УДК 512.7

СТАНДАРТНАЯ ЦЕЛАЯ МОДЕЛЬ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО ТОРА[1]

© 2001 С.Ю. Попов[2]

В теории линейных алгебраических групп, определенных над полями арифметического типа, важную роль играют так называемые целые модели. Неоднозначность выбора целой модели ставит перед математиками задачу определения неслучайной модели. В данной работе изучаются свойства стандартной целой модели, предложенной для алгебраических торов В.Е. Воскресенским, которая определяется лишь параметрами тора и обладает рядом исключительных свойств. Также работа посвящена исследованию редукции данной целой модели, основным результатом которого является структурная теорема, устанавливающая связь между типом редукции и типом ветвления минимального поля разложения алгебраического тора.

Введение

Пусть k — числовое поле, то есть конечное расширение поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$, $\mathcal{O} = \mathcal{O}_k$ — кольцо целых элементов поля k, X_k — алгебраическое многообразие над полем k. Различные вопросы арифметики требуют продолжения структуры многообразия X_k до S-схемы X, где S — открытое подмножество в $\operatorname{Spec}\mathcal{O}$, причем $X_k = X \times_S \operatorname{Spec} k$. Если такая S-схема X построена, то имеет смысл говорить о редукции многообразия X_k по простому модулю $\wp \in S$. Это будет $\mathcal{O}/\wp$-схема $X \times_S \operatorname{Spec}(\mathcal{O}/\wp)$. Схему X будем называть S-целой моделью многообразия X_k. Понятно, что редукция зависит от выбора целой модели X. В ряде случаев модель X определяется вполне каноническим образом. При исследовании редукции в точке $\wp$ можно перейти от поля k к его $\wp$-адическому пополнению $k_\wp$, а затем искать $\mathcal{O}_\wp$-схему X с условием $X \otimes_{\mathcal{O}_\wp} k_\wp = X_k \otimes_k k_\wp$, где $\mathcal{O}_\wp$ — кольцо целых в $k_\wp$.

С этого момента пусть k — поле $\wp$-адических чисел, $\mathcal{O}$ — его кольцо целых, $\wp$ — максимальный идеал кольца $\mathcal{O}$, $r_k = \mathcal{O}/\wp$ — конечное поле вычетов. Нас будут интересовать целые модели и их редукции линейных алгебраических k-групп G специального вида [1],[2]. Причем выбор неслучайной с точки зрения анализа и арифметики модели для группы G является весьма интересной задачей. В работе [3] показано, как построить $\mathcal{O}$-форму X группы G исходя из точного линейного представления $\varphi : G \to \mathrm{GL}_k(n)$. Один из методов построения — линеаризация. Представление φ определяет эпиморфизм $\varphi^* : k[\mathrm{GL}(n)] \to k[G]$ алгебр Хопфа. Алгебра

[1]Представлена доктором физико-математических наук профессором В.Е. Воскресенским.

[2]Попов Сергей Юрьевич (popov@ssu.samara.ru), кафедра алгебры и геометрии Самарского государственного университета, 443011, г.Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

$k[\mathrm{GL}\,(n)]$ имеет вид $k[x_{11},...,x_{nn},y^{-1}]$, $y = \det(x_{ij})$, $\mathcal{O}$-алгебра $\mathcal{O}[x_{11},...,x_{nn},y^{-1}]$ определяет в $\mathrm{GL}_k(n)$ целую групповую структуру $\mathrm{GL}_{\mathcal{O}}(n)$, и образ

$$\varphi^*(\mathcal{O}[x_{11},...,x_{nn},y^{-1}]) = A$$

есть $\mathcal{O}$-алгебра Хопфа в $k[G]$. Таким образом, каждое точное линейное представление φ группы G определяет групповую $\mathcal{O}$-форму $G_\varphi = \mathrm{Spec}\,A$ группы G. Хотя строение алгебры Хопфа $k[G]$ и не зависит от выбора точного представления, однако этого нельзя сказать о группах G_φ [3]. Этот метод позволяет строить неизоморфные целые модели конечного типа над $\mathcal{O}$, причем всегда можно выбрать точное представление φ таким образом, чтобы $X(\mathcal{O})$ была максимальной компактной подгруппой в локально компактной группе $G(k)$, определяемой однозначно в случае коммутативной группы G [4]. В.Е. Воскресенский в заметке [5] дал явное описание такой целой модели для алгебраического тора T. Окончательно эта модель была названа им стандартной целой моделью алгебраического тора. Она определяется лишь параметрами тора T. В данной работе проведено подробное исследование свойств этой модели, вычислены редукции торов специального типа, впервые получено полное описание унипотентной части редукции торов со слаборазветвленным минимальным полем разложения. Читатель может найти альтернативный подход к изучению стандартной целой модели алгебраического тора и вычислению редукций квазиразложимого и норменного торов, а также торов малой размерности в совместной статье [6]. Известно, что алгебраические торы также допускают модель Нерона, свойства которой были изучены в работах [7, 8]. В отличие от модели Нерона модель Воскресенского всегда имеет конечный тип, но не всегда гладкая. Более подробное сравнение этих моделей можно найти в статье [9].

1. Определение стандартной целой модели алгебраического тора

Опишем конструкцию Воскресенского стандартной целой модели произвольного алгебраического тора.

Пусть T — алгебраический тор [2], определенный над полем k, L — минимальное поле разложения тора T, $\Pi = \mathrm{Gal}\,(L/k)$. Рассмотрим группу $\hat{T}$ характеров тора T, которая является Π-модулем без кручения, как мультипликативную группу, тогда k-алгебра Хопфа $B = (L[\hat{T}])^\Pi$ есть координатное кольцо тора T, где $L[\hat{T}]$ — групповое кольцо для $\hat{T}$. По определению, тор T есть форма тора $G^d_{m,L}$, где $d = \dim T$, то есть $T \otimes_k L \cong G^d_{m,L}$. Для алгебры B это равносильно изоморфизму L-алгебр $B \otimes_k L = LB \cong L[\hat{T}]$. Пусть $\omega_1, \ldots, \omega_n$ — базис расширения L/k, тогда мы имеем разложение алгебры $L[\hat{T}]$ в прямую сумму B-модулей

$$L[\hat{T}] = B\omega_1 \oplus B\omega_2 \oplus \ldots \oplus B\omega_n. \tag{1.1}$$

Пусть $\chi \in \hat{T}$, тогда в силу (1.1) имеем однозначно определенное разложение

$$\chi = f_\chi^{(1)}\omega_1 + f_\chi^{(2)}\omega_2 + \ldots + f_\chi^{(n)}\omega_n,\ f_\chi^{(i)} \in B\ (i = 1, \ldots, n), \tag{1.2}$$

в частности, для базисных характеров группы $\hat{T}$ и им обратных имеем разложения

$$\chi_i = x_i^{(1)}\omega_1 + \ldots + x_i^{(n)}\omega_n,\ x_i^{(j)} \in B\ (i = 1, \ldots, d,\ j = 1, \ldots, n), \tag{1.3}$$

$$\chi_i^{-1} = y_i^{(1)}\omega_1 + \ldots + y_i^{(n)}\omega_n,\ y_m^{(l)} \in B\ (m = 1, \ldots, d,\ l = 1, \ldots, n). \qquad (1.4)$$

Предложение 1. Алгебра Хопфа B порождена элементами $x_i^{(j)}$, $y_m^{(l)}$, $i, m = 1, \ldots, d,\ j, l = 1, \ldots, n$.

Доказательство. Рассмотрим подалгебру B' алгебры B, порожденную элементами $x_i^{(j)}$, $y_m^{(l)}$, тогда $L \otimes_k B' = LB' \subseteq L[\hat{T}]$. Покажем, что $LB' = L[\hat{T}]$. Для этого достаточно доказать, что произвольный характер $\chi \in \hat{T}$ есть элемент алгебры LB'.

Имеем однозначное выражение χ через выбранный базис группы $\hat{T}$:

$$\chi = \chi_1^{a_1}\chi_2^{a_2}\ldots\chi_d^{a_d},\ a_i \in \mathbb{Z}. \qquad (1.5)$$

Подставляя в (1.5) разложения (1.3) тех χ_i, для которых $a_i \geq 0$, и разложения (1.4) тех χ_m, для которых $a_m < 0$, убеждаемся, что коэффициенты разложения (1.2) для характера χ $f_\chi^{(k)} = f_\chi^{(k)}(x_i^{(j)}, y_m^{(l)})$ принадлежат алгебре B', а значит, $\chi \in LB'$. Наконец, $LB' = L[\hat{T}]$, а следовательно, $B = (L[\hat{T}])^\Pi = (LB')^\Pi = (L \otimes_k B')^\Pi = B'$. Предложение 1 доказано.

Пусть теперь $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ — целый базис расширения L поля $\wp$-адических чисел k, $\mathcal{O}_L$ — кольцо целых поля L. Рассмотрим $\mathcal{O}$-алгебру $A(\hat{T}) = \mathcal{O}[x_i^{(j)}, y_m^{(l)}]$ в B.

Предложение 2. Алгебра $A(\hat{T})$ есть $\mathcal{O}$-алгебра Хопфа.

Доказательство. Алгебра $B = k[T]$ есть k-алгебра Хопфа с операторами Хопфа $m^* : B \to B \otimes_k B$, $i^* : B \to B$, $e^* : B \to k$. Когрупповая структура на L-алгебре Хопфа $L \otimes_k B = LB = L[\hat{T}]$ индуцирована аналогичной структурой на B.

Вычислим значения операторов Хопфа на образующих алгебры $A(\hat{T})$. Известно, что когрупповая структура на $L[\hat{T}]$ задается соотношениями $m^*(\chi) = \chi \otimes \chi$; $i^*(\chi) = \chi^{-1}$; $e^*(\chi) = 1$.

Используем разложение (1.3) для базисного характера χ_i

$$m^*(\chi_i) = \omega_1 m^*(x_i^{(1)}) + \ldots + \omega_n m^*(x_i^{(n)}),$$

где $m^*(x_i^{(j)}) \in B \otimes_k B$, так как $x_i^{(j)} \in B$.

С другой стороны,

$$m^*(\chi_i) = \chi_i \otimes \chi_i = (\sum x_i^{(r)}\omega_r) \otimes (\sum x_i^{(s)}\omega_s) =$$
$$= \sum \omega_r\omega_s x_i^{(r)} \otimes x_i^{(s)} = \sum C_{rs}^p \omega_p x_i^{(r)} \otimes x_i^{(s)} = \sum_p (C_{rs}^p x_i^{(r)} \otimes x_i^{(s)})\omega_p,$$

где $C_{rs}^p \in \mathcal{O}$, так как базис $\omega_1, \ldots, \omega_n$ целый.

Так как $m^*(f) \in LB \otimes_L LB \cong (B \otimes_k B)\omega_1 \oplus \ldots \oplus (B \otimes_k B)\omega_n$, то разложение $m^*(f)$ по базису $\omega_1, \ldots, \omega_n$ единственное, значит,

$$m^*(x_i^{(j)}) = \sum C_{rs}^j x_i^{(r)} \otimes x_i^{(s)}. \qquad (1.6)$$

Аналогично получаем, что

$$m^*(y_m^{(l)}) = \sum C_{rs}^l y_m^{(r)} \otimes y_m^{(s)}. \qquad (1.7)$$

Сравнивая разложение $i^*(\chi_i) = \omega_1 i^*(x_i^{(1)}) + \ldots + \omega_n i^*(x_i^{(n)})$ с разложением $i^*(\chi_i) = \chi_i^{-1} = y_i^{(1)}\omega_1 + \ldots + y_i^{(n)}\omega_n$, находим

$$i^*(x_i^{(j)}) = y_i^{(j)},\ i^*(y_i^{(j)}) = x_i^{(j)}. \qquad (1.8)$$

Наконец, пусть $1 = \sum C^k \omega_k,\ C^k \in \mathcal{O}$, тогда

$$e^*(x_i^{(j)}) = e^*(y_i^{(j)}) = C^j. \tag{1.9}$$

Соотношения (1.6)–(1.9) показывают, что $A(\hat{T})$ есть $\mathcal{O}$-алгебра Хопфа. Предложение 2 доказано.

Пусть $X = \operatorname{Spec} A$, тогда X есть $\mathcal{O}$-групповая форма тора T, так как $X \otimes_{\mathcal{O}} k \cong T$ в силу изоморфизма $k \otimes_{\mathcal{O}} A(\hat{T}) = kA(\hat{T}) = B$.

Определение. $\mathcal{O}$-схема X называется *стандартной* целой моделью тора T.

Обсудим корректность последнего определения. Докажем, что стандартная модель тора T не зависит ни от выбора целого базиса расширения L/k, ни от выбора базиса группы рациональных характеров $\hat{T}$.

Пусть $\omega'_1, \omega'_2, \dots, \omega'_n$ — новый целый базис расширения L/k, тогда ему соответствует $\mathcal{O}$-алгебра $A'(\hat{T}) = \mathcal{O}[x_i'^{(j)}, y_m'^{(l)}]$. Запишем соотношения (1.3), (1.4) для нового базиса, который может быть выражен через старый:

$$\chi_i = {x'}_i^{(j)} \omega'_j = {x'}_i^{(j)} c_j^k \omega_k,\ \chi_i^{-1} = {y'}_i^{(j)} \omega'_j = {y'}_i^{(j)} c_j^k \omega_k,\ c_j^k \in \mathcal{O}.$$

Сравнивая их с разложениями (1.3), (1.4) для исходного базиса, получаем линейные выражения $x_i^{(k)} = {x'}_i^{(j)} c_j^k,\ y_i^{(k)} = {y'}_i^{(j)} c_j^k$ образующих кольца $A(\hat{T})$ через образующие $A'(\hat{T})$, то есть $A(\hat{T}) \subset A'(\hat{T})$. Аналогично доказывая включение $A'(\hat{T}) \subset A(\hat{T})$, получаем равенство $A(\hat{T}) = A'(\hat{T})$ $\mathcal{O}$-алгебр. Так как когрупповая структура на алгебрах $A'(\hat{T})$ и $A(\hat{T})$ определяется соответствующей структурой на B, то $A'(\hat{T}) = A(\hat{T})$ как $\mathcal{O}$-алгебры Хопфа.

Если теперь $\chi'_1, \dots, \chi'_d$ — другой базис группы $\hat{T}$, а $A'(\hat{T})$ соответствующая алгебра, то, подставляя разложения (1.3), (1.4) в выражения $\chi'_j = \chi_1^{a_{1j}} \dots \chi_d^{a_{dj}}$, где матрица $(a_{ij}) \in \mathrm{GL}\,(d, \mathbb{Z})$, получаем, что ${x'}_n^{(k)} = F_n^k(x_i^{(j)}, y_m^{(l)})$, ${y'}_n^{(k)} = G_n^k(x_i^{(j)}, y_m^{(l)})$, где $F_n^k,\ G_n^k \in A(\hat{T})$. Таким образом, $A'(\hat{T}) \subset A(\hat{T})$, аналогично $A(\hat{T}) \subset A'(\hat{T})$, а значит, $A'(\hat{T}) = A(\hat{T})$.

