УДК 517.988.67

ОБОБЩЕННАЯ ЖОРДАНОВА СТРУКТУРА И СИММЕТРИЯ РАЗРЕШАЮЩИХ СИСТЕМ В ТЕОРИИ ВЕТВЛЕНИЯ[1]

© 2001 И.В. Коноплева, Б.В. Логинов[2]

В настоящей работе рассматриваются нелинейные дифференциальные уравнения в банаховых пространствах с вырожденным фредгольмовым оператором при производной. Цель данного сообщения — сведение первоначальной задачи к конечномерным разрешающим системам (РС) и уравнению разветвления в корневом подпространстве (УРК). Вместе с групповой симметрией нелинейного уравнения исследуются также приложения свойств сплетающих операторов (негрупповой симметрии). Обсуждается возможность редукции (понижения порядка) УРК (РС) как по числу неизвестных, так и по числу уравнений. Доказаны варианты теоремы Гробмана–Хартмана. В условиях групповой симметрии исследуется связь между возможностью редукции соответствующего уравнения разветвления и его свойствами потенциальности. Рассмотрены приложения к теории капиллярно-гравитационных поверхностных волн.

Введение

Аппарат обобщенных жордановых цепочек и наборов фредгольмовых операторов (ОЖЦ и ОЖН) используется в задачах теории ветвления, начиная с работ В.А. Треногина и Н.А. Сидорова [1, 2]. В частности, в [2] доказан самый общий вариант теоремы существовония решений задачи о точке бифуркации. В [1] был предложен процесс перестройки ОЖЦ для получения полных ОЖН. Эти идеи получили окончательное завершение в работе [3]. Впоследствии они были применены для исследования устойчивости стационарных и периодических разветвляющихся решений для уравнений с вырожденным фредгольмовым оператором при производной [4, 5] (старших производных [6]) и вообще дифференциальных уравнений с вырождением в банаховых пространствах [7]. На основе этих идей были доказаны также теоремы существования решений задачи о точке бифуркации при наличии одной цепочки нечетной длины [8]. В настоящей работе при использовании аппарата ОЖЦ линейной оператор-функции спектрального параметра вводится понятие разрешающих систем (РС) для квазилинейных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах с фредгольмовым оператором при производной. В стационарном случае РС сводится к уравнению разветвления в корневом подпространстве (УРК) [9]. Доказана теорема о наследовании

[1]Представлена доктором физико-математических наук профессором О.П. Филатовым.

[2]Коноплева Ирина Викторовна, Логинов Борис Владимирович, кафедра высшей математики Ульяновского государственного технического университета.

разрешающими системами групповой и негрупповой (сплетение) симметрии первоначальной нелинейной задачи. В качестве применения разрешающих систем получены варианты теоремы Гробмана–Хартмана. Проведено сравнение УРК, полученных методами А.М. Ляпунова и Э. Шмидта, в частности, в условиях групповой симметрии. Обсуждается возможность редукции (понижения порядка) УРК по жордановым цепочкам полной длины. Получены необходимые и достаточные условия редукции укорочения уравнения разветвления (одновременной редукции по числу неизвестных и по числу уравнений), выражающиеся в сплетении нелинейного уравнения проекторами. Рассмотрена задача о капиллярно-гравитационных поверхностных волнах с ромбической решеткой периодичности. Полученные результаты анонсированы на конференциях [10–16]. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 0101–0019, и представляет собой обзор результатов, полученных в 2001 г. по теме гранта.

1. Основные понятия

Изложим основные сведения о полных ОЖН линейных оператор-функций спектрального параметра.

Пусть E_1, E_2 — банаховы пространства, $A : E_1 \supset D_A \to E_2$, $B : E_1 \supset D_B \to E_2$ — плотно заданные замкнутые линейные фредгольмовы операторы, $D_B \subset D_A$ и A подчинен B (т.е. $\| Ax \| \le \| Bx \|$ на D_B) или $D_A \subset D_B$ и B подчинен A (т.е. $\|Bx\| \le \|Ax\|$ на $D(A)$). Рассматривается дифференциальное уравнение

$$A\frac{dx}{dt} = Bx + f(x,t), \quad \|f(x,t)\| = o\left(\|x\|\right), \quad \|x\| \to 0 \tag{1.1}$$

с начальным значением $x(0) = 0$ или условиями периодичности. Предполагается нетривиальность подпространств нулей $\mathcal{N}(A) = \mathrm{span}\{\phi_1, \ldots, \phi_m\}$, $\mathcal{N}(B) = \mathrm{span}\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ и дефектных подпространств $\mathcal{N}^*(A) = \mathrm{span}\{\hat\psi_1, \ldots, \hat\psi_m\}$, $\mathcal{N}^*(B) = \mathrm{span}\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$. Вводятся соответствующие биортогональные системы $\{\vartheta_j\}_1^m$, $<\phi_i, \vartheta_j> = \delta_{ij}$; $\{\zeta_j\}_1^m$, $<\zeta_i, \hat\psi_j> = \delta_{ij}$; $\{\gamma_j\}_1^n$, $<\varphi_i, \gamma_j> = \delta_{ij}$; $\{z_j\}_i^n$, $<z_i, \psi_j> = \delta_{ij}$.

Определение 1. Элементы $\phi_i^{(s)}$, $s = 1, \ldots, q_i$, $\phi_i^{(1)} = \phi_i$, $i = 1, \ldots, m$ ($\varphi_i^{(s)}$, $s = 1, \ldots, p_i$, $\varphi_i^{(1)} = \varphi_i$, $i = 1, \ldots, n$) образуют полный обобщенный канонический жорданов набор (ОЖН $\equiv$ B-ЖН или A-ЖН) относительно оператор-функции $A - \lambda B$ (соответственно $B - \mu A$), если

$$\begin{gathered} A\phi_i^{(s)} = B\phi_i^{(s-1)}, \quad <\phi_i^{(s)}, \vartheta_j> = 0, s = 2, \ldots q_i,\ i,j = 1, \ldots, m; \\ (B\varphi_i^{(s)} = A\varphi_i^{(s-1)}, \quad <\varphi_i^{(s)}, \gamma_j> = 0,\ s = 2, \ldots, p_i, i,j = 1, \ldots, n) \\ D_q \equiv \det\left[\, <B\phi_i^{(q_i)}, \hat\psi_j> \,\right] \ne 0, \quad (D_p \equiv \det\left[\, <A\varphi_i^{(p_i)}, \psi_j> \,\right] \ne 0). \end{gathered} \tag{1.2}$$

Этот ОЖН называется биканоническим, если соответствующий B^*-ЖН (A^*-ЖН) сопряженного оператора A^* (B^*) также канонический.

