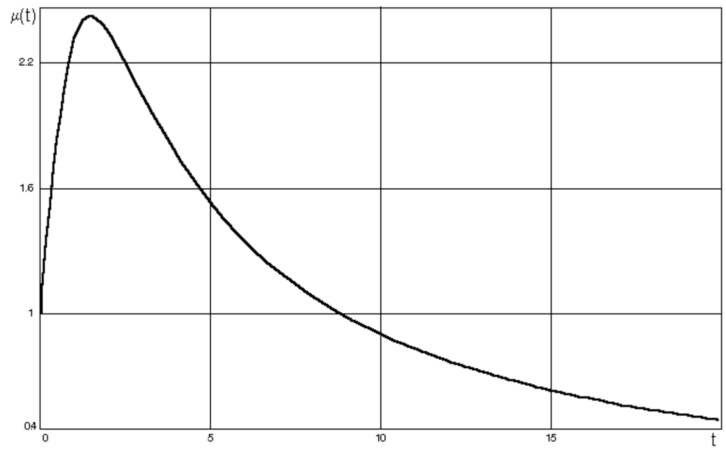

Рис. 3. Закон изменения массы, использованный в примере 2

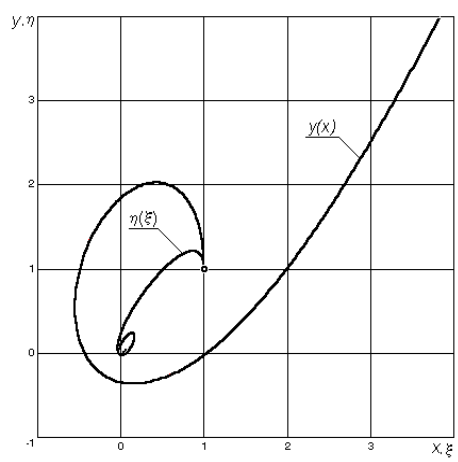

Рис. 4. Траектория относительного движения для второго изменения массы

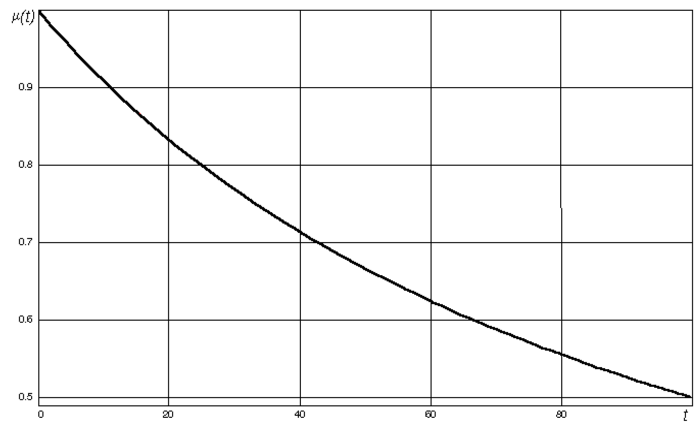

Рис. 5. Изменение массы по первому закону Мещерского

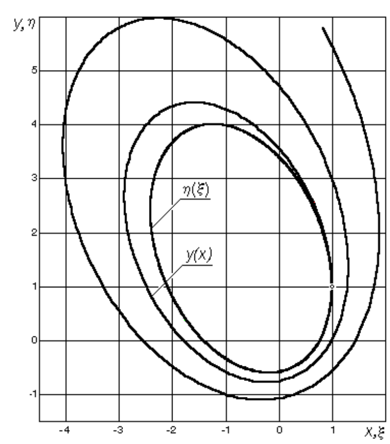

Рис. 6. Траектории относительного движения точки при изменении массы по первому закону Мещерского