Итак, мы описали метод построения целой модели $X = \operatorname{Spec} A$, где $A = A(\hat{T})$, для произвольного алгебраического тора T, которая обладает свойствами:

$$A = \mathcal{O}[x_i^{(j)}, y_m^{(l)}] \subset k[x_i^{(j)}, y_m^{(l)}] = k[T], \quad k \otimes_{\mathcal{O}} A \cong kA = k[T],$$

причем A есть алгебра Хопфа конечного типа над $\mathcal{O}$, структура которой индуцирует исходную структуру алгебры Хопфа на $k[T]$; более того, так как коэффициенты разложения (1.2) произвольного характера $\chi \in \hat{T}$ лежат в A, то сам характер $\chi = f_\chi^{(1)} \omega_1 + \ldots + f_\chi^{(n)} \omega_n$ принадлежит $\mathcal{O}_L$-алгебре $\mathcal{O}_L \otimes_{\mathcal{O}} A \cong \mathcal{O}_L A = \mathcal{O}_L[x_i^j, y_m^l]$, а значит, $\mathcal{O}_L[\hat{T}] \subset \mathcal{O}_L A$.

2. Стандартная целая модель тора $R_{F/k}(G_m)$

Построим в качестве примера, следуя описанному алгоритму, стандартную целую модель тора специального вида. А именно, пусть Π-модуль $\hat{T}$ рациональных характеров тора T является пермутационным, то есть существует базис $\hat{T}$ $\chi_1, \dots, \chi_d$, на котором Π действует перестановками. Предположим также, что Π действует транзитивно на выбранном базисе. Пусть Π_1 — стабилизатор характера χ_1, тогда модуль $\hat{T} \cong \mathbb{Z} \otimes_{\Pi_1} \mathbb{Z}[\Pi] = \mathbb{Z}[\Pi/\Pi_1]$, а тор $T = R_{F/k}(G_m)$ [2], где $F = L^{\Pi_1}$ — расширение поля k с целым базисом $e_1 = 1, e_2, \dots, e_d$ и кольцом целых $\mathcal{O}_F$.

Так как Π_1 — стабилизатор характера χ_1, то разложение (1.3) для χ_1 примет вид $\chi_1 = x^{(1)}e_1 + \ldots + x^{(d)}e_d,\ x^{(i)} \in B$. Для остальных характеров $\chi_i,\ i \geq 2$ мы имеем $\chi_i = \chi_1^{\sigma_i} = x^{(1)}e_1^{\sigma_i} + \ldots + x^{(d)}e_d^{\sigma_i}$. Раскладывая $e_j^{\sigma_i} \in \mathcal{O}_L$ по базису $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ поля L, мы получаем, что коэффициенты $x_i^{(j)}$ в разложении (1.3) линейно выражаются над $\mathcal{O}$ через $x^{(1)}, \ldots, x^{(d)}$. Аналогично доказывается, что $y_i^{(j)}$ линейно выражаются через коэффициенты разложения $y^{(1)}, \ldots, y^{(d)}$ характера $\chi_1^{-1} = y^{(1)}e_1 + \ldots + y^{(d)}e_d$. Таким образом, $A = \mathcal{O}[x^{(i)}, y^{(j)}]$. Уточним список образующих кольца A. Пусть $\chi = \chi_1 \ldots \chi_d$, тогда $\chi = f_\chi e_1$, так как $\chi \in (\hat{T})^\Pi$, пусть $y = f_\chi \in A$, тогда $y^{-1} = f_{\chi^{-1}} \in A$, где y есть форма степени d от d переменных $x^{(1)}, \ldots, x^{(d)}$ с коэффициентами из $\mathcal{O}$. Используя разложение (1.3) для характеров χ_i и учитывая замечания о коэффициентах разложения $x_i^{(j)}$, получаем

$$\chi_1^{-1} = y^{(1)}e_1 + \ldots + y^{(d)}e_d = \chi_2 \ldots \chi_d \chi^{-1} = \frac{F_1}{y}e_1 + \ldots + \frac{F_d}{y}e_d,$$

где $F_i = F_i(x^{(1)}, \ldots, x^{(d)}) \in \mathcal{O}[x^{(1)}, \ldots, x^{(d)}]$. Так как $y^{-1} \in A$, то алгебра $A = \mathcal{O}[x^{(i)}, y^{(j)}] = \mathcal{O}[x^{(1)}, \ldots, x^{(d)}, y^{-1}]$. Окончательно вычислена стандартная целая модель $X = \operatorname{Spec} A$ для тора $T = R_{F/k}(G_m)$, где $\mathcal{O}$-алгебра A имеет вид

$$A = \mathcal{O}[x^{(1)}, \ldots, x^{(d)}, y^{-1}]. \tag{2.1}$$

В работе [3] эта же модель построена исходя из регулярного представления группы $T(k) = Hom_\Pi(\hat{T}, L^*) = (L^*)^{\Pi_1} = F^*$. Рассмотрим F как k-векторное пространство V размерности d, тогда умножение $v \in V$ на $\alpha \in F^*$ определяет обратимый линейный оператор в V. Пусть A — матрица этого оператора, вычисленная в базисе $e_1, \ldots, e_d$. Соответствие $\alpha \mapsto A$ определяет точное представление $\varphi : F^* \to \mathrm{GL}_k(d)$. Пусть $\alpha = x^{(1)}e_1 + \ldots + x^{(d)}e_d$, тогда $\alpha e_j = x^{(k)}c_{kj}^i e_i,\ c_{kj}^i \in \mathcal{O}$ — структурные константы, $A = \left(x^{(k)}c_{kj}^i\right)$, причем определитель матрицы A совпадает с формой y степени d от $x^{(1)}, \ldots, x^{(d)}$. Используя метод построения целой модели конечного типа для произвольной алгебраической группы, построим ее для тора T, используя регулярное представление φ, которое индуцирует эпиморфизм $\varphi^* : k[\mathrm{GL}_k(d)] \to k[T]$ алгебр Хопфа. Кольцо $k[\mathrm{GL}_k(d)]$ имеет вид $k[x_{11}, \ldots, x_{dd}, Y^{-1}],\ Y = \det(x_{ij})$, причем $\varphi^*(x_{ij}) = x^{(k)}c_{kj}^i,\ \varphi^*(x_{i1}) = x^{(i)},\ \varphi^*(Y) = y$. Алгебра $\mathcal{O}[x_{11}, \ldots, x_{dd}, Y^{-1}]$ определяет в $\mathrm{GL}_k(d)$ целую групповую структуру $\mathrm{GL}_\mathcal{O}(d)$, тогда эпиморфный образ $\overline{A} = \varphi^*(\mathcal{O}[x_{11}, \ldots, x_{dd}, Y^{-1}]) = \mathcal{O}[x^{(1)}, \ldots, x^{(d)}, y^{-1}]$ есть строго плоская над $\mathcal{O}$ алгебра Хопфа в $k[T]$. Как видим, регулярное представление тора $T = R_{F/k}(G_m)$ определяет построенную нами стандартную целую модель тора T.

Рассмотрим теперь группу точек $X(\mathcal{O}) = Hom(A, \mathcal{O})$. Пусть гомоморфизм $\mathcal{O}$-алгебр $t : A \to \mathcal{O}$ такой, что $t(x^{(i)}) = a_i \in \mathcal{O}$. Пусть $\alpha = a_1e_1 + \ldots + a_de_d \in \mathcal{O}_F$, тогда $t(y) = N_{F/k}(\alpha) \in \mathcal{O}$, при этом $t(y)$ есть единица кольца $\mathcal{O}$, так как $t(y^{-1}) \in \mathcal{O}$, значит, $N_{F/k}(\alpha)$ есть единица кольца $\mathcal{O}$, а, следовательно, α есть единица кольца $\mathcal{O}_F$. Обратно, если $\alpha = a_1e_1 + \ldots + a_de_d$ есть единица кольца $\mathcal{O}_F$, то есть $N(\alpha) \in \mathcal{O}^*$, то гомоморфизм $t : A \to \mathcal{O}$ такой, что $t(x^{(i)}) = a_i$, есть $\mathcal{O}$-гомоморфизм $\mathcal{O}$-алгебр A и $\mathcal{O}$. Итак, доказано равенство $X(\mathcal{O}) = \mathcal{O}_F^*$. Как известно, $\mathcal{O}_F^*$ есть максимальная компактная подгруппа U в локально компактной группе $T(k) = F^*$. Кроме того, если $u = a_1e_1 + \ldots + a_de_d \in \mathcal{O}_F^*$, то образующие кольца A принимают на u целые значения, а именно: $x^{(i)}(u) = a_i,\ i = 1, \ldots, d,\ y^{-1}(u) = \dfrac{1}{N_{F/k}(u)}$, а, значит, любая функция $f \in A$ принимает на любом элементе $u \in U$ целые значения.

Наконец, изучим более подробно включение $\mathcal{O}_L[\hat{T}] \subset \mathcal{O}_L A$ для простейшего тора

$T = R_{F/k}(G_m)$. Решая систему линейных уравнений относительно $x^{(1)}, \dots, x^{(d)}$

$$\chi_i = \chi_1^{\sigma_i} = x^{(1)} e_1^{(i)} + \ldots + x^{(d)} e_d^{(i)}, \; e_j^{(i)} = e_j^{\sigma_i} \;\; (i = 1, \dots, d) \tag{2.2}$$

с определителем $d_1 = \det(e_j^{(i)})$, получаем, что $x^{(i)} = \sum \alpha^j \chi_j$, $\alpha^j \in L$, причем коэффициенты $\alpha^j \in \mathcal{O}_L$ тогда и только тогда, когда дискриминант $d = d_1^2$ расширения F/k есть единица кольца $\mathcal{O}$. Последнее в свою очередь равносильно тому, что расширение F/k является неразветвленным [10]. Таким образом, $\mathcal{O}_L[\hat{T}] = \mathcal{O}_L A$ тогда и только тогда, когда расширение F/k неразветвлено.

3. Замкнутые вложения целых моделей

Пусть T_1, T_2 — k-торы из категории $C(L/k)$ k-торов, разложимых над полем L, с П-модулями рациональных характеров $\hat{T}_1$ и $\hat{T}_2$ соответственно такие, что имеем П-эпиморфизм

$$\beta : \hat{T}_1 \to \hat{T}_2.$$

На языке торов это означает, что мы имеем вложение $T_2 \xrightarrow{\alpha} T_1$. Эпиморфизм β определяет эпиморфизм групповых колец

$$\beta_L : L[\hat{T}_1] \to L[\hat{T}_2].$$

Вычислим ядро β_L. Пусть $a = \sum a_k \chi_k$, $a \in \operatorname{Ker} \beta_L$, $\chi_k \in \hat{T}_1$, $a_k \in L$. Введем двойную нумерацию элементов χ_k таким образом, что $\beta(\chi_{ij}) = \xi_i$ и $\xi_{i_1} \neq \xi_{i_2}$, если $i_1 \neq i_2$, тогда $\beta_L(a) = \sum a_k \beta(\chi_k) = \sum a_{ij} \beta(\chi_{ij}) = \sum\limits_{i,j} a_{ij} \xi_i = \sum\limits_i \left(\sum\limits_j a_{ij} \right) \xi_i = 0$, следовательно,

$$\sum_j a_{ij} = 0. \tag{3.1}$$

Итак, $a = \sum\limits_i \sum\limits_j a_{ij} \chi_{ij} = \sum\limits_i \chi_{i1} \left(\sum\limits_j a_{ij} \chi_{ij} \chi_{i1}^{-1} \right)$, причем $\chi_{ij} \chi_{i1}^{-1} \in \operatorname{Ker} \beta$. Рассмотрим элемент $\sum\limits_j a_{ij} \chi_{ij} \chi_{i1}^{-1} = a_{i1} + \sum\limits_{j \geq 2} a_{ij} \chi_{ij} \chi_{i1}^{-1}$. В силу равенства (3.1) $a_{i1} = -\sum\limits_{j \geq 2} a_{ij}$, тогда

$$\sum_j a_{ij} \chi_{ij} \chi_{i1}^{-1} = -\sum_{j \geq 2} a_{ij} + \sum_{j \geq 2} a_{ij} \chi_{ij} \chi_{i1}^{-1} = \sum_{j \geq 2} a_{ij} (\chi_{ij} \chi_{i1}^{-1} - 1). \tag{3.2}$$

Очевидно, что элемент $\chi - 1 \in \operatorname{Ker} \beta_L$, где $\chi \in \operatorname{Ker} \beta$. Итак, соотношение (3.2) с учетом последнего замечания показывает, что $\operatorname{Ker} \beta_L$ есть идеал Хопфа, порожденный элементами $\chi - 1$, где $\chi \in \operatorname{Ker} \beta$.

Уточним список образующих $\operatorname{Ker} \beta_L$. Пусть $\chi_1, \dots, \chi_m$ — базис П-модуля $\operatorname{Ker} \beta$. Тогда условие $\chi \in \operatorname{Ker} \beta$ означает, что $\chi = \chi_1^{a_1} \dots \chi_m^{a_m}$, $a_i \in \mathbb{Z}$. Пусть $a_1 \neq 0$, $\chi - 1 = \chi_1^{a_1} \dots \chi_m^{a_m} - 1 = \chi_1^{a_1} (\chi_2^{a_2} \dots \chi_m^{a_m} - 1) + (\chi_1^{a_1} - 1)$. Если $a_1 > 0$, то $\chi_1^{a_1} - 1 = (\chi_1 - 1)(\chi_1^{a_1 - 1} + \ldots + 1)$, если $a_1 < 0$, то $\chi_1^{a_1} - 1 = \chi_1^{-|a_1|} - 1 = -(\chi_1 - 1) \left(\chi_1^{a_1} + \ldots + \chi_1^{-1} \right)$. Повторяя описанную процедуру для элемента $\chi_2^{a_2} \dots \chi_m^{a_m} - 1$, получаем, что идеал $\operatorname{Ker} \beta_L$ порождается элементами типа $\chi_i - 1$ $(i = 1, \dots, m)$.

Пусть теперь $\chi \in \hat{T}_1$ — произвольный характер и $\xi = \beta(\chi)$. Используя разложение (1.2) для характера χ, вычислим значение $\beta(\chi)$:

$$\beta(\chi) = \beta_L(\chi) = \beta_L(f_\chi^{(1)} \omega_1 + \ldots + f_\chi^{(n)} \omega_n) = \beta_L(f_\chi^{(1)}) \omega_1 + \ldots + \beta_L(f_\chi^{(n)}) \omega_n.$$

Причем, так как $f_\chi^{(k)} \in L[\hat{T}_1]^\Pi$, то $\beta_L(f_\chi^{(k)}) \in L[\hat{T}_2]^\Pi$. А значит, разложение характера $\xi = \beta_L(f_\chi^{(1)})\omega_1 + \ldots + \beta_L(f_\chi^{(n)})\omega_n$ и есть разложение (1.2) характера ξ. Итак, доказано, что $\beta_L(f_\chi^{(k)}) = f_\xi^{(k)}$ $(k = 1, \ldots, n)$.