Условия (1.2) определяют B-ЖН (A-ЖН) однозначно. Их элементы линейно независимы и образуют базис корневого подпространства $K(A;B)$ ($K(B;A)$) фредгольмовой точки $\lambda = 0 \in \sigma_B(A)$ ($\mu = 0 \in \sigma_A(B)$) оператор-функции $A - \lambda B$ ($B - \mu A$); число $k_A = \dim K(A;B) = \sum\limits_{i=1}^m q_i$ ($k_B = \dim K(B;A) = \sum\limits_{i=1}^n p_i$) называется корневым числом этой фредгольмовой точки.

Лемма 1. [1, 17, 18]. Элементы B- и B^*-жордановых наборов (A- и A^*-жордановых наборов) оператор-функций $A-\lambda B$ и $A^*-\lambda B^*$ ($B-\mu A$ и $B^*-\mu A^*$) могут быть выбраны так, что выполняются следующие условия биортогональности:

$$\begin{gathered} <\phi_i^{(j)},\vartheta_k^{(l)}> = \delta_{ik}\delta_{jl}\,,\ \ <\zeta_i^{(j)},\hat\psi_k^{(l)}> = \delta_{ik}\delta_{jl}\,,\ j(l)=1,\ldots,q_i(q_k),\\ \vartheta_k^{(l)} = B^*\hat\psi_k^{(q_k+1-l)},\ \zeta_i^{(j)} = B\phi_i^{(q_i+1-j)},\ i,k=1,\ldots,m; \end{gathered} \tag{1.3}$$

$$\begin{gathered} <\varphi_i^{(j)},\gamma_k^{(l)}> = \delta_{ik}\delta_{jl}\,,\ \ <z_i^{(j)},\psi_k^{(l)}> = \delta_{ik}\delta_{jl}\,,\ j(l)=1,\ldots,p_i(p_k),\\ \gamma_k^{(l)} = A^*\psi_k^{(p_k+1-l)},\ z_i^{(j)} = A\varphi_i^{(p_i+1-j)},\ i,k=1,\ldots,n. \end{gathered} \tag{1.4}$$

Соотношения (1.3), (1.4) позволяют ввести ([4, 5]) проекторы

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{q_i}\ <\cdot,\vartheta_i^{(j)}>\ \phi_i^{(j)} = <\cdot,\vartheta>\ \phi : E_1\to E_1^{k_A} = K(A,B),\\ \mathbf{q} &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{q_i}\ <\cdot,\hat\psi_i^{(j)}>\ \zeta_i^{(j)} = <\cdot,\hat\psi>\ \zeta : E_2\to E_{2,k_A} = \mathrm{span}\{\zeta_i^{(j)}\}; \end{aligned} \tag{1.5}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\ <\cdot,\gamma_i^{(j)}>\ \varphi_i^{(j)} = <\cdot,\gamma>\ \varphi : E_1\to E_1^{k_B} = K(B;A),\\ \mathbf{Q} &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\ <\cdot,\psi_i^{(j)}>\ z_i^{(j)} = <\cdot,\psi>\ z : E_2\to E_{2,k_B} = \mathrm{span}\{z_i^{(j)}\} \end{aligned} \tag{1.6}$$

(где $\phi=(\phi_1^{(1)},\cdots,\phi_1^{(q_1)},\cdots,\phi_m^{(1)},\cdots,\phi_m^{(q_m)})$, векторы ϑ, $\hat\psi$, ζ и φ, γ, ψ, z определяются аналогично), порождающие следующие разложения в прямые суммы:

$$E_1 = E_1^{k_A}\dot{+}E_1^{\infty-k_A},\quad E_2 = E_{2,k_A}\dot{+}E_{\infty-k_A}, \tag{1.7}$$

$$E_1 = E_1^{k_B}\dot{+}E_1^{\infty-k_B},\quad E_2 = E_{2,k_B}\dot{+}E_{2,\infty-k_B}. \tag{1.8}$$

Выполняются свойства сплетения

$$A\mathbf{p} = \mathbf{q}A \text{ на } D_A,\quad B\mathbf{p} = \mathbf{q}B \text{ на } D_B, \tag{1.9}$$

$$(B\mathbf{P} = \mathbf{Q}B \text{ на } D_B\ , A\mathbf{P} = \mathbf{Q}A \text{ на } D_A), \tag{1.10}$$

$$A\phi = \tilde A_A\zeta,\ B\phi = \tilde A_B\zeta,\ B^*\hat\psi = \tilde A_B\vartheta, \tag{1.11}$$

$$(B\varphi = \mathcal{A}_B z,\ A\varphi = \mathcal{A}_A z,\ A^*\psi = \mathcal{A}_A\gamma) \tag{1.12}$$

с блочно-диагональными матрицами $\tilde A_A = (A_1,\ldots,A_m)$, $\tilde A_B = (B_1,\ldots,B_m)$ ($\mathcal{A}_B = (B^1,\ldots,B^n)$, $\mathcal{A}_A = (A^1,\ldots,A^n)$), где $q_i\times q_i$-клетки ($p_i\times p_i$-клетки) имеют вид

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad B_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(B^i имеет вид A_i, и A^i имеет вид B_i). Здесь

$$\begin{gathered} \mathcal{N}(A)\subset E_1^{k_A},\ AE_1^{k_A}\subset E_{2,k_A},\ A(E_1^{\infty-k_A}\cap D_A)\subset E_{2,\infty-k_A},\\ \mathcal{N}(B)\subset E_1^{\infty-k_A},\ BE_1^{k_A}\subset E_{2,k_A},\ B(E_1^{\infty-k_A}\cap D_B)\subset E_{2,\infty-k_A}, \end{gathered} \tag{1.13}$$

и отображения $B : E_1^{k_A} \to E_{2,k_A}$, $\overset{\sqcap}{A}= A : E_1^{\infty-k_A} \cap D_A \to E_{2,\infty-k_A}$ являются взаимно однозначными. Аналогично операторы B и A действуют в инвариантных парах подпространств $E_1^{k_B}$, E_{2,k_B} и $E_1^{\infty-k_B}$, $E_{2,\infty-k_B}$ и также $\overset{\sqcup}{B}= B : D_B \cap E_1^{\infty-k_B} \to E_{2,\infty-k_B}$, $A : E_1^{k_B} \to E_{2,k_B}$ являются изоморфизмами. Определим также оператор $\overset{\sqcap}{B}= B : D_B \cap E_1^{\infty-k_A} \to E_{2,\infty-k_A}$.

