УДК 519.21

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ ПРОИЗВОДНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИ КОНТУРИРОВАННЫХ МЕР[1]

© 2001 С.Я. Шатских[2]

В работе устанавливается соотношение между условными распределениями устойчивых эллиптически контурированных мер и их логарифмическими производными. На основе этого соотношения доказана статистическая независимость и усиленный закон больших чисел для последовательности логарифмических производных, умноженных на фиксированную случайную величину.

Введение. Формулировка основных результатов

Хорошо известно, что класс эллиптически контурированных мер в гильбертовом пространстве совпадает с классом смесей центрированных гауссовских мер, определяемых (с точностью до скалярного множителя) одним ковариационным оператором. В этой заметке устанавливается соотношение между условными распределениями эллиптически контурированных мер и их логарифмическими производными, вычисленными в направлении собственных векторов ковариационного оператора. Используя это соотношение, мы доказываем (статистическую) независимость и усиленный закон больших чисел для последовательности логарифмических производных, умноженных на фиксированную случайную величину.

В настоящей работе, считая ее продолжением работы [1], мы имеем дело с устойчивыми эллиптически контурированными мерами в гильбертовом пространстве. Однако приведенные здесь результаты можно распространить и на более общие классы смесей гауссовских мер, которые изучались в работах [2–5].

Пусть $\mathbb{H}$ — вещественное сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $<\cdot,\cdot>$ и борелевской σ-алгеброй $\mathcal{B}(\mathbb{H})$. Будем рассматривать $\mu_\alpha\{\cdot;B\}$ — устойчивую эллиптически контурированную меру на $\{\mathbb{H},\mathcal{B}(\mathbb{H})\}$ $(\alpha\in]0,2[\ )$ с характеристическим функционалом

$$\Psi_\alpha(y)=\exp\left\{-<By,y>^{\alpha/2}\right\},\quad y\in\mathbb{H},$$

где $B:\mathbb{H}\to\mathbb{H}$ — линейный самосопряженный положительно определенный ядерный оператор и $\ker B=\{\mathbf{0}\}$.

---

[1]Представлена доктором физико-математических наук профессором С.В. Асташкиным.

[2]Шатских Сергей Яковлевич (shatskih@ssu.samara.ru), кафедра функционального анализа и теории функций Самарского государственного университета, 443011, Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

Саму меру $\mu_\alpha\{\cdot;B\}$ можно задать с помощью представления Шенберга [1, 2]

$$\mu_\alpha\{A;B\}=\int\limits_0^\infty \mu_2\{A;\sigma^2 B\} g\left(\frac{\sigma^2}{2};\frac{\alpha}{2},1\right)\sigma\, d\sigma,$$

где $A\in\mathcal{B}(\mathbb{H})$, $\mu_2\{\cdot;\sigma^2 B\}$ — гауссовская центрированная мера с ковариационным оператором $\sigma^2 B$, $g\left(\cdot;\frac{\alpha}{2},1\right)$ — плотность одномерного крайнего устойчивого распределения с показателем $\frac{\alpha}{2}\in]0,1[$ (см. [6]).

Напомним определения производной и логарифмической производной для сигма-аддитивной меры на $\{\mathbb{H},\mathcal{B}(\mathbb{H})\}$ [7, 8].

Определение. *Производной меры μ по направлению $h\in\mathbb{H}$* называется мера $d_h\mu$, определяемая равенством

$$d_h\mu\{A\}=\lim_{t\to 0}\frac{\mu\{A+th\}-\mu\{A\}}{t},\quad \forall A\in\mathcal{B}(\mathbb{H}).$$

Если мера μ дифференцируема по направлению h, то мера-производная $d_h\mu$ абсолютно непрерывна относительно μ и существует производная Радона–Никодима

$$\beta_h^\mu(x):=\frac{d(d_h\mu)}{d\mu}(x),\quad x\in\mathbb{H},$$

которая называется *логарифмической производной меры μ по направлению $h\in\mathbb{H}$.*

Пусть $\{e_n\}$ — ортонормированный базис (о.н.б.) пространства $\mathbb{H}$, состоящий из собственных векторов оператора B:

$$Be_n=\lambda_n^2 e_n,\quad \lambda_n>0,\quad n=\overline{1,\infty},\tag{1}$$

где λ_n^2 — собственные числа.