Для П-модуля $\hat{T}_1$ можно выбрать базис $\chi_1, \ldots, \chi_m, \chi_{m+1}, \ldots, \chi_{m+d}$ таким образом, что $\beta(\chi_1) = \ldots = \beta(\chi_m) = 1$; $\beta(\chi_{m+i}) = \xi_i$, $i = 1, \ldots, d$, где $\xi_1, \ldots, \xi_d$ — базис П-модуля $\hat{T}_2$. Тогда соотношения (1.2) показывают, что образующие колец $A(\hat{T}_1)$, $k[T_1]$, связанные с базисом $\chi_1, \ldots, \chi_{m+d}$, отображаются на образующие колец $A(\hat{T}_2)$, $k[T_2]$, связанные с базисом $\xi_1, \ldots, \xi_d$. Итак, эпиморфизм β определяет эпиморфизмы координатных колец торов T_1, T_2 и их целых моделей

$$\beta_k : k[T_1] \to k[T_2], \quad \beta_{\mathcal{O}} : A(\hat{T}_1) \to A(\hat{T}_2).$$

Пусть разложение (1.2) характеров $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_m$, базисных для $\operatorname{Ker}\beta$, имеет вид: $\chi_i = x_i^{(1)}\omega_1 + \ldots + x_i^{(n)}\omega_n$ $(i = 1, \ldots, m)$, а также $1 = C_1\omega_1 + \ldots + C_n\omega_n$, $C_i \in \mathcal{O}$, тогда

$$\begin{aligned}\beta_L(\chi_i - 1) &= \beta_L\left((x_i^{(1)} - C_1)\omega_1 + (x_i^{(2)} - C_2)\omega_2 + \ldots + (x_i^{(n)} - C_n)\omega_n\right) = \\ &= \beta_k(x_i^{(1)} - C_1)\omega_1 + \beta_k(x_i^{(2)} - C_2)\omega_2 + \ldots + \beta_k(x_i^{(n)} - C_n)\omega_n = 0,\end{aligned}$$

то есть $\beta_k(x_i^{(j)} - C_j) = 0$ $(j = 1, \ldots, n)$. Итак, $x_i^{(j)} - C_j \in \operatorname{Ker}\beta_k \subset \operatorname{Ker}\beta_L$.

С другой стороны, образующие $\chi_i - 1$ $(i = 1, \ldots, m)$ идеала $\operatorname{Ker}\beta_L$ линейно над $\mathcal{O}_L$ выражаются через элементы $x_i^{(j)} - C_j$, значит, в качестве образующих идеала $\operatorname{Ker}\beta_L$ можно взять П-инвариантные элементы

$$x_i^{(j)} - C_j \ (i = 1, \ldots, m, \ j = 1, \ldots, n), \tag{3.3}$$

которые являются коэффициентами разложения (1.2) элементов $\chi_i - 1$ $(i = 1, \ldots, m)$.

Если $\omega_1 = 1$, то $C_1 = 1, C_2 = \ldots = C_n = 0$, и если $a \in \operatorname{Ker}\beta_k$, то $a = a \cdot \omega_1$. С другой стороны, $a \in \operatorname{Ker}\beta_L$, то есть $a = \sum (x_i^{(j)} - C_j) f_{ij}$, где $f_{ij} \in L[\hat{T}_1]$. Используя разложения (1.2) для элементов f_{ij}, получаем, что

$$a = \sum (x_i^{(j)} - C_j) f_{ij}^{(1)}\omega_1 + \sum (x_i^{(j)} - C_j) f_{ij}^{(2)}\omega_2 + \ldots + \sum (x_i^{(j)} - C_j) f_{ij}^{(n)}\omega_n,$$

откуда $a = \sum (x_i^{(j)} - C_j) f_{ij}^{(1)}$, где $f_{ij}^{(1)} \in k[T_1]$. Итак, доказано, что $\operatorname{Ker}\beta_k$ есть идеал Хопфа в алгебре $k[T_1]$, порожденный элементами (3.3).

Идеал I эпиморфизма $\beta_{\mathcal{O}}$ есть $\mathcal{O}$-идеал Хопфа, $I = A(\hat{T}_1) \cap \operatorname{Ker}\beta_k$, который содержит все образующие (3.3).

Пример. Вычислим целую модель норменного тора $T = R_{F/k}^{(1)}(G_m)$. По определению, норменный тор T есть ядро норменного отображения $S \to G_m$ квазиразложимого тора $S = R_{F/k}(G_m)$. Для модулей рациональных характеров это равносильно следующей точной последовательности модулей в аддитивной записи:

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\alpha} \hat{S} \xrightarrow{\beta} \hat{T} \to 0, \tag{3.4}$$

где $\hat{S} = \mathbb{Z}[\Pi/\Pi_1]$. Пусть $\chi_1, \ldots, \chi_d$ — пермутационный базис $\hat{S}$, причем $\alpha(1) = \chi_1 + \ldots + \chi_d$. Пусть $\chi = \chi_1\chi_2\ldots\chi_d \in L[\hat{S}]$, тогда χ — единственный базисный элемент из $\operatorname{Ker}\beta$. Причем, так как $\chi \in L[\hat{S}]^\Pi$, то $\chi = y \cdot 1$, $y \in k[\hat{S}]$. Тогда $\operatorname{Ker}\beta_k = (y-1)$. Как было показано в предыдущем пункте, $A(\hat{S}) = \mathcal{O}[x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(d)}, y^{-1}]$, а, значит, $\operatorname{Ker}\beta_{\mathcal{O}} = A(\hat{S}) \cap \operatorname{Ker}\beta_k$ есть $\mathcal{O}$-идеал Хопфа в $A(\hat{T})$, порожденный элементом $y - 1$. Таким образом, мы получаем, что целая модель норменного тора имеет вид

$$A(\hat{T}) = \mathcal{O}[x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(d)}, y^{-1}]/(y-1). \tag{3.5}$$

4. Свойства стандартной целой модели

Вернемся к случаю произвольного тора T. Модуль $\hat{T}$ всегда можно представить [2] в виде фактора $\hat{S} \xrightarrow{\beta} \hat{T}$, где $\hat{S}$ — пермутационный П-модуль, для дуальных торов это означает, что имеет место вложение $T \to S$. Пермутационный базис $\hat{S}$ распадается на орбиты относительно действия группы П, а значит, модуль $\hat{S}$ как аддитивная группа представим в виде прямой суммы модулей вида $\mathbb{Z} \otimes_\pi \mathbb{Z}[\Pi]$, π есть подгруппа в П. Это означает, что

$$S = \prod_i R_{F_i/k}(G_m), \; k \subset F_i \subset L. \tag{4.1}$$

Тогда алгебра A для тора S есть тензорное произведение алгебр вида (2.1). Обозначим через $X = \operatorname{Spec} A(\hat{T})$ и $Y = \operatorname{Spec} A(\hat{S})$ стандартные целые модели торов $T,\ S$ соответственно. Пусть $\chi \in \hat{S},\ \xi = \beta(\chi) \in \hat{T}$ есть ограничение характера χ на подгруппу T тора S, тогда значение $\beta(f_\chi^{(j)}) = f_\xi^{(j)}$, где β рассматривается как эпиморфизм группового кольца $L[\hat{S}]$ на $L[\hat{T}]$, а $f_\chi^{(j)},\ f_\xi^{(j)}$ — коэффициенты разложения (1.2) характеров χ и ξ. Эпиморфизм β определяет эпиморфизм

$$\beta : A(\hat{S}) \to A(\hat{T}).$$

Докажем, что для целой модели X тора T справедливы экстремальные свойства, аналогичные свойствам целой модели простейшего тора $R_{F/k}(G_m)$, описанным выше. Локально компактная коммутативная группа $T(k)$ содержит однозначно определяемую максимальную компактную подгруппу U [4]. Любой гомоморфизм $A(\hat{T}) \to \mathcal{O}$ строго плоской $\mathcal{O}$-алгебры $A(\hat{T})$ однозначно продолжается до морфизма $k[T] \to k$, то есть имеем вложение $X(\mathcal{O}) \to T(k)$. В силу компактности группа $X(\mathcal{O})$ вкладывается в U. По доказанному выше, группа точек $Y(\mathcal{O})$ есть максимальная компактная подгруппа в $S(k)$. Так как

$$\alpha : T(k) \to S(k)$$

есть вложение, то $U = T(k) \cap Y(\mathcal{O})$. Докажем, что $U = X(\mathcal{O})$. Пусть $u \in U$, тогда $u \in T(k) = Hom(k[T], k)$ и $u \circ \beta \in Hom(k[S], k)$ есть $\alpha(u)$. Так как ограничение $u \circ \beta$ на $A(\hat{S})$ есть точка группы $Y(\mathcal{O})$, то $u \circ \beta(A(\hat{S})) = u(A(\hat{T})) = \mathcal{O}$, то есть $u \in X(\mathcal{O})$.

Выразим U через параметры тора T. Известно [2], что локально компактная группа точек $T(k) = Hom_\Pi(\hat{T}, L^*) \subset Hom(\hat{T}, L^*) = (L^*)^d$, в свою очередь группа $Hom(\hat{T}, \mathcal{O}_L^*) = (\mathcal{O}_L^*)^d$ есть максимальная компактная подгруппа в $(L^*)^d$, тогда $U = T(k) \cap (\mathcal{O}_L^*)^d = Hom_\Pi(\hat{T}, L^*) \cap Hom(\hat{T}, \mathcal{O}_L^*) = Hom_\Pi(\hat{T}, \mathcal{O}_L^*)$. Итак, справедливы равенства $X(\mathcal{O}) = U = Hom_\Pi(\hat{T}, \mathcal{O}_L^*)$.

Пусть теперь $f \in A(\hat{T})$, тогда найдется функция $F \in A(\hat{S})$ такая, что $f = \beta(F)$, причем, по доказанному ранее, $f(u) = F(u) \in \mathcal{O}$ для любого $u \in U$. Таким образом, любая функция из $A(\hat{T})$ принимает на U значения из $\mathcal{O}$. В частности, если $f \in A(\hat{T}) \cap k$, то $f \in \mathcal{O}$.

Если расширение L/k неразветвлено, то расширения F_i/k также неразветвлены, а значит, $\mathcal{O}_L[\hat{S}] = \mathcal{O}_L A(\hat{S})$, тогда $\mathcal{O}_L[\hat{T}] = \beta(\mathcal{O}_L[\hat{S}]) = \beta(\mathcal{O}_L A(\hat{S})) = \mathcal{O}_L A(\hat{T})$. Если теперь минимальное поле разложения тора T разветвлено над k и Δ — подгруппа инерции в $\Pi = \operatorname{Gal}(L/k)$, то среди полей F_i разложения (4.1) обязательно найдется разветвленное расширение F^0, так как в противном случае минимальное поле разложения T содержалось бы в поле $L \cap K^{nr}$, где K^{nr} — максимальное неразветвленное расширение поля k в $\overline{k}$ [10]. Рассмотрим множитель $S_1 = R_{F^0/k}(G_m)$, $\hat{S}_1$ есть прямое слагаемое в П-модуле $\hat{S}$, причем мы можем считать, что Δ действует на $\beta(\hat{S}_1)$

нетривиально (в противном случае мы могли бы заменить прямое слагаемое $\hat{S}_1$ в $\hat{S}$ на тривиальный Δ-модуль, а значит, множитель S_1 на аналогичный с неразветвленным полем F'). Более того, мы можем считать, что стабилизаторы характеров $\chi_1 \in \hat{S}_1$ и $\xi_1 = \beta(\chi_1) \in \hat{T}$ совпадают. Действуя β на обе части уравнений системы (2.2), получаем аналогичную систему

$$\xi_i = \xi_1^{\sigma_i} = x^{(1)} e_1^{(i)} + \ldots + x^{(d)} e_d^{(i)}. \tag{4.2}$$

Аналогично рассуждая, получаем, что коэффициенты выражения $x^{(i)}$ через ξ_j не принадлежат кольцу целых $\mathcal{O}_L$, то есть $\mathcal{O}_L[\hat{T}] \neq \mathcal{O}_L A(\hat{T})$. Так как существуют элементы кольца $A(\hat{T})$, не принадлежащие $\mathcal{O}_L[\hat{T}]$, то $(\mathcal{O}_L[\hat{T}])^{\Pi} \neq A(\hat{T})$.

Алгебра Хопфа $A(\hat{T})$ не имеет кручения, значит, она является плоской над кольцом главных идеалов $\mathcal{O}$. В силу сюръективности отображения $\operatorname{Spec} A(\hat{T}) \longrightarrow \operatorname{Spec} \mathcal{O}$ алгебра $A(\hat{T})$ является строго плоской $\mathcal{O}$-алгеброй [11].

Наконец, собирая вместе все изученные в данном пункте свойства стандартной целой модели $X = \operatorname{Spec} A, A = A(\hat{T})$ произвольного алгебраического тора T, получаем, что справедлива следующая

Теорема 1. Стандартная $\mathcal{O}$-форма $X = \operatorname{Spec} A$ тора T имеет следующие свойства:

1) $A \subset k[T],\ A \cap k = \mathcal{O},\ k \otimes_{\mathcal{O}} A \cong kA = k[T]$;

2) A есть алгебра Хопфа конечного типа над $\mathcal{O}$, которая индуцирует исходную структуру алгебры Хопфа на $k[T]$;

3) алгебра A строго плоская над $\mathcal{O}$;

4) $f(u) \in \mathcal{O},\ \forall u \in U$ и $\forall f \in A$;

5) $X(\mathcal{O}) = U = Hom_{\Pi}(\hat{T}, \mathcal{O}_L^*)$;

6) $\mathcal{O}_L[\hat{T}] \subset \mathcal{O}_L A;\ (\mathcal{O}_L[\hat{T}])^{\Pi} \subset A;\ \mathcal{O}_L[\hat{T}] = \mathcal{O}_L A$ тогда и только тогда, когда L/k — неразветвленное расширение.

5. Редукция стандартной целой модели

Пусть $X = \operatorname{Spec} A(\hat{T})$ — описанная выше стандартная целая модель тора T. Тогда имеет смысл говорить о редукции тора T по простому модулю $\wp$.

Определение. Редукцией тора T по модулю $\wp$ назовем групповую схему $\overline{X} = X \times_{\operatorname{Spec} \mathcal{O}} \operatorname{Spec} r_k$, где $r_k = \mathcal{O}/\wp$ — конечное поле вычетов. Редукцию $\overline{X}$ назовем

а) *очень хорошей,* если $\overline{X}$ есть r_k-тор;

б) *хорошей,* если $\overline{X}$ есть алгебраическая группа над r_k;

в) *плохой,* если схема $\overline{X}$ не приведена.

Редукция стандартной целой модели есть аффинная групповая схема $\overline{X} = \operatorname{Spec} \overline{A}$, где $\overline{A} = r_k \otimes_{\mathcal{O}} A(\hat{T})$. Причем $\dim_{r_k} \overline{X} = \dim_k T$.