Действительно, разложения (1.7), (1.8) и соотношения сплетения (1.9)–(1.12) следуют из определений (1.5), (1.6) проекторов $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ ($\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$) и леммы 1. Включения (1.13) и двойственные им проверяются непосредственно с учетом соотношений (1.9), (1.10). Жордановы наборы, удовлетворяющие условиям биортогональности (1.3), (1.4), будем называть триканоническими. Они могут не существовать в общем случае аналитических (полиномиальных) оператор-функций спектрального параметра [9]. Однако здесь и всюду далее все утверждения, полученные для линейных оператор-функций и связанные с триканоническими ОЖН, остаются верными для аналитического случая в предположении условий триканоничности.

2. Разрешающие системы в нестационарном случае

2.1. Построение РС

Для построения РС используем варианты конструкций А.М. Ляпунова или Э. Шмидта [1]. Вариант Э. Шмидта в приложении к динамическому случаю (1.1) был рассмотрен Н.А. Сидоровым [19] и сводит задачу (1.1) к системе дифференциальных уравнений бесконечного порядка или к системе интегральных уравнений Вольтерра. Поэтому здесь будет использован вариант А.М. Ляпунова [1].

Запишем уравнение (1.1) в проекциях на подпространства (1.7), полагая $\xi_{is} = \, < x, \vartheta_i^{(s)} >$ и $x = \xi \cdot \phi + w = \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{s=1}^{q_i} < x, \vartheta_i^{(s)} > \ \phi_i^{(s)} + w$, $w \in E_1^{\infty-k_A}$. После применения проекторов $(\mathbf{I}-\mathbf{q})$ и $\mathbf{q}$ возникает следующая система:

$$\overset{\sqcap}{A} \frac{dw}{dt} = \overset{\sqcap}{B} w + (\mathbf{I}-\mathbf{q}) f(\xi \cdot \phi + w, t), \tag{2.1}$$

$$A_i \frac{d\xi_i}{dt} = B_i \xi_i + \mathbf{q}_i f(\xi \cdot \phi + w, t), \tag{2.2}$$

$$\mathbf{q}_i = \sum_{j=1}^{p_i} \ <\cdot, \hat{\psi}_i^{(j)}> \ \zeta_i^{(j)}, \quad \xi_i = (\xi_{i1}, \ldots, \xi_{iq_i}), \quad i = 1, \ldots, m.$$

Величины $\xi = (\xi_{11}, \ldots, \xi_{1q_1}, \ldots, \xi_{m1}, \ldots, \xi_{mq_m})$ рассматриваются как параметры, от которых зависит решение уравнения (2.1), т.е. $w = w(\xi, t)$. В настоящей работе не обсуждается вопрос об однозначной разрешимости уравнения (2.1), она предполагается. Подставляя решение $w = w(\xi, t)$ первого уравнения (2.1) во второе и полагая $f_{ij}(\xi, t) \equiv \, < f(\xi \cdot \phi + w(\xi, t), \hat{\psi}_i^{(q_i-j+1)} >$, запишем уравнение (2.2) в виде следующей системы $\mathcal{F}(\xi, t) = 0$:

$$0 = \xi_{iq_i} + f_{iq_i}(\xi, t), \ i = 1, \ldots, m, \tag{2.3}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\xi}_{iq_i} = \xi_{iq_i-1} + f_{iq_i-1}(\xi, t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{\xi}_{i2} = \xi_{i1} + f_{i1}(\xi, t), \quad i = 1, \ldots, m. \end{array} \right. \tag{2.4}$$

В дальнейшем дифференциально-алгебраическую систему (2.3), (2.4) будем называть разрешающей системой для нелинейной задачи (1.1).

2.2. Использование сплетающих операторов

Пусть существуют линейные операторы $L \in \mathcal{L}(E_1)$ и $K \in \mathcal{L}(E_1)$, сплетающие операторы [20] A и B, т.е.

$$KA = AL, \quad KB = BL. \tag{2.5}$$

Это могут быть как отдельные операторы, вообще говоря, не имеющие обратных, так и некоторые их семейства, в частности, представления L_g и K_g некоторой группы G. Выясним, как преобразуются обобщенные жордановы цепочки при действии операторов L и K.

Очевидно,что подпространства нулей $\mathcal{N}(A)$ и $\mathcal{N}(B)$ являются инвариантными относительно оператора L, а области значений $\mathcal{R}(A)$ и $\mathcal{R}(B)$ являются инвариантными подпространствами (A и B–фредгольмовы) относительно оператора K.

Отметим, что инвариантность области значений оператора B или A относительно K означает инвариантность подпространств нулей $\mathcal{N}(A^*)$ и $\mathcal{N}(B^*)$ относительно K^*.

Условие I. Пусть существуют прямые дополнения $E_1^{\infty-m}$ к $\mathcal{N}(A)$ и $E_1^{\infty-n}$ к $\mathcal{N}(B)$, инвариантные относительно L.

Согласно лемме 1.2 [21], условие I может быть заменено эквивалентным предположением, что биортогональные системы $\{\vartheta_i\}_1^m \in E_1^*$ для оператор-функции $A-\lambda B$ и $\{\gamma_i\}_1^m \in E_1^*$ для $B-\mu A$ образуют базис инвариантных относительно оператора L^* подпространств.

Пусть преобразование L в инвариантном подпространстве $E_1^m = \mathrm{span}\{\phi_1,\ldots$ $\ldots,\phi_m\}$ ($E_1^n = \mathrm{span}\{\varphi_1,\ldots,\varphi_n\}$) действует согласно формуле

$$\begin{gathered} L\phi_i = \tilde{A}'\phi_i = \sum_{j=1}^m a_{ji}\phi_j,\ \tilde{A} = \|a_{ij}\|_{i,j}^m, \\ L\varphi_i = \mathcal{A}'\varphi_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ji}\varphi_j,\ \mathcal{A} = \|\alpha_{ij}\|_{i,j=1}^n. \end{gathered} \tag{2.6}$$

Тогда для произвольного $\phi = \sum\limits_{i=1}^m \xi_i\phi_i$ ($\varphi = \sum\limits_{i=1}^n \eta_i\varphi_i$) действие оператора L на ϕ (φ) равносильно преобразованию координат

$$\tilde{\xi}_i = (\tilde{A}\xi)_i = \sum_{j=1}^m a_{ij}\xi_j, \quad (\tilde{\eta}_i = (\mathcal{A}\eta)_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}\eta_j). \tag{2.7}$$