В дальнейшем нам понадобится квадратичный функционал $s_\infty^2(x)$ и множество Γ:

$$s_\infty^2(x):=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\frac{<x,e_k>^{\;2}}{\lambda_k^2},\tag{2}$$

$$\Gamma:=\left\{x\in\mathbb{H}:0<s_\infty^2(x)<+\infty\right\}.$$

Будем рассматривать $\mathcal{B}(\mathbb{H})$-измеримые функционалы как случайные величины на вероятностной "тройке" $\{\mathbb{H},\mathcal{B}(\mathbb{H}),\mu_\alpha\{\cdot;B\}\}$. Кроме того, введем σ-алгебры, порожденные системами случайных величин

$$\mathcal{F}_{m,\infty}=\sigma\left(<x,e_m>,\ <x,e_{m+1}>,\dots\right),$$

$$\mathcal{F}_\infty=\bigcap_{m=1}^\infty\mathcal{F}_{m,\infty}\quad \text{("остаточная" } \sigma\text{-алгебра).}$$

Рассмотрим функцию распределения, соответствующую проекции меры $\mu_\alpha\{\cdot;B\}$ на линейную оболочку векторов $e_1,\dots,e_n$:

$$F^{(\alpha)}_{1\dots n}(x_1,\dots,x_n)=\mu_\alpha\{h\in\mathbb{H}:<h,e_1>\le x_1,\dots,\ <h,e_n>\le x_n;B\}.$$

Введем $F^{(\alpha)}_{i|1\dots\hat{\imath}\dots n}(x_i\mid x_1,\dots,\widehat{x}_i,\dots,x_n)$ — условную функцию распределения случайной величины $<x,e_i>$ относительно системы случайных величин

$$<x,e_1>,\dots,\ \widehat{<x,e_i>},\dots,\ <x,e_n>,$$

где $\widehat{\ }$ — знак пропуска элемента.

Перейдем к формулировкам основных результатов. Вначале рассмотрим устойчивые меры с показателем $\alpha \in]0,2[$.

Теорема 1. 1°) $\Gamma \in \mathcal{F}_\infty,\ \mu_\alpha\{\Gamma; B\} = 1$;

2°) функционал $s^2_\infty(x)$ является $\mathcal{F}_\infty$-измеримым и

$$\mu_\alpha\{s^2_\infty(x) \le u; B\} = \int\limits_0^{\frac{u}{2}} g\left(t; \frac{\alpha}{2}, 1\right) dt; \tag{3}$$

3°) для любого $\alpha \in]0,2[$ и любого $x \in \Gamma$ $(x_j = <x, e_j>,\ j = \overline{1,\infty})$

$$\lim_{n\to\infty} F^{(\alpha)}_{i|1\dots\hat{i}\dots n}(x_i \mid x_1, ..., \widehat{x}_i, ..., x_n) = \Phi\left(-\lambda_i \beta^{\mu_\alpha}_{e_i}(x) s_\infty(x)\right),$$

где $\Phi(\cdot)$ — стандартное гауссовское распределение;

4°) $\mu_\alpha\{\lambda_i \beta^{\mu_\alpha}_{e_i}(x) s_\infty(x) \le u; B\} = \Phi(u),\ i = \overline{1,\infty}$;