Как будет показано позже, тип редукции существенно зависит от структуры расширения L/k. Напомним [10], что группа $\Pi = \operatorname{Gal}(L/k)$ имеет нормальный делитель

$$\Delta = \{\sigma \in \Pi :\ v_L(x^{\sigma} - x) > 0, \forall x \in \mathcal{O}_L\},$$

называемый подгруппой инерции, здесь v_L — нормирование поля L. Причем $\Gamma = \Pi/\Delta$ есть циклическая группа. Поле инвариантов $L_0 = L^{\Delta}$ есть максимальное неразветвленное расширение поля k в поле L с группой Галуа Γ, а расширение L/L_0 вполне разветвлено.

Рассмотрим случай, когда поле разложения L неразветвлено. По теореме 1 имеем: $\mathcal{O}_L A(\hat{T}) = \mathcal{O}_L[\hat{T}]$. В этом случае $\Pi = \Gamma$ и Γ есть группа Галуа расширения r_L/r_k, где r_L и r_k — поля классов вычетов колец целых $\mathcal{O}_L$ и $\mathcal{O}$ по простым модулям $\wp_L$ и $\wp$ соответственно.

Кольцо $\mathcal{O}_L[\hat{T}]$ порождается характерами

$$\xi_i = x_i^{(1)}\omega_1 + \ldots + x_i^{(n)}\omega_n \;\; \xi_i^{-1} = y_i^{(1)}\omega_1 + \ldots + y_i^{(n)}\omega_n \; (i = 1, \ldots, d).$$

Тогда $\overline{A}_{r_L} = r_L \otimes_{\mathcal{O}_L} \mathcal{O}_L[\hat{T}] = r_L[\hat{T}]$, где $\overline{A}_{r_L}$ порождается характерами

$$\overline{\xi}_i = x_i^{(1)}\overline{\omega_1} + \ldots + x_i^{(n)}\overline{\omega_n}, \;\; \overline{\xi}_i^{-1} = y_i^{(1)}\overline{\omega_1} + \ldots + y_i^{(n)}\overline{\omega_n},$$

где $\overline{\omega_1}, \ldots, \overline{\omega_n}$ — базис расширения r_L/r_k. Тогда $\overline{A} = (r_L[\hat{T}])^{\Pi}$, а группа $\overline{X} = \operatorname{Spec} \overline{A}$ есть r_k-тор, то есть в случае неразветвленного поля разложения L редукция стандартной модели *очень хорошая*.

6. Редукция простейшего квазиразложимого тора

Изучим теперь редукцию простейшего тора $S = R_{F/k}(G_m)$, $k \subset F$, $F = L^{\Pi_1}$. Пусть $L_0 = L^{\Delta}$ — максимальное неразветвленное расширение поля k в L, тогда $E = F \cap L_0$ — максимальное неразветвленное расширение поля k, содержащееся в поле F. Пусть Π_2 есть наименьшая подгруппа в Π, содержащая Π_1 и Δ, тогда $E = L^{\Pi_2}$. Напомним, что число $e = (F : E) = [\Pi_2 : \Pi_1]$ называется индексом ветвления, а $f = (E : k) = [\Pi : \Pi_2]$ — степенью классов вычетов расширения F/k, $(F : k) = ef = d$. Обозначим r_k, r_E, r_F поля классов вычетов колец целых $\mathcal{O}_k$, $\mathcal{O}_E$, $\mathcal{O}_F$ по простым модулям $\wp$, $\wp_E$, $\wp_F$ соответственно, тогда имеем $\wp_F | \wp_E | \wp$, $(\wp_F)^e = \wp_E \mathcal{O}_F$, $\wp_E = \wp\mathcal{O}_E$, $r_E = r_F$, $(r_E : r_k) = f$. Пусть $e_1 = 1, \ldots, e_f$ — целый базис расширения E/k, а $1, \pi, \ldots, \pi^{e-1}$ — целый базис вполне разветвленного расширения F/E, тогда $\{e_j \pi^i\}$ — целый базис расширения F/k [10]. Как и раньше, Π_1 — стабилизатор характера χ_1, и мы имеем разложение (1.2) для χ_1 :

$$\begin{aligned} \chi_1 = x_1 e_1 + \ldots + x_f e_f + \pi(x_{f+1} e_1 + \ldots + x_{2f} e_f) + \ldots \\ + \pi^{e-1}(x_{f(e-1)+1} e_1 + \ldots + x_{fe} e_f). \end{aligned} \tag{6.1}$$

Как и раньше, $y = y(x_1, \ldots, x_d)$ — норменный многочлен, выписанный в базисе регулярного представления. Изучим редукцию многочлена y по модулю $\wp$. Пусть $\sigma_1, \ldots, \sigma_e$ — представители левых смежных классов группы Π_2 по подгруппе Π_1, а $\tau_1, \ldots, \tau_f$ — представители левых смежных классов группы Π по подгруппе Π_2. Тогда $\{\tau_i \sigma_j\}$ — полный список представителей левых смежных классов группы Π по подгруппе Π_1.

Так как $\hat{S} \cong \mathbb{Z}[\Pi/\Pi_1]$, то характеры вида $\tau_i \sigma_j \chi_1 = \tau_i(\sigma_j \chi_1)$ составляют пермутационный базис модуля $\hat{S}$ рациональных характеров тора S. Обозначим их $\chi_1, \ldots, \chi_d$. Рассмотрим Π-инвариантный характер $\chi = \chi_1 \chi_2 \ldots \chi_d = \prod \tau_i(\sigma_j \chi_1) = y e_1$. Пусть $\wp' = (\pi) = \wp_F \mathcal{O}_L$, положим $\xi_1 = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_f e_f$, тогда $\chi_1 \equiv \xi_1 \pmod{\wp'}$. Так как $v_L(\sigma\pi) = v_L(\pi)$, то есть $\sigma\pi = \varepsilon\pi$, где $\varepsilon \in \mathcal{O}_L^*$, то мы получаем, что $\sigma\chi_1 \equiv \equiv \sigma\xi_1 \pmod{\wp'}$ для всех $\sigma \in \Pi$. При этом $\sigma_j(\xi_1) = \xi_1$, так как $e_1, \ldots, e_f \in E = L^{\Pi_2}$, тогда $\tau_i(\sigma_j \xi_1) = \tau_i \xi_1 = \xi_1^{(i)} = x_1 e_1^{\tau_i} + \ldots + x_f e_f^{\tau_i}$, а значит, $\tau_i(\sigma_j \chi_1) \equiv \xi_1^{(i)} \pmod{\wp'}$. Тогда

$$\chi = \prod_{i,j} \tau_i(\sigma_j \chi_1) \equiv \prod_{i,j} \tau_i \xi_1 = \left(\prod_i \xi_1^{(i)} \right)^e = z^e \pmod{\wp'},$$

где $z = \prod_{i=1}^{f} \xi_1^{(i)}$ есть норменный многочлен расширения E/k, или форма степени f от переменных $x_1, \ldots, x_f$ с целыми (из $\mathcal{O}$) коэффициентами.

Итак, разность $y - z^e$ есть многочлен с коэффициентами из кольца $\mathcal{O}$, делящимися на π, но $\wp' \cap \mathcal{O} = \wp$, следовательно, $y \equiv z^e \pmod{\wp}$.

Рассмотрим теперь редукцию целой модели тора S на языке алгебр Хопфа. Пусть $\overline{A} = r_k \otimes_{\mathcal{O}} A(\hat{S}) = r_k[x_1, \ldots, x_d, z^{-1}]$, тогда $\overline{X} = \operatorname{Spec} \overline{A}$. Поскольку кольцо $\overline{A}$ есть локализация кольца многочленов $r_k[x_1, \ldots, x_d]$, то схема $\overline{X}$ есть коммутативная связная алгебраическая группа над конечным полем r_k, а значит, она однозначно представима [12] в виде прямого произведения

$$\overline{X} = R \times_{r_k} U, \tag{6.2}$$

где R — мультипликативная подгруппа $\overline{X}$, а U — унипотентная подгруппа $\overline{X}$. Уточним разложение (6.2).

Теорема 2. Пусть $S = R_{F/k}(G_m)$, X — стандартная целая модель тора S, e — индекс ветвления расширения F/k, а f — степень классов вычетов, тогда редукция тора S по модулю $\wp$ есть связная алгебраическая r_k-группа $\overline{X} = R_{r_F/r_k}(G_m) \times U$, где U — гладкая унипотентная группа размерности $f(e-1)$. Редукция тора S *очень хорошая*, если $e = 1$, и *хорошая*, если $e > 1$.

Доказательство. Рассмотрим случай $f = 1$. Тогда $z = x_1$ и алгебра $\overline{A} = r_k[x_1, \ldots, x_d, x_1^{-1}]$. Эпиморфизм $r : A(\hat{S}) \to r_k \otimes A(\hat{S})$ $\mathcal{O}$-алгебр Хопфа позволяет определить операторы Хопфа в $\overline{A}$. Операторы Хопфа в координатах x_i, x_1^{-1} примут вид:

$$\begin{gathered} m^*(x_1^{-1}) = x_1^{-1} \otimes x_1^{-1}; m^*(x_j) = \sum_{k=1}^{j} x_k \otimes x_{j-k+1}; \\ i^*(x_1^{\pm 1}) = x_1^{\mp 1},\ i^*(x_j) = -x_1^{-1} \sum_{k=2}^{j} x_k i^*(x_{j-k+1}); \\ e^*(x_1^{\pm 1}) = 1,\ e^*(x_j) = 0. \end{gathered} \tag{6.3}$$

Вычислим операторы Хопфа на элементах $t_j = x_1^{-1} x_j (j = 2, \ldots, d)$:

$$\begin{gathered} m^*(t_2) = m^*(x_1^{-1} x_2) = (x_1^{-1} \otimes x_1^{-1})(x_1 \otimes x_2 + x_2 \otimes x_1) = t_2 \otimes 1 + 1 \otimes t_2; \\ i^*(t_2) = i^*(x_1^{-1} x_2) = -x_1 x_1^{-1} x_2 x_1^{-1} = -t_2; \\ e^*(t_2) = 0. \end{gathered} \tag{6.4}$$

$$\begin{gathered} m^*(t_j) = (x_1^{-1} \otimes x_1^{-1}) \left(\sum_{k=1}^{j} x_k \otimes x_{j-k+1} \right) = \sum_{k=1}^{j} x_1^{-1} x_k \otimes x_1^{-1} x_{j-k+1} = \\ = 1 \otimes t_j + \sum_{k=2}^{j-1} t_k \otimes t_{j-k+1} + t_j \otimes 1; \\ i^*(t_j) = -x_1 x_1^{-1} \sum_{k=2}^{j} x_k i^*(x_{j-k+1}) = - \sum_{k=2}^{j} x_1^{-1} x_k i^*(x_1^{-1} x_{j-k+1}) = \\ = - \sum_{k=2}^{j-1} t_k i^*(t_{j-k+1}) - t_j; \\ e^*(t_j) = 0,\ j \geq 3. \end{gathered} \tag{6.5}$$

Таким образом, $\overline{A} = r_k[x_1, x_1^{-1}, t_2, \dots, t_d] = \overline{A}_1 \otimes \overline{A}_2$, где $\overline{A}_1 = r_k[x_1, x_1^{-1}]$ и $\overline{A}_2 = r_k[t_2, \dots, t_d]$ — алгебры Хопфа. Тогда $\overline{X} = G_{m,r_k} \times_{r_k} U$. Изучим более подробно алгебру Хопфа $\overline{A}_2$. Формулы (6.4) показывают, что она содержит нормальную подалгебру Хопфа $R = r_k[t_2] = r_k[t]$, причем $\operatorname{Spec} R = G_a$. Пусть $\overline{A}_3 = \overline{A}_2/(t_2)$ — фактор-алгебра Хопфа, тогда имеем двойственную точную последовательность групп

$$1 \to U_1 \to U \to G_a \to 1, \tag{6.6}$$

где $U_1 = \operatorname{Spec} \overline{A}_3$. Используя формулы (6.5), редуцированные по модулю идеала (t_2), вновь убеждаемся, что операторы Хопфа действуют на образующей t_3 алгебры $\overline{A}_3$ по законам (6.4), а значит, $\overline{A}_3$ содержит подалгебру R. Действуя по аналогии, получаем композиционный ряд для группы $U:\ 1 = U_{d-1} \subset U_{d-2} \subset \dots \subset U_1 \subset U$, композиционные факторы которого изоморфны G_a, а значит, по определению [12], U есть унипотентная группа, $\dim U = d-1 = e-1$ и U — гладкая унипотентная группа, так как поле r_k совершенное.

Пусть теперь $f > 1$. Рассмотрим алгебру $A_{L_0} = \mathcal{O}_{L_0} \otimes_{\mathcal{O}} A(\hat{S})$, где $L_0 = L^{\Delta}$ — максимальное неразветвленное расширение поля k в L, тогда $A(\hat{S}) = (A_{L_0})^{\Gamma}$, $\Gamma = \Pi/\Delta = \operatorname{Gal}(L_0/k)$. Тогда разложение (6.1) характера χ_1 позволяет рассмотреть элементы:

$$\begin{aligned} &\xi_1^{(i)} = x_1 e_1^{\tau_i} + x_2 e_2^{\tau_i} + \dots + x_f e_f^{\tau_i},\\ &\xi_2^{(i)} = x_{f+1} e_1^{\tau_i} + x_{f+2} e_2^{\tau_i} + \dots + x_{2f} e_f^{\tau_i},\\ &\dots\\ &\xi_e^{(i)} = x_{f(e-1)+1} e_1^{\tau_i} + x_{f(e-1)+2} e_2^{\tau_i} + \dots + x_{fe} e_f^{\tau_i}. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Рассматривая соотношения (6.7) как линейные системы относительно x_i и учитывая, что расширение E/k неразветвлено, получаем, что x_i линейно над $\mathcal{O}_{L_0}$ выражаются через $\xi_j^{(i)}$ $(i = 1, \dots, f,\ j = 1, \dots, e)$.