Соответственно условие I означает, что

$$L\vartheta_i = \sum_{j=1}^m a_{ij}\vartheta_j, \quad (L\gamma_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}\gamma_j). \tag{2.8}$$

Аналогично инвариантность $\mathcal{R}(A)$ ($\mathcal{R}(B)$) относительно оператора K определяется матрицами $\tilde{B}$ и $\mathcal{B}$

$$\tilde{B}\hat{\psi}_i = \sum_{j=1}^m b_{ij}\hat{\psi}_j, \quad (\mathcal{B}\psi_i = \sum_{j=1}^n \beta_{ij}\psi_j). \tag{2.9}$$

Лемма 2. Пусть операторы B и A в уравнении (1.1) сплетаются операторами L и K (2.5), оператор L обратим, и выполняется условие I. Тогда оператор K обратим на областях значений $\mathcal{R}(A)$ и $\mathcal{R}(B)$ операторов A и B. Пусть существует канонический жорданов набор (B-ЖН) относительно оператор-функции $A - \lambda B$. Тогда длины B-жордановых цепочек элементов ϕ, $L\phi \in \mathcal{N}(A)$ равны (т.е. $q(L\phi) = q(\phi)$), и оператор L переводит B-ЖЦ элемента ϕ в B-ЖЦ для $L(\phi)$. Если элементы ϕ_i занумерованы в порядке возрастания длин ОЖЦ $q_i = \ldots = q_{i_1} < q_{i_1+1} = \ldots = q_{i_1+i_2} < \ldots < q_{i_1+\ldots+i_{k-1}+1} = \ldots = q_{i_1+\ldots+i_{k-1}+i_k}$, то для каждого s B-ЖЦ $\phi_i^{(s)}$ преобразуются блочно-диагональной матрицей, блоки которой начинаются с номеров i_s+1 в (i_s+1)-й строке.

Доказательство. Докажем сначала обратимость оператора K на $\mathcal{R}(A)$, его обратимость на $\mathcal{R}(B)$ может быть доказана аналогично. Предположим противное: пусть существует $0 \neq y_0 \in \mathcal{R}(A)$ такой, что $Ky_0 = 0$. Тогда для некоторого $x_0 \in D_A$ выполняется $Ax_0 = y_0$, $KAx_0 = 0$, откуда $ALx_0 = 0$ и $Lx_0 \in \mathcal{N}(A)$,что невозможно.

Пусть далее элемент ϕ имеет B-ЖЦ длины $q(\phi)$. Первый шаг: $A\phi^{(2)} = B\phi^{(1)}$, $<\phi^{(2)}, \vartheta_i> = 0, i = \overline{1,m} \Rightarrow AL\phi^{(2)} = KA\phi^{(2)} = KB\phi^{(1)} = BL\phi^{(1)}$ и $<KB\phi^{(1)}, \hat{\psi}_j> = \;= <B\phi^{(1)}, K^*\hat{\psi}_j> = 0$, $j = 1,\ldots,m$, поскольку $\mathcal{N}^*(B)$ инвариантно относительно K^*. Следовательно, $L\phi^{(2)} = (L\phi^{(1)})^{(2)}$. На шаге s: $(L\phi)^k = L\phi^{(k)}$, $k = 2,\ldots,s$, т.е. $A(L\phi)^k = AL\phi^{(k)} = KA\phi^{(k)} = KB\phi^{(k-1)} = BL\phi^{(k-1)} = B(L\phi)^{(k-1)}$, $k = 2,\ldots,s$, и уравнение $Ax = B\phi^{(s)}$ имеет единственное решение $x = \phi^{(s+1)}$, $<\phi^{(s+1)}, \vartheta_k> \;= 0$, $k = 1,\ldots,n$. Тогда $AL\phi^{(s+1)} = KA\phi^{(s+1)} = KB\phi^{(s)} = BL\phi^{(s)} = B(L\phi)^{(s)}$ и $<BL\phi^{(s)}, \vartheta_k> = 0$. Таким образом, $L\phi^{(s+1)} = (L\phi)^{(s+1)}$. Пусть жорданова цепочка обрывается на элементе $\phi^{(q)}$,т.е. $<B\phi^{(q)}, \hat{\psi}_{j_0}> \neq 0$ для некоторого j_0, $<\phi^{(q)}, \vartheta_i> = 0$, $i = 1,\ldots,m$, и уравнение $Ax = B\phi^{(q)}$ не имеет решения. Так как оператор K обратим на $\mathcal{R}(B)$, то существует номер j_0 такой, что $<BL\phi^{(q)}, \hat{\psi}_{j_0}> = \;<KB\phi^{(q)}, \hat{\psi}_{j_0}> \neq 0$. Следовательно, $q(L\phi) = q(\phi)$.

Длина ОЖЦ для произвольного элемента $\phi \in \mathcal{N}(A)$ определяется номером первой ненулевой проекции на линейные оболочки групп векторов ϕ_i с одинаковой длиной ОЖЦ, и разложение $L\phi$ по базису $\{\phi_i\}^m$ начинается с номеров этих групп. Следовательно, оператор L определяет в $\mathcal{N}(A)$ блочно-диагональную матрицу указанного вида.

Следствие 1. В условиях леммы 2 формулы преобразования координат ξ_{ij} имеют вид

$$\tilde{\xi}_{i_1+\ldots+i_\sigma+j,k} = \sum_{s=i_1+\ldots+i_\sigma+1}^{i_1+\ldots+i_\sigma+i_{\sigma+1}} a_{i_1+\ldots+i_\sigma+j,s}\xi_{sk}, \quad j = 1,\ldots,q_{\sigma+1}, \quad k = 1,\ldots,q_\sigma. \tag{2.10}$$

Замечание 1. Справедливо также утверждение, двойственное лемме 2 относительно оператор-функции $B - \mu A$.

Лемма 3. Пусть операторы L и K обратимы, жорданов набор оператор-функции $A - \lambda B$ $(B - \mu A)$ является триканоническим, и выполнено условие I. Тогда условие I для сопряженной оператор-функции $A^* - \lambda B^*$ $(B^* - \mu A^*)$ также выполняется, причем $\tilde{B} = \tilde{A}$ $(\mathcal{B} = \mathcal{A})$.

В самом деле, в этой ситуации векторы $\{\zeta_i\}_i^m$ $(\{z_j\}_1^n)$ преобразуются матрицей $\tilde{A}'$ $(\mathcal{A}')$, т.е. их линейные оболочки E_{2,k_A} (E_{2,k_B}) являются K-инвариантными подпространствами E_2.