5°) случайная величина $\beta^{\mu_\alpha}_{e_i}(x) s_\infty(x)$ (относительно меры $\mu_\alpha\{\cdot; B\}$) не зависит от семейства

$$<x, e_1>, ..., \widehat{<x, e_i>}, ..., <x, e_n>, ...$$

Следствие. Пусть множество первых n натуральных чисел разбито на два непересекающихся и упорядоченных по возрастанию подмножества

$$\{1, ..., n\} = \{i_1, ..., i_k\} \bigcup \{j_1, ..., j_{n-k}\},\quad 1 \le k < n, \}.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} F^{(\alpha)}_{i_1\dots i_k|j_1\dots j_{n-k}}(x_{i_1}, ..., x_{i_k}|x_{j_1}, ..., x_{j_{n-k}}) = \prod_{m=1}^{k} \Phi\left(-\lambda_{i_m} \beta^{\mu_\alpha}_{e_{i_m}}(x) s_\infty(x)\right).$$

Замечание. Утверждение п.3° останется справедливым, если вместо о.н.б. $\{e_n\}$ собственных векторов оператора B рассматривать произвольный о.н.б. $\{f_n\}$, минимальный относительно нормы $|\cdot|_- = <B\cdot,\cdot>^{\frac{1}{2}}$, т.е. (см. [9, 10]) $\{f_n\} \subset \mathbb{H}_+$ — замыкание $\mathbb{H}$ по норме $|\cdot|_+ = <B^{-1}\cdot,\cdot>^{\frac{1}{2}}$. При этом семейства функций распределения $F^{(\alpha)}_{1\dots n}$ и $F^{(\alpha)}_{i|1\dots\hat{i}\dots n}$ будут соответствовать проекции меры $\mu_\alpha\{\cdot; B\}$ на линейную оболочку векторов $f_1, ..., f_n$. В этой ситуации предельная случайная величина $s^2_\infty(x)$ не зависит от выбора базиса $\{f_n\} \subset \mathbb{H}_+$. Поэтому можно считать, что $s^2_\infty(x)$ попрежнему определяется формулой (2).

Теорема 2. Относительно устойчивой меры $\mu_\alpha\{\cdot; B\}$ система случайных величин

$$\{s^2_\infty(x), \beta^{\mu_\alpha}_{e_1}(x) s_\infty(x), ..., \beta^{\mu_\alpha}_{e_n}(x) s_\infty(x), ...\},\ x \in \mathbb{H} \tag{4}$$

независима и $\mu_\alpha\{\cdot; B\}$-почти наверное

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 [\beta^{\mu_\alpha}_{e_i}(x)]^2 = s^{-2}_\infty(x). \tag{5}$$

Для гауссовских центрированных мер $\mu_2\{\cdot; B\}$ справедлива

Теорема 3. Если $\{f_n\}$ — минимальный относительно нормы $|\cdot|_-$ о.н.б. гильбертова пространства $\mathbb{H}$, то для $\mu_2\{\cdot; B\}$-почти всех $x \in \mathbb{H}$ $(x_j = <x, e_j>,\quad j = \overline{1,\infty})$

$$\lim_{n\to\infty} F^{(2)}_{i|1\dots\widehat{i}\dots n}(x_i|x_1, ..., \widehat{x}_i, ..., x_n) = \Phi\left(-\frac{\beta^{\mu_2}_{f_i}(x)}{<B^{-1} f_i, f_i>^{\frac{1}{2}}}\right).$$

Вспомогательные результаты и доказательство теорем

Вначале приведем известные факты, относящиеся к вычислению логарифмических производных гауссовских и устойчивых эллиптически контурированных мер.

Теорема 4.