Таким образом, $A_{L_0} = \mathcal{O}_{L_0}[\xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)}, \dots, \xi_e^{(i)}, y^{-1}]$. Рассмотрим редукцию $\overline{A}_{L_0} = r_{L_0} \otimes_{\mathcal{O}_{L_0}} A_{L_0}$. Соответствие между неразветвленным расширением и соответствующим полем вычетов позволяет заключить, что $\overline{A} = (\overline{A}_{L_0})^{\Gamma}$, то есть редукция $\overline{X} = \operatorname{Spec} \overline{A}$ есть форма редукции $\overline{X}_{r_{L_0}} = \operatorname{Spec} \overline{A}_{L_0}$. Изучим редукцию $\overline{X}_{r_{L_0}}$.

$$\begin{aligned} \overline{A}_{L_0} &= r_{L_0} \otimes_{\mathcal{O}_{L_0}} A_{L_0} = r_{L_0}[\xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)}, \dots, \xi_e^{(i)}, (\xi_1^{(1)} \dots \xi_1^{(f)})^{-1}] =\\ &= \otimes_{i=1}^{f} r_{L_0}[\xi_1^{(i)}, (\xi_1^{(i)})^{-1}, \xi_2^{(i)}, \dots, \xi_e^{(i)}] = \overline{A}_1 \otimes \overline{A}_2 \otimes \dots \otimes \overline{A_f}, \end{aligned}$$

где алгебры Хопфа $\overline{A_i}$ $(i = 1, \dots, f(e-1))$ имеют ту же структуру Хопфа, что и кольцо $\overline{A}$ в случае $f = 1$. Итак, $\overline{X}_{r_{L_0}} = G_m^f \times_{r_{L_0}} U^f$, где $G_m^f = \operatorname{Spec} r_{L_0}[\hat{T}]$, $\hat{T}$ — пермутационный Γ-модуль, значит, форма G_m^f есть r_k-тор $R_{r_E/r_k}(G_m)$. Унипотентная подгруппа U редукции $\overline{X}_{r_{L_0}}$ связная и гладкая, форма которой U есть гладкая унипотентная r_k-группа размерности $f(e-1)$. Итак, $\overline{X} = R_{r_E/r_k}(G_m) \times_{r_k} U$. Теорема 2 доказана полностью.

Пример. Редукция норменного тора. Пусть $T = R_{F/k}^{(1)}(G_m)$. Целая модель тора T имеет вид $X = \operatorname{Spec} \mathcal{O}[x_1, x_2, \dots, x_d, y^{-1}]/(y-1)$, тогда редукция

$$\overline{X} = \operatorname{Spec} r_k \left[x_1, \dots, x_d, z^{-1}\right]/(z^e - 1).$$

Если $f = 1$, то $\overline{X} = \operatorname{Spec} r_k[x_1, x_1^{-1}]/(x_1^e - 1) \times_{r_k} U = \mu_e \times_{r_k} U$, где унипотентная группа U совпадает с унипотентной подгруппой редукции простейшего тора $S = R_{F/k}(G_m)$.

Если $f > 1$, то вновь убеждаемся в том, что $\overline{X}$ есть форма редукции $\overline{X}_{r_{L_0}}$, где $\overline{X}_{r_{L_0}} = \operatorname{Spec} r_{L_0}[(\xi_1^{(1)})^{\pm 1}, (\xi_1^{(2)})^{\pm 1}, \dots, (\xi_1^{(f)})^{\pm 1}]/\,(z^e - 1) \times_{r_k} U^f$, где U^f вновь совпадает с унипотентной подгруппой редукции $\overline{X}_{r_{L_0}}$ в случае квазиразложимого тора. Мультипликативная часть редукции $\overline{X}$ есть форма группы:

$$R = \operatorname{Spec} r_{L_0}[\xi_1^{(1)}, \xi_1^{(2)}, \dots, \xi_1^{(f)}]/(z^e - 1) \cong$$

$$\cong \operatorname{Spec} r_{L_0}[z, z^{-1}]/(z^e - 1) \otimes_{r_k} r_k[(\xi_1^{(1)})^{\pm 1}, \dots, (\xi_1^{(f-1)})^{\pm 1}] = \mu_e \times_{r_k} G_m^{f-1}.$$

Причем форма группы G_m^{f-1} есть норменный тор $R^{(1)}_{r_E/r_k}(G_m)$.

Итак, редукция тора T есть норменный тор $R^{(1)}_{r_E/r_k}(G_m)$, если $e = 1$. Если $e > 1$, то редукция имеет вид $\overline{X} = \mu_e \times_{r_k} R^{(1)}_{r_E/r_k}(G_m) \times_{r_k} U$, где U та же унипотентная подгруппа, что и в случае редукции квазиразложимого тора $S = R_{F/k}(G_m)$.

Обратим внимание на множитель μ_e. Если простое $p = \operatorname{char}\ r_k$ не делит $e > 1$, то групповая схема μ_e приведена, но не является связной, при этом связная компонента $\overline{X}^0$ редукции имеет вид $R^{(1)}_{r_E/r_k}(G_m) \times_{r_k} U$ и $\overline{X}/\overline{X}^0 \cong \mu_e$. Если же число p делит e, то схема $\mu_e = \operatorname{Spec} r_k[z]/(z^e - 1)$ не является приведенной, значит, по нашей классификации редукция плохая. Соберем вместе все факты касательно редукции норменного тора. Справедлива

Теорема 3. Редукция норменного тора $T = R^{(1)}_{F/k}(G_m)$ представима в виде $\overline{X} = R \times_{r_k} U$, где U — гладкая связная унипотентная группа размерности $f(e-1)$, а мультипликативная группа $R \cong \mu_e \times_{r_k} R^{(1)}_{r_E/r_k}(G_m)$. При этом

1) редукция X *очень хорошая*, если $e = 1$,

2) редукция $\overline{X}$ *хорошая*, если $e > 1$ и $p = \operatorname{char}\ r_k \nmid e$, ее связная компонента имеет вид $\overline{X}^0 = R^{(1)}_{r_E/r_k}(G_m) \times_{r_k} U$, $\overline{X}/\overline{X}^0 \cong \mu_e$,

3) редукция $\overline{X}$ *плохая*, если $p = \operatorname{char}\ r_k \mid e$.

7. Структура редукции произвольного тора

При тех же обозначениях, как и в пункте 6, пусть T — произвольный k-тор, вложение которого в квазиразложимый тор S (вообще говоря, не простейший) определяется эпиморфизмом П-модулей $\beta : \hat{S} \to \hat{T}$, который определяет эпиморфизм целых моделей торов S и T:

$$\beta_{\mathcal{O}} : A(\hat{S}) \to A(\hat{T}). \tag{7.1}$$

Наряду с эпиморфизмом (7.1) будем рассматривать эпиморфизм целых моделей торов $S \otimes_k L_0$ и $T \otimes_k L_0$, где L_0 — максимальное неразветвленное расширение поля k в L.

Перейдем теперь к редукции стандартной целой модели тора $T \otimes_k L_0$. Изучим ее структуру, используя структуру редукции квазиразложимого тора и эпиморфизм

$$\bar{\beta} : r_{L_0} \otimes_{\mathcal{O}_{L_0}} A_{L_0}(\hat{S}) \to r_{L_0} \otimes_{\mathcal{O}_{L_0}} A_{L_0}(\hat{T}). \tag{7.2}$$

Для редукции $\overline{A}_{L_0}(\hat{S}) = r_{L_0} \otimes_{\mathcal{O}_{L_0}} A_{L_0}(\hat{S})$ квазиразложимого тора $S \otimes_k L_0$ справедлива формула

$$\overline{A}_{L_0}(\hat{S}) = \overline{A}^{(1)}_{\hat{S}} \otimes_{r_{L_0}} \overline{A}^{(2)}_{\hat{S}}, \tag{7.3}$$

где $\operatorname{Spec}\overline{A}^{(1)}_{\hat{S}} = R_s$ — мультипликативная, а $\operatorname{Spec}\overline{A}^{(2)}_{\hat{S}} = U_s$ — гладкая связная унипотентная группы. Тогда, учитывая замечание о ядре эпиморфизма $\bar{\beta}$, получаем, что

$$\overline{A}_{L_0}(\hat{T}) = \bar{\beta}\left(\overline{A}^{(1)}_{\hat{S}}\right) \otimes_{r_{L_0}} \bar{\beta}\left(\overline{A}^{(2)}_{\hat{S}}\right). \tag{7.4}$$

Итак, редукция произвольного алгебраического k-тора T имеет вид

$$\overline{X} = R \times_{r_k} U, \tag{7.5}$$

где $R = \operatorname{Spec}\left(\bar{A}^{(1)}_{\hat{T}}\right)^{\Gamma}$ — *мультипликативная часть*, а $U = \operatorname{Spec}\left(\bar{A}^{(2)}_{\hat{T}}\right)^{\Gamma}$ — *унипотентная часть* редукции $\overline{X}$.

В статье [6] было получено достаточно полное описание мультипликативной части редукции тора T по простому модулю $\wp$. Напомним этот результат. Пусть I — идеал аугментации кольца $\mathbb{Z}[\Delta]$, порожденный элементами вида $\sigma - 1,\ \sigma \in \Delta$. Пусть $\psi(t) = \sum_{\sigma\in\Delta} \sigma t,\ \hat{T}_1 = \operatorname{Ker}(\psi)$. Рассмотрим точную последовательность

$$0 \to \hat{T}_1 \to \hat{T} \to \hat{T}_2 \to 0.$$

Модули $\hat{T}_1$ и $\hat{T}_2$ не имеют кручения. Заметим еще, что $\hat{T}_1/I\hat{T}$ есть не что иное, как $H^{-1}(\Delta,\hat{T})$ — конечный Γ-модуль. Кольцо инвариантов $\left(r_{L_0}[\hat{T}/I\hat{T}]\right)^{\Gamma}$ есть алгебра Хопфа групповой схемы R мультипликативного типа, связная компонента которой есть r_k-тор R^0, определяемый Γ-модулем $\hat{T}_2$, и фактор R/R^0 дуален Γ-модулю $H^{-1}(\Delta,\hat{T})$.

Ранее было отмечено, что если минимальное поле разложения L тора T неразветвлено, то редукция тора очень хорошая. Докажем теперь следующий критерий.

Предложение 3. Тор T, определенный над полем k, имеет *очень хорошую* редукцию в том и только в том случае, если минимальное поле разложения L тора T неразветвлено над k.

Доказательство. Нам осталось доказать необходимость условия очень хорошей редукции тора T. Действительно, пусть T имеет очень хорошую редукцию $\overline{X}$, т. е. разложение (7.6) в этом случае имеет вид $\overline{X} = R$, где R — r_k-тор с модулем рациональных характеров $\hat{T}/I\hat{T}$. Причем $\dim_{r_k} R = \dim_k T = d = \operatorname{rank}_{\mathbb{Z}}\hat{T}/I\hat{T} = \operatorname{rank}_{\mathbb{Z}}\hat{T}$. Но фактор $\hat{T}/I\hat{T}$ имеет тот же $\mathbb{Z}$-ранг, что и $\hat{T}$ тогда и только тогда, когда $I\hat{T} = \{0\}$, а это означает, что Δ тривиально действует на модуле $\hat{T}$, т. е. минимальное поле разложения L содержится в K^{nr} [10]. Предложение 3 доказано.

Перейдем к исследованию унипотентной части редукции произвольного алгебраического тора. Ранее было установлено, что тор T с неразветвленным полем разложения L имеет тривиальную унипотентную часть редукции $\overline{X}$ стандартной целой модели. Везде в дальнейшем индекс ветвления $e > 1$. При изучении редукции норменного тора было замечено также, что если характеристика поля вычетов r_k не делит e, то редукция тора хорошая, а если $p|e$, то плохая. Правда, в обоих случаях унипотентная часть редукции была связной и гладкой. Мы покажем, что подобная ситуация возможна не всегда, а именно: в следующем пункте будет доказано, что тор T со слаборазветвленным полем разложения L обладает *хорошей* редукцией с гладкой и связной унипотентной частью, в случае, когда $p = \operatorname{char} r_k \mid e$, вычисления редукций торов малой размерности покажут, что наряду со случаями гладкой и связной группы U (случай квазиразложимого и норменного торов) существуют также торы, унипотентная часть которых допускает композиционный ряд с композиционными факторами типа $\alpha_p = \operatorname{Spec} r_k[t]/(t^p)$ [12].

Докажем теперь следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 1. Пусть $\alpha : \hat{T}_1 \to \hat{T}_2$ — мономорфизм П-модулей без кручения одинакового $\mathbb{Z}$-ранга, причем натуральное число $m = [\hat{T}_2 : \alpha(\hat{T}_1)]$ взаимно просто с p. Тогда унипотентные части редукций стандартных целых моделей k-торов T_1 и T_2, определяемых решетками $\hat{T}_1$ и $\hat{T}_2$, изоморфны.

Доказательство. Пусть $A(\hat{T}_1)$, $A(\hat{T}_2)$ — стандартные целые модели торов T_1 и T_2. По теореме о подгруппах конечнопорожденной абелевой группы существует такой базис решетки $\hat{T}_2 : \{\chi_i\}_{i=1}^d$, что элементы $m_1\chi_1, \ \ldots, \ m_d\chi_d, \ m_i \in \mathbb{N}$ — базис подрешетки $\alpha(\hat{T}_1)$ в аддитивной записи. Очевидно, что $m_i \mid m$, следовательно, $(m_i, p) = 1$. Рассмотрим в $\mathcal{O}$-алгебре $A(\hat{T}_2)$ подалгебру Хопфа A', порождаемую коэффициентами разложения (1.2) элементов $\chi_i^{\pm m_i}$ $(i = 1, \ldots, d)$, П-модуля $\hat{T}_2$, в мультипликативной записи. Пусть алгебра $A(\hat{T}_1)$ построена согласно конструкции пункта 1 с использованием базиса $\hat{T}_1 : \alpha^{-1}(\chi_i^{m_i})$ $(i = 1, \ldots, d)$, тогда сопоставление выбранным образующим кольца $A(\hat{T}_1)$ образующих кольца $A' \subset A(\hat{T}_2)$ определяет изоморфизм этих алгебр Хопфа. Таким образом, мономорфизм α П-модулей $\hat{T}_1$, $\hat{T}_2$ определяет мономорфизм $\alpha : A(\hat{T}_1) \to A(\hat{T}_2)$ алгебр Хопфа.

Опишем теперь следующую процедуру построения пермутационного П-модуля $\hat{S}$, фактором которого является данный модуль $\hat{T}$. Пусть $\chi_1, \ldots, \chi_d$ — базис $\hat{T}$, тогда в $\hat{T}$ содержатся следующие П-подмодули $\hat{T}_i = < \sigma\chi_i >_{\{\sigma \in \Pi\}}$, причем $\hat{T} = \sum_{i=1}^{d} \hat{T}_i$. Каждый из $\hat{T}_i$ допускает накрытие $\beta_i : \hat{S}_i \to \hat{T}_i$, где $\hat{S}_i \cong \mathbb{Z}[\Pi]$ имеет пермутационный базис $\{\sigma\xi_i\}_{\sigma \in \Pi}$, причем $\beta_i(\xi_i) = \chi_i$. Тогда $\hat{S} = \hat{S}_1 \oplus \hat{S}_2 \oplus \ldots \oplus \hat{S}_d$ — искомый П-модуль.