Следствие 2. В условиях лемм 2 и 3 действие оператора K на подпространстве $E_{2,k_A} = \mathrm{span}\{\zeta_1^{(1)},\ldots,\zeta_n^{(q_1)},\ldots,\zeta_{i_1}^{(1)},\ldots,\zeta_{i_1}^{(q_{i_1})},\ldots\}$ выражается следующей блочно-диагональной матрицей

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & 0 & \dots & a_{i_1 1} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & \dots & a_{11} & \dots & 0 & \dots & a_{i_1 1} & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1 i_1} & \dots & 0 & \dots & a_{i_1 i_1} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & \dots & a_{1 i_1} & \dots & 0 & \dots & a_{i_1 i_1} & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & a_{i_1+1 i_1+1} & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & a_{i_1+1 i_1+1} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \tag{2.11}$$

где матрица $\tilde{A} = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^{m}$ определена в (2.6).

Аналогичное утверждение имеет место для $E_{2,k_B} = \mathrm{span}\{z_1^{(1)}, \dots, z_1^{(p_1)}, \dots\}$. Доказательство основано на соотношении $Kz_i^{(j)} = KB\phi_i^{(q_i+1-j)} = BL\phi_i^{(q_i+1-j)}$ и формулах преобразования $\phi_i^{(s)}$ при действии оператора L (лемма 2 и (2.10)).

Лемма 4. Множества $\mathbf{L} = \{L \in \mathcal{L}(E_1)\}$ и $\mathbf{K} = \{K \in \mathcal{L}(E_2)\}$ обратимых операторов, удовлетворяющих равенствам (2.5), являются группами.

Далее предполагается, что операторы L и K сплетают операторы A, B, f в уравнении (1.1), оператор L обратим, и выполнено условие I.

Лемма 5.

$$K\mathbf{q} = \mathbf{q}K. \tag{2.12}$$

Действительно, оператор K обратим на $\mathcal{R}(B)$, и проектор $\mathbf{q}$ имеет областью значений подпространство $E_{2,k_A} = \mathrm{span}\{\zeta_i^{(j)} = B\phi_i^{(q_i+1-j)}\}$. Поэтому для краткости $K\mathbf{q}y = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{q_i} < y, \hat{\phi}_i^{(j)} > \; K\zeta_i^{(j)} = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{q_i} < y, K^*\hat{\psi}_i^{(j)} > \; \zeta_i^{(j)} = \mathbf{q}Ky$. Строгое доказательство можно дать, применяя матрицу преобразований (2.11).

Лемма 6.

$$K\mathbf{Q} = \mathbf{Q}K. \tag{2.13}$$

Теорема 1. Пусть операторы A, B и f в (1.1) сплетаются операторами L и K, L обратим, и выполнено условие I. Тогда в случае единственности решения уравнения (2.1) разрешающая система (2.2) (или (2.3),(2.4)) наследует сплетающие свойства операторов L и K, т.е.сплетение матриц $\mathrm{diag}\{A_1, \dots, A_m\}$ и $\mathrm{diag}\{B_1, \dots, B_m\}$ и вектор-функции $\mathbf{q}f$. Иными словами, РС (2.3), (2.4) сплетается матрицей $\widetilde{\mathbf{A}}$ (2.11).

Доказательство. В силу свойств сплетения операторов уравнение (1.1) имеет решения $x = w+v = w+\xi\cdot\phi$ и $Lx = Lw+\xi\cdot L\phi$. Из предположения однозначной разрешимости (2.1) следует $Lw = w(Lv, t) = w(\widetilde{\mathbf{A}}\xi, t)$. Тогда, согласно лемме 5 и формулам (2.10), получается требуемое утверждение. Свойство сплетения РС $\mathcal{F}(\xi, t) = 0$ (2.3), (2.4) выражается формулой

$$\widetilde{\mathcal{F}}(\xi, t) = \widetilde{\mathbf{A}}\mathcal{F}(\xi, t) = \mathcal{F}(\widetilde{\mathbf{A}}\xi, t), \quad \tilde{\xi} = \tilde{A}\xi,$$

где матрица $\widetilde{\mathbf{A}}$ определена в (2.11).

Замечание 2. В случае, когда множества $\mathbf{L}$ и $\mathbf{K}$ являются непрерывными группами преобразований, эта теорема позволяет осуществить редукцию (понижение порядка) РС (2.3), (2.4) [21, 22].

2.3. Теорема Гробмана–Хартмана

Пусть E_1 и E_2 — банаховы пространства, $A : E_1 \supset D_A \to E_2$, $B : E_1 \supset D_B \to E_2$ — плотно заданные замкнутые линейные фредгольмовы операторы , где $D_B \subset D_A$ и A подчинен B (т.е. $\|Ax\| \le \|Bx\|$ на D_B) или $D_A \subset D_B$ и B подчинен A (т.е. $\|Bx\| \le \|Ax\|$ на D_A). Рассматривается дифференциальное уравнение

$$A\frac{dx}{dt} = Bx - R(x), \quad R(0) = 0, \quad R_x(0) = 0. \tag{2.14}$$

Цель этой части работы — доказать теорему Гробмана–Хартмана [23, 24] для уравнения (2.14).

2.3.1. Теорема Гробмана-Хартмана при $\sigma_A^0(B) = \emptyset$

Предположим, что для A-спектра $\sigma_A(B)$ оператора B $\mathrm{Re}\,\sigma_A(B) \ne 0$ и спектральные множества $\sigma_A^-(B) = \{\mu \in \sigma_A(B) |\ Re\mu < 0\}$ и $\sigma_A^+(B) = \{\mu \in \sigma_A(B) |\ \mathrm{Re}\ \mu > 0\}$ отстоят от мнимой оси на некотором расстоянии $d > 0$.