1°. Для гауссовской меры $\mu_2 = \mu_2\{\cdot; B\}$ в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$ семейство всех векторов дифференцируемости совпадает с пространством $\mathbb{H}_+ = B^{\frac{1}{2}}\mathbb{H}$ и для любого $h \in \mathbb{H}_+$

$$\beta_h^{\mu_2}(x) = -\tilde{h}_B(x), \; x \in \mathbb{H},$$

где $\tilde{h}_B(x)$ — линейный измеримый функционал в пространстве $\mathbb{H}$, который однозначно определяется своим сужением на $\mathbb{H}_+$:

$$\tilde{h}_B(x) = <B^{-1}h, x>\,, \;\; x \in \mathbb{H}_+.$$

2°. Для устойчивой эллиптически контурированной меры $\mu_\alpha = \mu_\alpha\{\cdot; B\}$ в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$ семейство всех векторов дифференцируемости совпадает с пространством $\mathbb{H}_+ = B^{\frac{1}{2}}\mathbb{H}$ и для любого $h \in \mathbb{H}_+$ и для μ_α-почти всех x

$$\beta_h^{\mu_\alpha}(x) = -\frac{\tilde{h}_B(x)}{s_\infty^2(x)}.$$

Замечание. Утверждение п.1° хорошо известно (см., например, [5]); утверждение п.2° фактически является переформулировкой результатов из [3, 4, 8] для устойчивых эллиптически контурированных мер в гильбертовых пространствах. Следует отметить, что условие суммируемости логарифмической производной $\beta_h^{\mu_\alpha}(x)$ относительно меры $\mu_\alpha\{\cdot; B\}$

$$\int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} g\left(t; \frac{\alpha}{2}, 1\right) dt < +\infty$$

легко выводится из того факта, что ввиду п.4° теоремы 1 случайная величина $\lambda_i \beta_{e_i}^{\mu_\alpha}(x) s_\infty(x)$ имеет стандартное гауссовское распределение, а независимая от неё случайная величина $s_\infty^2(x)$ — устойчивое распределение, определяемое формулой (3).

Перейдем к условным функциям распределения. Доказательства пунктов 1° и 2° теоремы 1 были даны автором в работе [1]. Кроме того, в этой работе для устойчивых эллиптически контурированных мер в гильбертовом пространстве были установлены следующие утверждения:

Теорема 5.

1^0. Относительно меры $\mu_\alpha\{\cdot\}$ система случайных величин

$$\left\{ s_\infty^2(h); \frac{<x, e_1>}{\lambda_1 s_\infty(x)}, \ldots, \frac{<x, e_n>}{\lambda_n s_\infty(x)}, \ldots \right\}$$

независима, а случайные величины

$$\frac{<x, e_n>}{\lambda_n s_\infty(x)}, \; n = 1, 2, \ldots$$

имеют гауссовское распределение с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией.

2^0. Для любого $\alpha \in]0, 2[$ и любого $x \in \Gamma$ $\;(x_j = <x, e_j>\,, \; j = \overline{1, \infty})$

$$\lim_{n\to\infty} F^{(\alpha)}_{i|1\ldots\hat{\imath}\ldots n}(x_i \mid x_1, \ldots, \widehat{x}_i, \ldots, x_n) = \Phi\left(\frac{x_i}{\lambda_i s_\infty(x)}\right),$$

и случайная величина $\dfrac{<x,e_n>}{\lambda_n s_\infty(x)}$ относительно меры $\mu_\alpha\{\cdot\}$ не зависит от семейства

$$<x,e_1>,\ldots,\ \widehat{<x,e_i>},\ldots,\ <x,e_n>,\ldots\ .$$

Для доказательства оставшейся части теоремы 1 отметим следующее обстоятельство: ввиду равенства (1) e_i — собственный вектор оператора B, поэтому $B^{-1}e_i = \lambda_i^{-2}e_i$, и линейный измеримый функционал $<B^{-1}e_i, x>$ для μ_α-почти всех $x \in \mathbb{H}$ совпадает с линейным непрерывным функционалом $\lambda_i^{-2}<e_i,x>$. Отсюда, используя п.2° теоремы 4, для μ_α-почти всех $x \in \mathbb{H}$ получаем равенство

$$\beta_{e_i}^{\mu_\alpha}(x) = -\frac{<e_i,x>}{\lambda_i^2 s_\infty^2(x)}. \tag{6}$$

Таким образом, пп. 3°–5° теоремы 1 являются простым следствием равенства (6) и утверждений теоремы 5.