Пусть $\hat{S}^{(1)}$ и $\hat{S}^{(2)}$ — построенные описанным способом пермутационные П-модули для решеток $\hat{T}_1$ и $\hat{T}_2$ соответственно с помощью выбранных базисов $\{\alpha^{-1}(m_i\chi_i)\}$ и $\{\chi_i\}$, $\beta^{(1)} : \hat{S}^{(1)} \to \hat{T}_1$, $\beta^{(2)} : \hat{S}^{(2)} \to \hat{T}_2$ — соответствующие эпиморфизмы. Определим вложение $\alpha_s : \hat{S}^{(1)} \to \hat{S}^{(2)}$, которое достаточно задать на элементах $\xi_i^{(1)} \in \hat{S}^{(1)}$ $(i = 1, \ldots, d)$. Пусть $\alpha_s(\xi_i^{(1)}) = m_i\xi_i^{(2)}$, тогда следующая диаграмма

$$\begin{tikzcd} \hat{S}^{(1)} \arrow[r, "\alpha_s"] \arrow[d, "\beta^{(1)}"'] & \hat{S}^{(2)} \arrow[d, "\beta^{(2)}"'] \\ \hat{T}_1 \arrow[r, "\alpha"] & \hat{T}_2 \end{tikzcd}$$

коммутативна, а, значит, коммутативна и определяемая ею диаграмма

$$\begin{tikzcd} A(\hat{S}^{(1)}) \arrow[r, "\alpha_s"] \arrow[d, "\beta^{(1)}"'] & A(\hat{S}^{(2)}) \arrow[d, "\beta^{(2)}"'] \\ A(\hat{T}_1) \arrow[r, "\alpha"] & A(\hat{T}_2) \end{tikzcd} \tag{7.6}$$

для алгебр Хопфа стандартных целых моделей торов T_1, T_2, $S^{(1)}$, $S^{(2)}$.

Учитывая строгую плоскость данных $\mathcal{O}$-алгебр (теорема 1), получаем, что при умножении (7.6) на всякий $\mathcal{O}$-модуль она остается коммутативной, причем вертикальные стрелки остаются эпиморфизмами, а горизонтальные — мономорфизмами.

Пусть

$$\xi_i^{(1)} = u_{i0} + u_{i1}\pi + \ldots + u_{ie-1}\pi^{e-1}, \quad \xi_i^{(2)} = v_{i0} + v_{i1}\pi + \ldots + v_{ie-1}\pi^{e-1},$$

где $u_{ij} \in \mathcal{O}_{L_0} \otimes_{\mathcal{O}} A(\hat{S}^{(1)}),\ v_{ij} \in \mathcal{O}_{L_0} \otimes_{\mathcal{O}} A(\hat{S}^{(2)})$, тогда

$$A_{L_0}(\hat{S}^{(1)}) = \bigotimes_i \mathcal{O}_{L_0}[u_{i0}, \dots, u_{ie-1}, y_i^{-1}]; \quad A_{L_0}(\hat{S}^{(2)}) = \bigotimes_i \mathcal{O}_{L_0}[v_{i0}, \dots, v_{ie-1}, y_i^{-1}].$$

Найдем $\alpha_s(u_{ij})$ по модулю $\wp\mathcal{O}_{L_0}$, используя, что $\alpha_s(\xi_i^{(1)}) = (\xi_i^{(2)})^{m_i}$.

$$\begin{aligned}(\xi_i^{(2)})^{m_i} &= (v_{i0} + v_{i1}\pi + \ldots + v_{ie-1}\pi^{e-1})^{m_i} = \\ &= (v_{i0}^{m_i} + \wp v_0) + (m_i v_{i0}^{m_i-1} v_{i1} + \wp v_1)\pi + \ldots + \\ &+ (m_i v_{i0}^{m_i-1} v_{ik} + f_k(v_{i0}, \dots, v_{ik-1}) + \wp v_k)\pi^k + \ldots + \\ &+ (m_i v_{i0}^{m_i-1} v_{ie-1} + f_{e-1}(v_{i0}, \dots, v_{ie-2}) + \wp v_{e-1})\pi^{e-1},\end{aligned}$$

здесь $f_k(v_{i0}, \dots, v_{ik-1})$ — однородный многочлен степени m_i, не содержащий монома $v_{i0}^{m_i}$, тогда

$$\begin{aligned}\alpha_s(u_{i0}) &\equiv v_{i0}^m \pmod{\wp_{L_0}}, \\ \alpha_s(u_{ij}) &\equiv m_i v_{i0}^{m_i-1} v_{ij} + f_j(v_{i0}, \dots, v_{ij-1}) \pmod{\wp_{L_0}}.\end{aligned} \tag{7.7}$$

Домножим теперь диаграмму (7.6) тензорно на r_{L_0}:

$$\begin{array}{ccc} r_{L_0} \otimes A(\hat{S}^{(1)}) & \xrightarrow{1\otimes\alpha_s = \bar{\alpha}_s} & r_{L_0} \otimes A(\hat{S}^{(2)}) \\ {\scriptstyle \bar{\beta}^{(1)}}\big\downarrow & & {\scriptstyle \bar{\beta}^{(2)}}\big\downarrow \\ r_{L_0} \otimes A(\hat{T}_1) & \xrightarrow{1\otimes\alpha = \bar{\alpha}} & r_{L_0} \otimes A(\hat{T}_2) \end{array}$$

Тогда имеем разложение $\overline{A}_{L_0}(\hat{S}^{(i)}) = r_{L_0} \otimes A_{L_0}(\hat{S}^{(i)}) = \overline{A}_i^{(1)} \otimes_{r_{L_0}} \overline{A}_i^{(2)}$, где

$$\overline{A}_1^{(2)} = \bigotimes_i r_{L_0}[t_{i1}, \dots, t_{ie-1}], \quad \overline{A}_2^{(2)} = \bigotimes_i r_{L_0}[s_{i1}, \dots, s_{ie-1}], \quad t_{ij} = u_{ij} u_{i0}^{-1},\ s_{ij} = v_{ij} v_{i0}^{-1}.$$

С учетом формул (7.7) получаем, что

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}_s(t_{ij}) &= (\bar{\alpha}_s(u_{i0}))^{-1}\, \bar{\alpha}_s(u_{ij}) = v_{i0}^{-m_i}(m_i v_{i0}^{m_i-1} v_{ij} + f_j(v_{i0}, \dots, v_{ij-1})) = \\ &= m_i v_{ij} v_{i0}^{-1} + f_j(v_{i1} v_{i0}^{-1}, \dots, v_{ij-1} v_{i0}^{-1}) = m_i s_{ij} + f_j(s_{i1}, \dots, s_{ij-1}).\end{aligned}$$

Так как $p = \operatorname{char} r_{L_0} \nmid m_i$, то $\bar{\alpha}_s(t_{ij})$ порождают алгебру Хопфа $\overline{A}_2^{(2)}$, то есть $\bar{\alpha}_s(\overline{A}_1^{(2)}) = \overline{A}_2^{(2)}$. Унипотентная часть U_1 редукции $\overline{X}_1$ тора $T_1 \otimes_k L_0$ определяется r_{L_0}-алгеброй Хопфа $\bar{\beta}^{(1)}(\overline{A}_1^{(2)})$. Унипотентная часть U_2 редукции X_2 тора $T_2 \otimes_k L_0$ определяется r_{L_0}-алгеброй Хопфа

$$\bar{\beta}^{(2)}(\overline{A}_2^{(2)}) = \bar{\beta}^{(2)}(\bar{\alpha}_s(\overline{A}_1^{(2)})) = \bar{\alpha}(\bar{\beta}^{(1)}(\overline{A}_1^{(2)})) \cong \bar{\beta}^{(1)}(\overline{A}_1^{(2)}).$$

Итак, унипотентные части U_1 и U_2 редукций торов $T_1 \otimes_k L_0$ и $T_2 \otimes_k L_0$ изоморфны. Так как L_0 — неразветвленное расширение основного поля k, то изоморфны также унипотентные части редукций торов T_1 и T_2. Лемма 1 доказана.

8. Редукция торов в случае слабого ветвления поля разложения

Пусть теперь минимальное поле разложения L тора T слабо разветвлено над k, т. е. индекс ветвления e взаимно прост с $p = \operatorname{char} r_k$. Тогда известна структура расширения L/k и его группы Галуа [10]. В этом случае максимальное неразветвленное расширение L_0 поля k в L содержит первообразный корень e-й степени из единицы ζ_e и $L = L_0(c^{\frac{1}{e}})$, где $v_{L_0}(c) = 1$. Подгруппа инерции Δ есть циклическая группа порядка e. Как и ранее, будем рассматривать тор $T \otimes_k L_0$. Если рассматривать Π-модуль рациональных характеров $\hat{T}$ как Δ-модуль, то мы получим модуль рациональных характеров тора $T \otimes_k L_0$.

Пусть $\mathbb{Z}_p = \left\{\frac{m}{n},\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N},\ p \nmid n\right\}$ — локальное кольцо вычетов кольца $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_p \subset \mathbb{Q}$, $\hat{T}$ — $\mathbb{Z}[\Delta]$-модуль конечного $\mathbb{Z}$-ранга без кручения, где $\Delta = <\delta>$ — циклическая группа, $|\Delta| = e$, $(p, e) = 1$, $\hat{T}_p = \hat{T} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$, $\hat{T} \subset \hat{T}_p$.

Лемма 2. $\mathbb{Z}_p[\Delta]$-модуль $\hat{T}_p$ раскладывается в прямую сумму неприводимых $\mathbb{Z}_p[\Delta]$-модулей.

Доказательство. Пусть $r = \operatorname{rank} \hat{T}$. Проведем доказательство индукцией по рангу r модуля $\hat{T}$. При $r = 1$ справедливость леммы очевидна.

Пусть для $r < d$ утверждение доказано. Рассмотрим $\mathbb{Z}[\Delta]$-модуль $\hat{T}$ ранга d. Пусть $\hat{T}_{\mathbb{Q}} = \hat{T} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ — $\mathbb{Q}[\Delta]$-модуль, где $\hat{T} \subset \hat{T}_p \subset \hat{T}_{\mathbb{Q}}$. По теореме Машке, $\hat{T}_{\mathbb{Q}} = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} \hat{S}_i$, где $\hat{S}_i$ — неприводимый $\mathbb{Q}[\Delta]$-модуль, $\hat{S}_i \cong \mathbb{Q}[x] \,/\, (\Phi_i(x))$, где $\Phi_i(x)$ — круговой многочлен-делитель $x^e - 1$ и $\delta(x^i) = x^{i+1} \pmod{x^e - 1}$. Пусть $\deg \Phi_1(x) = s$, ненулевой элемент $e_1 \in \hat{T} \bigcap \hat{S}_1$ не является кратным в $\hat{T}$, тогда $e_1, \delta e_1, \ldots, \delta^{s-1} e_1$ — базис модуля $\hat{S}_1$. Рассмотрим в $\hat{T}$ $\mathbb{Z}[\Delta]$-подмодуль $\hat{T}'$, порожденный элементами $e_1, \ldots, \delta^{s-1} e_1$. По теореме о структуре подгруппы конечно порожденной абелевой группы существует базис $\mathbb{Z}$-модуля $\hat{T}$ $g_1, g_2, \ldots, g_s; g_{s+1}, \ldots, g_d$ такой, что $g_1, m_2 g_2, \ldots, m_s g_s$ — базис $\mathbb{Z}$-модуля $\hat{T}'$, $m_i \in \mathbb{N}$. Тогда $\mathbb{Z}_p$-модуль $\hat{T}_p$ допускает представление

$$\hat{T}_p = \hat{T}_1 \oplus \hat{T}_2, \tag{8.1}$$

где $\hat{T}_1 \subset \hat{T}_p$ порожден над $\mathbb{Z}_p$ элементами $g_1, \ldots, g_s$, а $\hat{T}_2 \subset \hat{T}_p$ — элементами $g_{s+1}, \ldots, g_d$. Заметим, что $\mathbb{Z}_p$-модуль $\hat{T}_2$, вообще говоря, не является Δ-инвариантным.

Рассмотрим $\mathbb{F}_p[\Delta]$-модуль $\hat{T}_1 \,/\, p\hat{T}_1$, $\dim_{\mathbb{F}_p} \hat{T}_1 \,/\, p\hat{T}_1 = s$. Так как числа $p = \operatorname{char} \mathbb{F}_p$ и $|\Delta| = e$ взаимно просты, то, по теореме Машке, линейное пространство $\hat{T}_1 / p\hat{T}_1$ распадается в прямую сумму неприводимых $\mathbb{F}_p[\Delta]$-модулей, причем это разложение однозначно определяется разложением редукции $\overline{\Phi_1}(x)$ по модулю p на неприводимые множители, а именно пусть $\overline{\Phi_1}(x) = u_1 \ldots u_k$, где $u_j \in \mathbb{F}_p[x]$ — неприводимые множители, причем $u_i \neq u_j$, т. к. $\overline{\Phi_1}(x)$ — сепарабельный многочлен в $\mathbb{F}_p[x]$, тогда $\hat{T}_1 \,/\, p\hat{T}_1 = \bigoplus\limits_{j=1}^{k} \mathbb{F}_p[x] \,/\, (u_j)$, причем структура Δ-модуля на $\mathbb{F}_p[x] \,/\, (u_j) = <1 = \overline{u_j}, x, \ldots, x^{\deg u_j - 1}>$ определяется соотношением $\delta(\overline{u_j}) = x$. Рассмотрим элемент $\overline{u} = \overline{u_1} + \ldots + \overline{u_k} \in \hat{T}_1 \,/\, p\hat{T}_1$. Докажем, что $\overline{u}, \delta\overline{u}, \ldots, \delta^{s-1}\overline{u}$ — базис пространства $\hat{T}_1 \,/\, p\hat{T}_1$. Достаточно доказать линейную независимость данных элементов.

Пусть $a_0\overline{u} + a_1\delta\overline{u} + \ldots + a_{s-1}\delta^{s-1}\overline{u} = f(\delta)\overline{u} = \overline{0}$, $a_i \in \mathbb{F}_p$, $f(\delta) \in \mathbb{F}_p[\Delta]$, тогда $f(\delta)\overline{u} = f(\delta)\overline{u_1} + \ldots + f(\delta)\overline{u_k} = \overline{0}$, что влечет систему равенств $f(\delta)\overline{u_i} = \overline{0}$

$(i = 1, \ldots, k)$. Последнее означает, что $f(x) \in \mathbb{F}_p[x]$ есть кратное многочленов $u_1, u_2, \ldots, u_k \in \mathbb{F}_p[x]$, то есть многочлен $\overline{\Phi_1}(x)$ делит $f(x)$, но $\deg \overline{\Phi_1}(x) = s > \deg f$, значит, $f = 0$, следовательно, $a_i = 0$ $(i = 1, \ldots, s-1)$. Выразим старый базис пространства $\hat{T}_1 \,/\, p\hat{T}_1$ через новый:

$$\overline{g_i} = a_{0i}\overline{u} + a_{1i}\delta\overline{u} + \ldots + a_{s-1i}\delta^{s-1}\overline{u} = f_i(\delta)\overline{u}, \tag{8.2}$$

$a_{ij} \in \mathbb{F}_p$. Пусть теперь $a_{ij} \in \mathbb{Z}$ — некоторый представитель класса вычетов a_{ij}, рассматриваемого как элемент поля $\mathbb{F}_p$, тогда, возвращаясь к модулю $\hat{T}_1$, перепишем (8.2) в виде

$$g_i + p\left(\sum \alpha_k g_k\right) = a_{0i}u + \ldots + a_{s-1i}\delta^{s-1}u \tag{8.3}$$

или в матричном виде

$$(g_1, \ldots, g_s)B = (u, \delta u, \ldots, \delta^{s-1}u)A. \tag{8.4}$$

Число $\det B$ сравнимо с единицей по модулю p, поэтому окончательно получаем, что

$$(g_1, \ldots, g_s) = (u, \delta u, \ldots, \delta^{s-1}u)T,$$

где $T \in \mathrm{GL}\,(s, \mathbb{Z}_p)$.