Решения соответствующей (2.14) линейной задачи Коши

$$A\frac{dx}{dt} = Bx, \qquad x(0) = x_0 \tag{2.15}$$

принадлежат $E_1^{\infty-k_A}$ и (2.15) разрешимо тогда и только тогда, когда $x_0 \in E_1^{\infty-k_A}$. Действительно, положим $x = v + w$, $v(t) = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{s=1}^{q_i} \xi_{is}(t)\phi_i^{(s)} \in E_1^{k_A}$, $w(t) \in E_1^{\infty-k_A}$, тогда (2.15) распадается в систему

$$\frac{d\xi_{is}(t)}{dt} = \xi_{i,s-1},\ s = 2,\dots,q_i,\ i = 1,\dots,m,\ \ \xi_{iq_i} = 0;\ \overset{\sqcap}{A}\,\frac{dw}{dt} = \overset{\sqcap}{B}\,w. \tag{2.16}$$

Следовательно $\xi_{is}(t) = 0$, решение (2.15) имеет вид

$$x(t) = \exp(\overset{\sqcap}{A}{}^{-1}\overset{\sqcap}{B}\,t)x_0, \quad x_0 \in E_1^{\infty-k_A} \tag{2.17}$$

и $\sigma_A(B) = \sigma(\overset{\sqcap}{A}{}^{-1}\overset{\sqcap}{B})$. Здесь функция $\exp(\overset{\sqcap}{A}{}^{-1}\overset{\sqcap}{B}\,t)$ имеет вид контурного интеграла $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma (\mu I - \overset{\sqcap}{A}{}^{-1}\overset{\sqcap}{B})^{-1}e^{\mu t}\,dt$ в предположении секториальности [25] оператора $\overset{\sqcap}{A}{}^{-1}\overset{\sqcap}{B}$ (или, что то же самое, A-секториальности оператора B [26]) с некоторым специальным контуром γ, принадлежащим сектору $S_{\alpha,\theta}(B)$ в A-резольвентном множестве оператора B [26].

Тем более это верно, когда оператор $\overset{\sqcap}{A}{}^{-1}\overset{\sqcap}{B}$ ограничен.

Обобщая теорему Гробмана–Хартмана, будем следовать работе [23]. Определим пространства D_k, $k = 1, 2$ с нормами графика: 1^0) $D_B \subset D_A$ и $\|Ax\| \le \|Bx\|$ для $x \in D_1 = D_B$ с нормой $\|x\|_1 = \|x\|_{E_1} + \|Bx\|_{E_2}$, $x \in D_1$; 2^0) $D_A \subset D_B$ и $\|Bx\| \le \|Ax\|$ для $x \in D_2 = D_A$ с нормой $\|x\|_2 = \|x\|_{E_1} + \|Ax\|_{E_2}$, $x \in D_2$ и введем пространства $X_{k0}, X_{k1}, X_{k2}, Y_{k0}, Y_{k1}, Y_{k2}$ ограниченных равномерно непрерывных функций $f(t)$ на $[0, \infty)$ со значениями соответственно в D_k, $D_k \cap E_1^{\infty-k_A}$, $E_1^{k_A}, E_2, E_{2,\infty-k_A}$, E_{2,k_A} и sup-нормами на соответствующих пространствах, а также пространства

$$X_{ks}^1 = \{f(t) \in X_{ks} | \dot f(t) \in X_{ks}\}, \quad \|f(t)\|_{X_{ks}^1} = \max\{\|f(t)\|_{X_{ks}}, \|\dot f(t)\|_{X_{ks}}\}.$$

Всюду далее оператор $\overset{\sqcap}{A}^{-1}\overset{\sqcap}{B}$ ограничен в X_{ks} (для случая $k = 1$ это очевидно). Тогда оператор

$$\mathbf{A}x = A\dot{x} - Bx, \tag{2.18}$$

действующий из X^1_{k0} в Y_{k0}, является линейным и непрерывным с $X_{k2} \subset \mathcal{N}(\mathbf{A})$.

Пусть $D_k \supset S_k = \{$начальные условия решений уравнения (2.15), которые определены и остаются в малой окрестности нуля в D_k для $t \in [0, +\infty)\}$ и $U_k =\{$начальные условия решений уравнения (2.15), которые определены и остаются в малой окрестности нуля в D_k для $t \in (-\infty, 0]\}$. Из (2.18) следует, что $S_k \dot{+} U_k = E_1^{\infty - k_A} \cap D_k$. Тогда равенство $\sigma_A(B) = \sigma(\overset{\sqcap}{A}^{-1}\overset{\sqcap}{B})$ позволяет определить проекторы $P^- u = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_-}(\overset{\sqcap}{A}^{-1}\overset{\sqcap}{B} -\mu I_{E_1^{\infty-k_A}})^{-1} u d\mu$ (γ_- контур в $\rho_A(B)$, содержащий внутри себя точки $\mu \in \sigma_A(B)$ с $\mathrm{Re}\,\mu < 0$), и $P^+ = I_{E_1^{\infty-k_A}} - P^-$. Откуда $D_k = D_k^- \dot{+} D_k^0 \dot{+} D_k^+$, $D_k^0 = E_1^{k_A}$, $D_k^{\pm} = P^{\pm} D_k$. Оператор $\mathbf{A}$ является нетеровым [1] с $R(\mathbf{A}) = Y_{k1}$ и

$$\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \{f(t) \in X^1_{k0} | f(t) = \exp(\overset{\sqcap}{A}^{-1}\overset{\sqcap}{B}\, t) P^- f(0) \in D_k^-\} \dot{+} \{f(t) \in D_k^0\} =$$

$$= \mathcal{N}_1(\mathbf{A}) \dot{+} \mathcal{N}_2(\mathbf{A}) \quad \text{для} \quad t \geq 0;$$

$$(\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \{f(t) \in X^1_{k0} | f(t) = \exp(\overset{\sqcap}{A}^{-1}\overset{\sqcap}{B}\, t) P^+ f(0) \in D_k^+\} \dot{+} \{f(t) \in D_k^0\} \quad \text{для } t \leq 0).$$

Теперь , подставив $x = y + z + v$, $z \in D_k^+$, $v \in D_k^0 = E_1^{k_A}$, $y \in D_k^-$, можно записать уравнение (2.14) в виде ($w = y + z$ в (2.16))

$$\mathbf{A}z = R(z + y + v), \quad (\mathbf{A}y = R(y + z + v)) \tag{2.19}$$

и применить теорему о неявных операторах к (2.19), считая y, v (z, v) функциональными параметрами (см. теоремы 22.1 и 22.2 в [1] для непрерывного и аналитического оператора R соответственно). Отсюда следует, что (2.19) имеет достаточно гладкое или аналитическое (соответственно свойствам оператора R) решение в некоторой окрестности нулевых значений параметров y, v (z, v)

$$z = z(y + v), \quad z(0) = 0 = Dz(0) \quad (y = y(z + v),\ y(0) = 0 = Dy(0)) \tag{2.20}$$

Следовательно, справедливо следующее обобщение теоремы Гробмана–Хартмана [23, 24].