Доказательство теоремы 2 проводится аналогично. Независимость системы (4) является простым следствием равенства (6) и п.1° теоремы 5. Наконец, утверждение (5), учитывая равенство (6) и п.1° теоремы 5, следует из усиленного закона больших чисел в форме Бореля [11].

Доказательство теоремы 3. Воспользуемся известным свойством условных гауссовских распределений в гильбертовом пространстве (см., например, [9]):

если о.н.б. $\{f_n\} \subset \mathbb{H}_+$, то для $\mu_2\{\cdot;B\}$-почти всех $x \in \mathbb{H}$ ($x_j = <x,e_j>$, $j=\overline{1,\infty}$)

$$\lim_{n\to\infty} F^{(2)}_{i|1\ldots\widehat{i}\ldots n}(x_i|x_1,\ldots,\widehat{x}_i,\ldots,x_n) = \Phi\left(-\frac{(\tilde{f}_i)_B(x)}{<B^{-1}f_i,f_i>^{\frac{1}{2}}}\right),$$

где $(\tilde{f}_i)_B(x)$ — линейный измеримый функционал на пространстве $\mathbb{H}$, который однозначно определяется своим сужением на $\mathbb{H}_+$:

$$(\tilde{f}_i)_B(x) = <B^{-1}f_i, x>,\ \ x \in \mathbb{H}_+.$$

Таким образом, утверждение теоремы 3 следует из п.1° теоремы 4.

Литература

[1] Шатских С.Я. Устойчивые эллиптически контурированные меры в гильбертовом пространстве: асимптотические свойства условных распределений// Изв. РАЕН. Сер. МММИУ. 1999. Т.3. № 3. С. 43–81.

[2] Судаков В.Н. Геометрические проблемы теории бесконечномерных распределений// Труды МИАН. 1976. Т.141. 191 с.

[3] Норин Н.В., Смолянов О.Г. Несколько результатов о логарифмических производных мер на локально выпуклом пространстве// Матем. заметки. 1993. Т.54. Вып.6. С. 135–138.

[4] Norin N.V. Ito-Wick decomposition for the mixtures of gaussian measures// Frontiers in Pure and Appl.Probab. II. 1996. P. 153–162.

[5] Богачев В.И. Гауссовские меры. М.: Наука, 1997. 352 с.

[6] Золотарев В.М. Одномерные устойчивые распределения. М.: Наука, 1983. 304 с.

[7] Далецкий Ю.Л., Фомин С.В. Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах. М.: Наука, 1983. 383 с.

[8] Богачев В.И., Смолянов О.Г. Аналитические свойства бесконечномерных распределений// Успехи матем. наук. 1990. Т.45. Вып.3. С. 3–83.

[9] Shatskikh S.Ya. Conditional quantiles of gaussian measures in hilbert spase// Jour. of Math. Sci. 1998. V.89. No.5. P. 1553–1558.
[10] Скороход А.В. Интегрирование в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1975. 231 с.
[11] Ширяев А.Н. Вероятность. М.: Наука, 1989. 640 с.

SOME PROPERTIES OF LOGARITHMIC DERIVATIVES OF STABLE ELLIPTICALLY CONTOURED MEASURES[3]

 S.Ya. Shatskih[4]

The paper is devoted to the study of asymptotic properties of conditional distributions which are generated by finite-dimensional projections of stable elliptically contoured measures in real Hilbert space. The connection between conditional distributions of stable elliptically contoured measures and their logarithmic derivatives is stated. The statistic independence and the strong law of large numbers for the sequence of logarithmic derivatives multiplied by the fixed random variable are proved.

Поступила в редакцию $17/IX/2001$;
в окончательном варианте — $23/XI/2001$.

[3]Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. S.V. Astashkin.
[4]Shatskih Sergey Yakovlevich (shatskih@ssu.samara.ru), Dept. of Functional Analysis and Theory of Functions, Samara State University, Samara, 443011, Russia.