Итак, доказано, что $\mathbb{Z}_p[\Delta]$-модуль $\hat{T}_1$ — неприводимый модуль с базисом $u, \delta u, \ldots, \delta^{s-1}u$, т. е. $\hat{T}_1 \cong \mathbb{Z}_p[x] \,/\, (\Phi_1(x))$.

Далее действуем по аналогии с доказательством теоремы Машке, приведенном в [13]. Используя разложение (8.1), введем оператор проектирования $P : \hat{T}_p \to \hat{T}_2$, определяемый соотношением $P(v) = u''$ для всякого $v = u' + u''$. Затем вводим "усредненный" оператор

$$P_\Delta = \frac{1}{|\Delta|}\sum_{m=1}^{e} \delta^m P \delta^{-m}$$

(деление на $|\Delta|$ возможно по условию). Пусть теперь $\hat{T}'_p = P_\Delta(\hat{T}_p)$, тогда, повторяя рассуждения, приведенные в [13], убеждаемся в том, что $\hat{T}'_p$ есть $\mathbb{Z}_p[\Delta]$-модуль, причем $\hat{T}_p = \hat{T}_1 \oplus \hat{T}'_p$, $\operatorname{rank}_{\mathbb{Z}_p}\hat{T}'_p = d - s < d$, следовательно, по предположению индукции $\hat{T}'_p = \hat{T}_2 \oplus \ldots \oplus \hat{T}_n$, где T_i — неприводимые $\mathbb{Z}_p[\Delta]$-модули. Лемма 2 доказана полностью.

Теорема 4. Редукция всякого k-тора T со слаборазветвленным минимальным полем разложения L имеет гладкую связную унипотентную часть.

Доказательство. Пусть, как обычно, $k \subset L_0 \subset L$ — башня полей, где L_0 — максимальное неразветвленное подполе в L. Рассмотрим тор $T_{L_0} = T \otimes_k L_0$, модуль рациональных характеров которого есть $\mathbb{Z}[\Delta]$-модуль $\hat{T}$, $\Delta = \mathrm{Gal}\,(L/L_0)$, $\Delta = <\sigma>$, $|\Delta| = e$, $(\mathrm{char}\, r_k, e) = 1$.

Шаг 1. Рассмотрим важный частный случай, когда T_{L_0} вкладывается в простейший тор $S = R_{F/L_0}(G_m)$, другими словами, мы имеем точную последовательность Δ-модулей:

$$0 \to \hat{T}_1 \to \hat{S} \xrightarrow{\beta} \hat{T} \to 0, \tag{8.5}$$

причем мы можем считать, что $F = L$, так как имеем очевидный эпиморфизм $\mathbb{Z}[\Delta] \to \hat{S}$. Эпиморфизм β индуцирует замкнутое вложение целых моделей $X_{L_0}(T_{L_0}) \to X_{L_0}(S)$ или эпиморфизм $\mathcal{O}_{L_0}$-алгебр: $\beta_{\mathcal{O}} : A_{L_0}(\hat{S}) \to A_{L_0}(\hat{T})$. Пусть $I = \mathrm{Ker}\,\beta_{\mathcal{O}}$, тогда имеем точную последовательность $\mathcal{O}_{L_0}$-модулей:

$$0 \to I \to A_{L_0}(\hat{S}) \to A_{L_0}(\hat{T}) \to 0. \tag{8.6}$$

Так как $\mathcal{O}_{L_0}$-модули $A_{L_0}(\hat{T})$ и $A_{L_0}(\hat{S})$ строго плоские (теорема 1), то последовательность

$$0 \to r_{L_0} \otimes_{\mathcal{O}_{L_0}} I \to \overline{A}_{L_0}(\hat{S}) \to \overline{A}_{L_0}(\hat{T}) \to 0. \tag{8.7}$$

также точна [11].

Расширение L/L_0 вполне и слабо разветвлено. Тогда $L = L_0\left(\pi^{\frac{1}{e}}\right)$, где $v_{L_0}(\pi) = 1$ и L содержит все корни степени e из единицы [10]. Причем если $\Delta = <\sigma>$, то $\sigma(\pi) = \zeta_e \pi$, где ζ_e — первообразный корень из единицы степени e. Изучим эпиморфизм $\beta : \hat{S} \to \hat{T}$. $\hat{S} = \mathbb{Z}[\Delta] \cong \mathbb{Z}[x]/(x^e - 1)$. Пусть $\chi_0 = 1, \chi_2 = x, \ldots, \chi_{e-1} = x^{e-1}$ — пермутационный базис модуля $\hat{S}$. Тогда $\sigma(\chi_i) = x^{i+1} = \chi_{i'}$, где $i' \equiv i + 1(e)$. В этом случае П-модуль $\hat{T} \cong \mathbb{Z}[x]/(f(x))$, где $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ — унитарный делитель многочлена $x^e - 1$, причем мы можем считать, что $f(x)$ — круговой многочлен. Пусть $f(x) = x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $a_i \in \mathbb{Z}, d > 1$. Тогда элемент $\chi = \chi_0^{a_0}\chi_1^{a_1} \ldots \chi_{d-1}^{a_{d-1}}\chi_d$ принадлежит ядру β. Вообще, в качестве базиса $\operatorname{Ker}\beta$ можно взять элементы $\chi, \sigma\chi, \ldots, \sigma^{e-d-1}\chi$. Как известно, коэффициенты разложения (1.2) элементов $\chi - 1, \sigma\chi - 1, \ldots, \sigma^{e-d-1}\chi - 1$ кольца $L[\hat{S}]$ принадлежат идеалу I. Указанные коэффициенты для характеров $\sigma^k\chi - 1 = \sigma^k(\chi - 1)$ $(k = 1, \ldots, e-d-1)$ линейно над $\mathcal{O}_{L_0}$ выражаются через коэффициенты разложения (1.2) для $\chi - 1$.

Так как нас интересует редукция тора T_{L_0}, а, значит, и идеал редукции $\bar{I} = r_{L_0} \otimes_{\mathcal{O}_{L_0}} I$, то опишем коэффициенты разложения $\chi - 1$ с точностью до слагаемых, кратных $\wp$.

Пусть разложение (1.3) характера χ_0 имеет вид $\chi_0 = z_0 + z_1\pi + + \ldots + z_{e-1}\pi^{e-1}$, тогда $\chi_k = \sigma^k\chi_0 = z_0 + z_1\zeta_e^k\pi + \ldots + z_{e-1}\zeta_e^{k(e-1)}\pi^{e-1}$. Пусть $a = -\min\{a_i, 0\}$, $a \geq 0$, тогда

$$\chi = \frac{(\chi_0 \cdots \chi_{e-1})^a \chi_0^{a_0} \cdots \chi_{d-1}^{a_{d-1}}\chi_d}{(\chi_0 \cdots \chi_{e-1})^a} = \frac{\chi_0^{a_0+a}\chi_1^{a_1+a} \cdots \chi_{d-1}^{a_{d-1}+a}\chi_d^{a+1}\chi_{d+1}^a \cdots \chi_{e-1}^a}{y^a}.$$

Положим $a_d = 1$ и $a_k = 0$, если $d < k \leq e-1$, тогда $\chi = \dfrac{\prod\limits_i \chi_i^{a_i+a}}{y^a}$, $a_i + a \geq 0$, или более детально

$$\chi = \frac{1}{y^a}\prod(z_0 + z_1\zeta_e^i\pi + \ldots + z_{e-1}\zeta_e^{i(e-1)}\pi^{e-1})^{a_i+a}. \tag{8.8}$$

Пусть $s = \sum a_i$. Выполняя элементарные преобразования в (8.8), находим коэффициенты разложения характера χ по базису $1, \pi, \ldots, \pi^{e-1}$ по модулю $\wp$:

$$f_\chi^{(1)} \equiv \frac{1}{y^a} z_0^{ae+s} \pmod{\wp}, \tag{8.9}$$

$$\begin{aligned} f_\chi^{(2)} &\equiv \tfrac{1}{y^a} z_0^{ae+s-1} z_1 \left((a_0 + a)\zeta_e^0 + (a_1 + a)\zeta_e^1 + \ldots + (a_{e-1} + a)\zeta_e^{e-1}\right) = \\ &= \tfrac{1}{y^a}\left(\sum_{i=0}^{e-1}(a_i + a)\zeta_e^i\right) z_0^{ae+s-1} z_1 \pmod{\wp}, \end{aligned} \tag{8.10}$$

$$f_\chi^{(k)} \equiv \frac{1}{y^a}\left(\sum_{i=0}^{e-1}(a_i + a)\left(\zeta_e^k\right)^i\right) z_0^{ae+s-1} z_k + f^{(k)}(z_0, z_1, \ldots, z_{k-1}) \pmod{\wp}. \tag{8.11}$$

Целое число $\alpha_k = \sum\limits_{i=0}^{e-1}(a_i + a)\left(\zeta_e^k\right)^i = \sum\limits_{i=0}^{e-1} a_i\left(\zeta_e^k\right)^i + a\sum\limits_{i=0}^{e-1}\left(\zeta_e^k\right)^i = f\left(\zeta_e^k\right)$ есть ноль для тех $k > 0$, для которых ζ_e^k является корнем многочлена $f(x)$. Многочлен $x^e - 1$ сепарабелен в $r_{L_0}[x]$, так как $(e, p) = 1$, значит, класс вычетов $\overline{f\left(\zeta_e^k\right)}$ числа $f\left(\zeta_e^k\right) \in \mathcal{O}_{L_0}$ нулевой в том и только в том случае, когда ζ_e^k — корень многочлена $f(x)$.

Перейдем к редукции тора T_{L_0}. Имеем точную последовательность

$$0 \to \bar{I} \xrightarrow{\alpha} r_{L_0}[z_0, z_0^{-1}] \otimes r_{L_0}[t_1, \ldots, t_{e-1}] \xrightarrow{\beta} \overline{A(\hat{T})} \to 0, \quad (8.12)$$

где $t_k = z_0^{-1} z_k$, тогда $\beta(z_0), \beta(t_1), \ldots, \beta(t_{e-1})$ порождают алгебру $\overline{A(\hat{T})}$. Итак, $A_0 = r_{L_0}[z_0, z_0^{-1}]$ — подалгебра Хопфа в алгебре $\overline{A(\hat{S})}$. Рассмотрим точную последовательность

$$0 \to \beta(A_{0+}) \to \overline{A(\hat{T})} \to \overline{A_1(\hat{T})} \to 0, \quad (8.13)$$

где $\beta(A_{0+}) = A_{0+}/(\alpha(\bar{I}) \cap A_{0+})$, $A_{0+} = (z_0 - 1)$ — идеал Хопфа в $\overline{A(\hat{S})}$. Сравнение (8.9) показывает, что $\alpha(\bar{I})$ содержит элемент $z_0^s - 1$. По нашему предположению многочлен $f(x)$ неприводим, значит, $s = f(1) \neq 0$.

Последовательности (8.13) соответствует точная последовательность групп

$$1 \to \overline{X_1} \to \overline{X} \to R \to 1,$$

где R — подгруппа в $G_m = \operatorname{Spec} r_{L_0}[z_0, z_0^{-1}]$. В нашем случае $s \neq 0$ и $\dim R = 0$.

Напомним, что для r_{L_0}-алгебры $A_1 = r_{L_0}[t_1, \ldots, t_{e-1}]$ при доказательстве теоремы 2 мы установили следующую процедуру получения фактор-алгебр:

$$0 \to R_k \to A_k \xrightarrow{\gamma_k} A_{k+1} \to 0 \ (k = 1, \ldots, e-1), \quad (8.14)$$

где $R_k = (t_k)$ есть идеал Хопфа в A_k, а операторы Хопфа действуют на образующих t_k по законам (6.4), $\operatorname{Spec} r_{L_0}[t_k] = G_a$, $A_k = r_{L_0}[t_k, \ldots, t_{e-1}]$.

Определим аналогичную процедуру для алгебры $A_1(\hat{T}) = \beta(A_1)$

$$0 \to \beta(R_k) \to \beta(A_k) \to \beta(A_{k+1}) \to 0 \ (k = 1, \ldots, e-1). \quad (8.15)$$

Причем $\beta(R_k) = R_k/(\gamma_{k-1}(\bar{I}) \cap R_k)$. Идеал $\gamma_{k-1}(\bar{I})$ содержит элемент вида $\overline{f(\zeta_e^k)} t_k$. Если $\overline{f(\bar{\zeta}_e^k)} \neq 0$, то $\beta(R_k) = \{0\}$, а значит, в двойственной к (8.15) последовательности $1 \to \overline{X_{k+1}} \to \overline{X_k} \to \overline{R_k} \to 1$ группа $\overline{R_k}$ тривиальная.

Итак, мы имеем композиционный ряд для группы $\overline{X_1}$: $\overline{X_1} \supset \overline{X_2} \supset \ldots \supset \overline{X_e} = 1$. Фактор-группы $\overline{R_k} = \overline{X_k}/\overline{X_{k+1}}$ являются подгруппами элементарной аддитивной группы G_a. Причем $\overline{R_k} = \{1\}$ в том и только в том случае, когда ζ_e^k не является корнем уравнения $f(x) = 0$. Осталось доказать, что $\overline{R_k} = G_a$, если ζ_e^k является корнем уравнения $f(x) = 0$. Этих корней — d. Значит, для группы $\overline{X_1}$ $\dim \overline{X_1} \leq e - (e - d) = d$. С другой стороны, $d = \dim \overline{X} = \dim(\overline{X_1} \times R) = \dim \overline{X_1}$, так как $\dim R = 0$. Это означает, что если ζ_e^k является корнем многочлена $f(x)$, то $\overline{R_k} = G_a$, так как $\dim \overline{R_k} = 1$.

Итак, редукция $\overline{X} = R \times_{r_{L_0}} \overline{X_1}$, где R – мультипликативная часть, а $\overline{X_1}$ – гладкая связная унипотентная часть.

Пусть теперь $\overline{X}_k$ — редукция k-тора T, U_k — ее унипотентная часть, которая есть форма унипотентной части редукции тора $T \otimes_k L_0$. Так как поле r_k совершенное, то U_k — гладкая связная унипотентная группа [12].

Шаг 2. Если теперь Δ-модуль $\hat{T}$ есть прямая сумма Δ-модулей вида $\mathbb{Z}[x]/f_i(x)$, где $f_i(x)$ — круговой многочлен, делящий многочлен $x^e - 1$, то редукция $\overline{X}_{L_0} = \operatorname{Spec} \overline{A}_{L_0}(\hat{T})$ является прямым произведением r_{L_0}-групп, описанных на 1-м шаге доказательства, значит, утверждение теоремы верно и для r_k-торов T с модулем рациональных характеров $\hat{T}$.