Теорема 2. Существует окрестность $w^-(w^+)$ нуля в $D_k^0 \dot{+} D_k^-$ (в $D_k^0 \dot{+} D_k^+$) и достаточно гладкое отображение $z_R = z_R(\xi, \eta) = z_R(\xi \cdot \phi + \eta) : w^- \to D_k^+$, $\eta \in D_k^-$ ($y_R = y_R(\xi, \zeta) = y_R(\xi \cdot \phi + \zeta) : w^+ \to D_k^-$, $\zeta \in D_k^+$) такое, что **a)** $z_R(0, 0) = 0$, $D_\xi z_R(0, 0) = 0$, $D_\eta z_R(0, 0) = 0$ ($y_R(0, 0) = 0$, $D_\xi y_R(0, 0) = 0$, $D_\zeta y_R(0, 0) = 0$), **b)** для любого решения $x(t)$ (2.14) с начальными данными $x(0) = \xi \cdot \phi + \eta + z_R(\xi \cdot \phi + \eta)$ ($x(0) = \xi \cdot \phi + y_R(\xi \cdot \phi + \zeta) + \zeta$) имеем $z(t) = z_R(\xi(t) \cdot \phi + y(t)) \in D_k^+$ для $t \geq 0$ ($y(t) = y_R(\xi(t) \cdot \phi + z(t)) \in D_k^-$ для $t \leq 0$), **c)** любое решение $x(t)$ (2.14) с начальными данными из b) имеет вид $x(t) = \xi(t) \cdot \phi + y(t) + z_R(\xi(t) \cdot \phi + y(t))$ ($x(t) = \xi(t) \cdot \phi + y_R(\xi(t) \cdot \phi + z(t)) + z(t)$) и стремится к нулю, когда $t \to +\infty (t \to -\infty)$, и принадлежит, соответственно, локально устойчивому многообразию $S_k(R)$ (локально неустойчивому многообразию $U_k(R)$).

Дадим доказательство для функции z_R и локально устойчивого многообразия $S_k(R)$, доказательство второй части аналогично. Определим $\tilde{P}^-$ проектор X^1_{k1} на $\mathcal{N}_1(\mathbf{A})$ равенством $(\tilde{P}^- f)(t) = \exp(\overset{\sqcap}{A}^{-1}\overset{\sqcap}{B}\ t)\ P^- f(0)$, $t \geq 0$. Если положить

$x(t) = v(t) + y(t) + z(t)$, $v(t) = \mathbf{p}x(t)$, $v(0) = \xi \cdot \phi = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{s=1}^{q_i} \xi_{is}\cdot \phi_i^{(s)}$, $y(t) = \tilde{P}^- x(t) =$ $= \exp(\overset{\sqcap}{A}{}^{-1} \overset{\sqcap}{B}\ t)\eta$, $\eta = y(0)$, $z(t) = (I_{X^1_{k1}} - \tilde{P}^-)\ x(t)$, то метод Ляпунова–Шмидта (теорема 27.1 [1]) для нетеровых операторов с d-характеристикой $(n,0)$ и вышеуказанные теоремы 22.1, 22.2 [1]) дают здесь существование единственного решения (2.19) $z = z_R(\xi(t)\cdot\phi + y(t)) \in X^1_{k1}$ такого, что $x(0) = \xi\cdot\phi + \eta + z_R(\xi\cdot\phi+\eta)$, т.е. единственное решение (2.14) $x(t) = v(t) + y(t) + z_R(\xi(t)\cdot\phi + y(t))$, $v(t) = \xi(t)\cdot\phi$, в достаточно малой полуокрестности $t = 0$, где функция $z_R(\xi,\eta) = z_R(\xi\cdot\phi+\eta)$ является достаточно гладкой по ξ,η, и $z_R(0,0) = 0$, $D_\xi z_R(0,0) = 0$, $D_\eta z_R(0,0) = 0$.

Записывая уравнение (2.14) в $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$–проекциях и используя теорему 2, можно получить систему для определения $\xi_{is}(t)$ (разрешающую систему для уравнения (2.14) [4, 5, 9, 10, 11]). Здесь $x(t) = \xi(t)\cdot\phi + w(t)$, где $w(t) = y(t) + z_R(\xi(t)\cdot\phi + y(t))$ для $t \geq 0$ и $w(t) = y_R(\xi(t)\cdot\phi + z(t)) + z(t)$ для $t \leq 0$. Имеем

$$\overset{\sqcap}{A}\ \frac{dw}{dt} = \overset{\sqcap}{B}\ w - (I_{D_k} - \mathbf{q})R(\xi\cdot\phi + w), \tag{2.21}$$

$$\begin{array}{c} 0 = \xi_{iq_i}(t) - \ <R(\xi(t)\cdot\phi + w), \hat{\psi}_i^{(1)}>\ , \\ \dot{\xi}_{iq_i}(t) = \xi_{i,q_i-1}(t) - \ <R(\xi(t)\cdot\phi + w), \hat{\psi}_i^{(2)}>\ , \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dot{\xi}_{i2}(t) = \xi_{i1}(t) - \ <R(\xi(t)\cdot\phi + w), \hat{\psi}_i^{(q_i)}>\ , \\ \xi_{is}(0) = \xi_{is}, \quad s = 1,\ldots,q_i, \quad i = 1,\ldots,m. \end{array} \tag{2.22}$$

Следовательно, многообразие $S_k(R) = \{$начальные условия решений уравнения (2.14), которые определены и остаются в малой окрестности $0 \in D_k$ для $t \in [0,+\infty)\}$ (многообразие $U_k(R) = \{$начальные условия решений (2.14), которые определены и остаются в малой окрестности $0 \in D_k$ для $t \in (-\infty, 0]\}$) имеет вид $x(0) =$ $= \xi\cdot\phi + \eta + z_R(\xi\cdot\phi+\eta)$ $(x(0) = \xi\cdot\phi + y_R(\xi\cdot\phi+\zeta) + \zeta)$, где $\eta \in D_k^-$ $(\zeta \in D_k^+)$ и ξ малы.

Замечание 3. Определенное функцией $\xi\cdot\phi + \eta + z_R(\xi\cdot\phi+\eta)$ для $t \geq 0$ $(\xi\cdot\phi + y_R(\xi\cdot\phi+\zeta)+\zeta$ для $t \leq 0)$ инвариантное многообразие $\tilde{M}$ можно рассматривать как центральное многообразие $(\xi\cdot\phi \in D_k^0)$, нетривиальное для уравнения (2.14), даже если $\{\mu \in \sigma_A(B) | Re\ \mu = 0\} = \emptyset$. Здесь $\{\xi\cdot\phi\}$ — линейное центральное многообразие, касательное к $\tilde{M}$. Можно сказать, что $\tilde{M}$ имеет гиперболическую структуру. Таким образом, разрешающая система (2.22) представляет собой дифференциально-алгебраическую систему на $\tilde{M}$. Конечно, если оператор A обратим, то $\tilde{M}$ и система (2.22) отсутствуют, т.е. в теореме Гробмана–Хартмана $z_R = z_R(\eta)$ [23, 24].