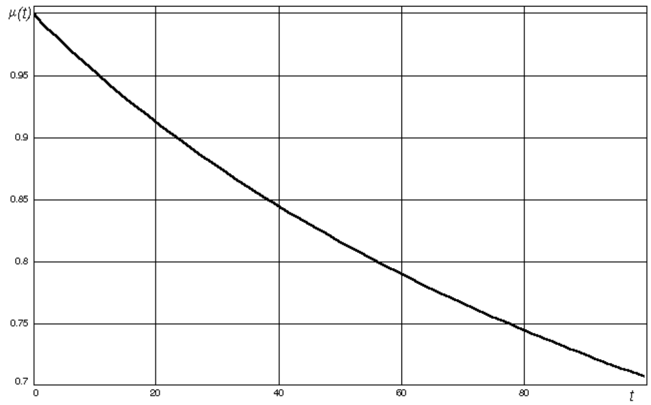

Рис. 7. Изменение массы по второму закону Мещерского

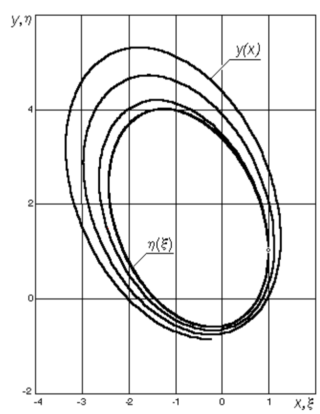

Рис. 8. Траектории относительного движения для изменения массы по второму закону Мещерского

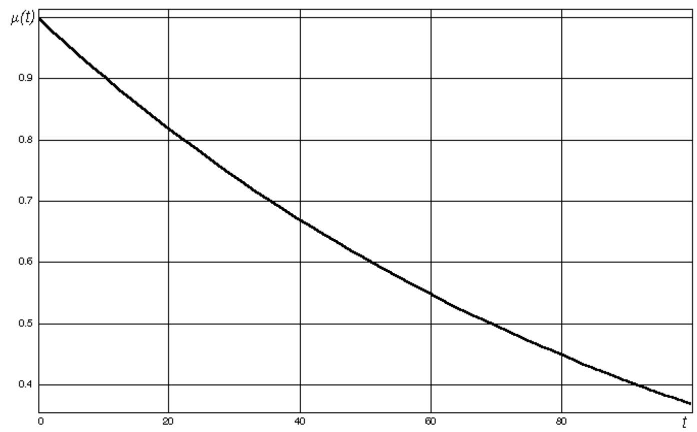

Рис. 9. Закон изменения массы, использованный в примере 5

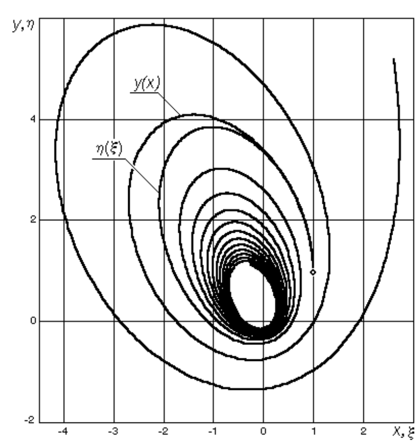

Рис. 10. Траектория относительного движения для пятого закона изменения массы

THE PROBLEM OF GYLDEN–MESHCHERSKII: TRAJECTORIES OF MOVEMENT

© 2002 L.M. Berkovich[3] O.L. Starinova[4]

The Gylden–Meshcherskii problem is used for a description of double stars evolution for want of to secular loss of mass at the expense of photon and corpuscular activity. It is also mathematical model for various cases of dynamics of two skew fields of variable mass.

In the present work the laws of mass variation supposing reduction are considered the equations of movement to a stationary form. The trajectories relative are constructed movements as for want of before known the laws of Eddington–Jeans, and for want of other laws of mass variation .

Поступила в редакцию $13/IV/2002$;
в окончательном варианте —$3/VI/2002$.

[3] Berkovich Lev Meilikhovich (berk@ssu.samara.ru), Academician of Academy of Nonlinear Sciences, Dept. of Algebra & Geometry, Samara State University, Samara, 443011, Russia.

[4] Starinova Olga Leonardovna, Dept. of Theoretical Mechanics, Samara State Aero-Space University.