Шаг 3. Пусть T — произвольный k-тор со слаборазветвленным полем разложения, $\hat{T}$ — модуль рациональных характеров тора T. По лемме 2 $\mathbb{Z}_p[\Delta]$-модуль $\hat{T}_p = \hat{T} \otimes \mathbb{Z}_p$ допускает разложение $\hat{T}_p = \hat{T}_{p1} \oplus \hat{T}_{p2} \oplus \ldots \oplus \hat{T}_{ps}$, где $\hat{T}_{p_i} \cong \mathbb{Z}_p[x]/(f_i(x))$, $f_i(x)$ — круговой многочлен-делитель $x^e - 1$, причем найдутся такие элементы $u_1, \ldots, u_s \in \hat{T}$, что $\hat{T}_i$ порождается над $\mathbb{Z}_p$ элементами $\sigma^k u_i$, где σ — образующая группы Δ. Таким образом, решетка $\hat{T}$ содержит подрешетку $\hat{T}'$, порожденную элементами $\sigma^k u_i$, которая допускает разложение $\hat{T}' = \hat{T}_1 \oplus \hat{T}_2 \oplus \ldots \oplus \hat{T}_s$, где $\hat{T}_i \cong \mathbb{Z}[x]/(f_i(x))$, причем $[\hat{T} : \hat{T}'] = m$ и натуральное m взаимно просто с p. По лемме 1 унипотентные части редукций L_0-торов $T \otimes_k L_0$ и T' совпадают и являются гладкими связными унипотентными группами. Как ранее отмечалось, та же характеристика справедлива и для унипотентной части редукции $\overline{X}$ k-тора T. Теорема 4 доказана полностью.

Следствие. Если минимальное поле разложения L k-тора T слабо разветвлено над k, то редукция стандартной целой модели тора T *хорошая.*

Доказательство. Пусть $\bar{X} = \operatorname{Spec} \bar{A}(\hat{T})$ — редукция стандартной целой модели тора T, тогда $\overline{X} = \bar{R} \times_{r_k} \bar{U}$, где $\bar{U}$ — гладкая связная унипотентная часть редукции $\bar{X}$ (по теореме 4), а $\bar{R}$ — мультипликативная часть, $\bar{R} = \operatorname{Spec}(r_{L_0}[\hat{T}/I\hat{T}])^{\Pi}$, связная компонента $\bar{R}^0$ есть r_k-тор, причем фактор-группа $\bar{R}/\bar{R}^0$ двойственна к конечному модулю $H^{-1}(\Delta, \hat{T})$. Так как простое число p не делит $e = |\Delta|$, то схема $\bar{R}/\bar{R}^0$ является приведенной. Что и требовалось доказать.

9. Примеры плохой редукции

До сих пор все изученные нами торы имели гладкую связную унипотентную часть редукции стандартной целой модели, допускающую композиционный ряд, факторы которого изоморфны элементарной одномерной унипотентной группе $G_{a,k}$. Далее будут приведены примеры редукций торов малой размерности, унипотентная часть которых не является приведенной.

Пусть T — 2-мерный k-тор с группой рациональных характеров $\hat{T} = <\xi_1, \xi_2>$ и минимальным полем разложения L, $\Pi = \operatorname{Gal}(L/k)$. Группа Π действует на $\mathbb{Z}$-модуле $\hat{T}$, таким образом, мы имеем точное представление $\varphi : \Pi \to \operatorname{GL}(2, \mathbb{Z})$. Известно [14], что существуют две максимальные конечные подгруппы в $\operatorname{GL}(2, \mathbb{Z})$ с точностью до сопряженности $W_1 \cong D_4$ и $W_2 \cong D_6$.

Изучим редукцию k-тора T такого, что соответствующая группа разложения есть максимальная группа W_1.

Группа $\Pi = <\sigma, \tau : \sigma^4 = \tau^2 = (\sigma\tau)^2 = 1>$ действует на $\hat{T}$ по правилу: $\tau(\xi_1) = \xi_1$, $\tau(\xi_2) = \xi_2^{-1}, \sigma(\xi_1) = \xi_2, \sigma(\xi_2) = \xi_1^{-1}$. Таким образом, мы имеем соотношения

$$\xi_1 \sigma^2(\xi_1) = 1, \; \xi_2 \sigma^2(\xi_2) = 1 \tag{9.1}$$

норменного типа.

Построим эпиморфизм $\hat{S} \xrightarrow{\beta} \hat{T}$ Π-модулей, где $\hat{S} = \mathbb{Z}[\Pi/<\tau>]$ — пермутационный Π-модуль ранга 4. Пусть $\{e_i\}_{i=1}^4$ — пермутационный базис $\hat{S}$ такой, что $\beta(e_1) = \xi_1$, $\beta(e_2) = \xi_2$, $\beta(e_3) = \xi_1^{-1}$, $\beta(e_4) = \xi_2^{-1}$. Таким образом, $\operatorname{Ker} \beta = <\chi_1 = e_1 e_3, \; \chi_2 = e_2 e_4>$. Подгруппа $\pi = <\tau>$ суть стабилизатор e_1, тогда тор $S = R_{F_4/k}(G_m)$, где $F_4 = L^{\pi}$, $(F_4 : k) = 4$. Пусть $\omega_1, \; \omega_2, \; \omega_3, \; \omega_4$ — целый базис F_4/k, тогда мы имеем разложение $e_1 = z_0\omega_1 + z_1\omega_2 + z_2\omega_3 + z_3\omega_4$ и $A(\hat{S}) = \mathcal{O}[z_0, z_1, z_2, z_3, y^{-1}]$. Соотношения (9.1) норменного типа позволяют рассмотреть следующее аффинное представление тора T: $T = R_{F_2/k}(R^{(1)}_{F_4/F_2}(G_m))$, где $k \subset F_2$, $(F_2 : k) = 2$, $F_2 = F_4^{<\sigma^2>}$.

Пусть char $r_k = 2$. Рассмотрим случай, когда расширение L/k вполне разветвлено. Поле разложения L есть поле разложения многочлена $x^4 - 2$. Пусть $\pi \in L$ — корень этого многочлена, тогда $F_4 = k(\pi)$ и $F_2 = k(\pi^2)$. Мы имеем разложение e_1, соответствующее целому базису $1, \pi, \pi^2, \pi^3$ поля F/k : $e_1 = z_0 + z_1\pi + z_2\pi^2 + z_3\pi^3$. Образующие (3.3) принимают вид $(z_0 + z_2\pi^2)^2 - \pi^2(z_1 + z_3\pi^2)^2 = 1$. Следовательно, $\overline{A}$ имеет вид $\overline{A} = r_k[z_0, z_1, z_2, z_3]/(z_0^2 - 1, z_1^2) = r_k[z_0]/(z_0-1)^2 \otimes_{r_k} r_k[z_1]/(z_1^2) \otimes_{r_k} r_k[z_2, z_3]$. Тогда

$$\overline{X}_1 = \mu_2 \times_{r_k} \alpha_2 \times_{r_k} U,$$

где $\alpha_2 = \operatorname{Spec} r_k[z_1]/(z_1^2)$ есть элементарная радикальная унипотентная подгруппа [12].

Рассмотрим теперь случай k-тора T с группой разложения $W_2 \cong D_6$. Группа $\Pi = D_6 = <\sigma, \tau : \sigma^6 = \tau^2 = (\sigma\tau)^2 = 1>$ действует на модуле $\hat{T}$ по правилу $\tau(\xi_1) = \xi_1, \tau(\xi_2) = \xi_1\xi_2^{-1}, \sigma(\xi_1) = \xi_2, \sigma(\xi_2) = \xi_1^{-1}\xi_2$, и мы имеем соотношения

$$\xi_{1,2}\sigma^2(\xi_{1,2})\sigma^4(\xi_{1,2}) = 1, \quad \xi_{1,2}\sigma^3(\xi_{1,2}) = 1 \tag{9.2}$$

норменного типа.

Используя эпиморфизм Π-модулей $\hat{S} \xrightarrow{\beta} \hat{T}$, где $\hat{S} = \mathbb{Z}[\Pi/\tau]$, мы можем повторить процедуру построения редукции $\overline{X}$: $\overline{X} = \operatorname{Spec} \overline{A}(\hat{S})/\bar{I}$, где $\bar{I}$ есть редукция по модулю $\wp$ идеала I, порожденного коэффициентами разложения (1.2) элементов $e_1e_3e_5 - 1, e_2e_4e_6 - 1, e_1e_4 - 1$, $e_2e_5 - 1$, $e_3e_6 - 1$ алгебры Хопфа $A(\hat{S})$, где $\{e_i\}$ есть пермутационный базис модуля $\hat{S}$. Тор $S = R_{F_6/k}(G_m)$, поле $F_6 = L^{<\tau>}$, $(F_6 : k) = 6$. Пусть $\{\omega_k\}$ — целый базис F_6/k, тогда мы имеем разложение характера $e_1 = \sum z_i\omega_i$ и $A(\hat{S}) = \mathcal{O}[z_0, \ldots, z_5, y^{-1}]$. Соотношения (9.2) позволяют рассмотреть следующее аффинное представление тора T :

$$T = R_{F_2/k}(R^{(1)}_{F_6/F_2}(G_m)) \cap R_{F_3/k}(R^{(1)}_{F_6/F_3}(G_m)),\ k \subset F_2 \subset F_6,\ k \subset F_3 \subset F_6,$$

$(F_6 : F_3) = (F_2 : k) = 2, (F_6 : F_2) = (F_3 : k) = 3, F_2 = F_6^{<\sigma^2>}, F_3 = F_6^{<\sigma^3>}$.

Пусть $\operatorname{char} r_k = 2$. Рассмотрим случай, когда расширение L/k вполне разветвлено. Поле L есть поле разложения многочлена $x^6 - 2$. Пусть $\pi \in L$ — корень этого многочлена, тогда $F_6 = k(\pi)$, $F_3 = k(\pi^2), F_2 = k(\pi^3)$. Вычисляя идеал редукции $\bar{I}$, приходим к равенству $\bar{I} = (z_0 - 1, z_1^2, z_2^2, z_3)$. Отсюда получаем, что редукция $\overline{A}$ имеет вид $\overline{A} = r_k[z_0]/(z_0 - 1) \otimes_{r_k} r_k[z_1]/(z_1^2) \otimes_{r_k} r_k[z_1]/(z_2^2) \otimes_{r_k} r_k[z_4, z_5]$. Тогда

$$\overline{X}_1 = \alpha_2 \times_{r_k} \alpha_2 \times_{r_k} U,$$

где U — гладкая унипотентная группа.

Пусть теперь $\operatorname{char} r_k = 3$. Пусть L/k вновь вполне разветвлено. Поле разложения L есть поле разложения многочлена $x^6 - 3$. Пусть $\pi \in L$ есть корень этого многочлена, тогда $F_6 = k(\pi)$, $F_3 = k(\pi^2)$ и $F_2 = k(\pi^3)$. Идеал $\bar{I}$ принимает вид $\bar{I} = (z_0 - 1, z_1^3, z_2, z_4)$. Тогда $\overline{A} = r_k[z_0]/(z_0 - 1) \otimes_{r_k} r_k[z_1]/(z_1^3) \otimes_{r_k} r_k[z_3, z_5]$. В результате получаем

$$\overline{X}_1 = \alpha_3 \times_{r_k} U,$$

где U есть гладкая унипотентная группа.

Окончательно собирая вместе все изученные в данной статье факты касательно редукции стандартной целой модели алгебраического тора, получаем следующий результат.

Основная теорема. Пусть T — произвольный k-тор, разложимый над полем L, e — индекс ветвления расширения L/k, $p = \mathrm{char}\ r_k$, тогда

1) если $e = 1$, то тор T имеет *очень хорошую* редукцию;

2) если $e > 1$ и $p \nmid e$, то есть расширение L/k слабо разветвлено, то редукция тора T *хорошая* с нетривиальной гладкой связной унипотентной частью;

3) если $e > 1$ и $p \mid e$, то тор T может иметь как *хорошую*, так и *плохую* редукцию.

Автор глубоко признателен Валентину Евгеньевичу Воскресенскому за внимательное руководство данной работой, а также Кнутовой Елене Михайловне за неоценимую помощь при подготовке данной статьи к печати.

Литература

[1] Борель А. Линейные алгебраические группы. М.: Мир, 1972. 272 с.

[2] Воскресенский В.Е. Алгебраические торы. М.: Наука, 1977. 224 с.

[3] Воскресенский В.Е., Фомина Т.В. Целые структуры в алгебраических торах// Известия РАН, серия математическая, 1995. Т. 59:5. С. 3–18.

[4] Платонов В.П., Рапинчук А.С. Алгебраические группы и теория чисел. М.: Наука, 1991. 656 с.

[5] Voskresenskii V.E. Hopf algebras of algebraic tori// Kurosh Algebraic Conference. 1998. P. 129–130.

[6] Popov S.Yu., Voskresenskii V.E. Galois lattices and reductions of algebraic tori// Communications in Algebra. 2001. No. 29(9). P. 3711–3726.

[7] Liu Q., Lorenzini D. Special fibers of Néron models and wild ramification// Preprint, 1999. 40 pp.

[8] Nart E., Xarles X. Additive reduction of algebraic tori // Arch. Math. 1991. V.57. P. 460–466.

[9] Kunyavskii B., Sansuc J.-J. Réduction des groups algébraiques commutatifs// Max-Plank-Institute für Math. Preprint 112. 1998. 27 pp.

[10] Алгебраическая теория чисел/ Под ред. Дж. Касселса, А. Фрелиха. М.: Мир, 1969. 484 с.

[11] Атья М., Макдональд И. Введение в коммутативную алгебру. М.: Мир, 1972. 160 с.

[12] Grothendieck A., Demazure M. Schemas en groupes. I. Berlin: Springer–Verlag, 1977. 565 pp.

[13] Кострикин А.И. Введение в алгебру. М.: Наука, 1977. 460 с.

[14] Рышков С.С. Максимальные конечные группы целочисленных $n \times n$ матриц// Труды МИАН им. В.А. Стеклова, 1972. Т.128. С. 183–211.

STANDARD INTEGRAL MODEL OF ALGEBRAIC TORI[3]

© 2001 S.Yu. Popov[4]

Integral models play a significant role in the theory of linear algebraic groups over a field of the arithmetical type. The choice of such models is not unique. Thus, it is an important problem to define the integral model which is not trivial. In this paper, in the first place, the properties of the standard integral model of algebraic tori are studied. This model was proposed by Professor V.E. Voskresenskii. It is determined by the inner parameters of a torus and has some extreme properties. Secondly, the paper is devoted to the reduction of the standard integral model modulo prime. The main result is the structural theorem which establishes the correspondence between the type of the reduction and the structure of the minimal splitting field of algebraic tori.

Поступила в редакцию 16/*VII*/2001;
в окончательном варианте — 11/*XII*/2001.

[3]Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. V.E. Voskresenskii.
[4]Popov Sergei Yurievich (popov@ssu.samara.ru), Dept. of Algebra and Geometry, Samara State University, Samara, 443011, Russia.