Теорема 3. Пусть операторы A, B и R в (2.14) сплетаются представлениями группы G: L_g (действующим в E_1) и K_g (действующим в E_2) и выполнено условие I (прямые дополнения $E_1^{\infty-m}$ к $\mathcal{N}(A)$ и $E_1^{\infty-n}$ к $\mathcal{N}(B)$ инвариантны относительно L_g). Тогда центральное многообразие $\tilde{M}$ инвариантно относительно операторов L_g.

Действительно, соответственно (2.12), (2.13) проекторы $\mathbf{p}, \mathbf{P}(\mathbf{q},\mathbf{Q})$ коммутируют с операторами L_g (K_g), и инвариантные пары подпространств приводят представления L_g (K_g).

В статьях [4, 5] доказано, что устойчивость (неустойчивость) тривиального решения (даже для неавтономного) уравнения (2.14) в достаточно общих условиях определяется РС (2.22) со следствиями для исследования устойчивости (неустойчивости) разветвляющихся решений.

Интересен случай, когда $\sigma_A^+(B) = \emptyset$. Тогда $D_k = D_k^- \dot{+} D_k^0$, $x(t) = \xi(t)\cdot\phi + y(t)$ и центральное многообразие имеет вид $\xi(t)\cdot\phi+y(\xi(t)\cdot\phi)$. Здесь уравнение (2.21) дает

$$\begin{gathered}\overset{\sqcap}{A}\, y'(\xi(t)\cdot\phi)(\tfrac{d\xi}{dt}\cdot\phi)=\overset{\sqcap}{B}\, y(\xi(t)\cdot\phi)+(I-\mathbf{q})R(\xi(t)\cdot\phi+y(\xi(t)\cdot\phi)),\\ y(0)=0,\ \ y'(0)=0.\end{gathered}\tag{2.23}$$

В комбинации с (2.22) это дает возможность определения центрального многообразия $w(\xi(t)\cdot\phi)=\xi(t)\cdot\phi+y(\xi(t)\cdot\phi)$ последовательными приближениями при условии достаточной гладкости оператора $y(\xi\cdot\phi)$. Однако на этом пути возникают существенные трудности, связанные с тем фактом, что система (2.22) является дифференциально-алгебраической, т.е. дифференциальные уравнения для функций $\xi_{i1}(t)$, $i=1,\dots,m$ отсутствуют. Можно найти $y(\xi\cdot\phi)$ итерациями, дифференцируя первые уравнения (2.22).

Замечание 4. Теорема 2 и все следствия остаются справедливыми для уравнения, зависящего от параметра

$$A\frac{dx}{dt}=Bx-R(x,\lambda),\quad R(0,\lambda)\equiv 0,\quad R_x(0,0)=0,\tag{2.24}$$

($\lambda\in\Lambda$, Λ-некоторое банахово пространство) в малой окрестности $\lambda=0$, где, как и ранее, $\mathrm{Re}\,\sigma_A(B)\neq 0$, т.е. $\lambda=0$ не является точкой бифуркации. Однако все функции w, z_R и y_R будут зависеть от малого параметра ε.

2.3.2. Об одном случае $\sigma_A^0(B)\neq\emptyset$

Рассмотрим здесь случай, когда $\sigma_A^+(B)=\emptyset$, но $\sigma_A^0(B)=\{\mu\in\sigma_A(B)|Re\ \mu=0\}\neq$ $\neq\emptyset$ содержит некоторое конечное число $2n=2n_1+\ldots+2n_\ell$ A-собственных значений $\pm\alpha_s$ кратностей n_s, $s=1,\dots,\ell$, $\alpha_s=\kappa_s\alpha$, $\alpha\neq 0$ с взаимно простыми $\kappa_s>0$ или (и) нулевым собственным значением. Без ограничения общности предположим, что уравнение (1.1) записано в виде системы

$$\begin{array}{l}A_1\dot x=B_1x-f(x,y)\\ A_2\dot y=B_2y-R(x,y),\end{array}\quad A=\begin{pmatrix}A_1&0\\0&A_2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}B_1&0\\0&B_2\end{pmatrix},\tag{2.25}$$

где линейные операторы $A_1,B_1:E_1^{k_{B_1}}\to E_{2,k_{B_1}}$ ($k_{B_1}=2n_1p_1+\ldots+2n_\ell p_\ell$, p_s–длины жордановых цепочек для $\pm\alpha_s, s=1,\dots,\ell$) действуют в инвариантных парах конечномерных подпространств $E_1^{k_{B_1}},E_{2,k_{B_1}}$ и A_2, B_2 действуют в инвариантных парах подпространств $E_1^{\infty-k_{B_1}}$, $E_{2,\infty-k_{B_1}}$. Таким образом, $\sigma_{A_1}(B_1)=\sigma_A^0(B)$ и $\sigma_{A_2}^0(B_2)=\emptyset$. Здесь f и R являются C^2-функциями, обращающимися в ноль вместе со своими первыми производными.

Основное предположение в этом случае:

$$\mathcal{N}(A_1)=\{0\},\quad \mathcal{N}(A_2)=\mathrm{span}\,\{\phi_{(2)1},\dots,\phi_{(2)m_2}\}.\tag{2.26}$$

Тогда в условиях п. 2.3.1 существует функция $y_R(\xi_2(t)\cdot\phi_{(2)},x)$, убывающая вместе со своими первыми производными, такая, что второе уравнение (2.25) сводится к системе

$$\overset{\sqcap}{A}_2\,\frac{dy_R}{dt}=\overset{\sqcap}{B}_2\,y_R-(I-\mathbf{q}_{(2)})R(x,\xi_2(t)\cdot\phi_{(2)}+y_R(\xi_2(t)\cdot\phi_{(2)},x))\tag{2.27}$$

($\mathbf{q}_{(2)}=\sum\limits_{i=1}^{m_2}\sum\limits_{j=1}^{q_{2,i}}<\cdot,\hat\psi_{(2),i}^{(j)}>\ \zeta_{(2)}^{(j)}:E_{2,\infty-k_{A_2}}\to\mathrm{span}\{\zeta_{(2)i}^{(j)}\}$, $\overset{\sqcap}{A}_2,\overset{\sqcap}{B}_2$ действуют в инвариантной паре подпространств $E_1^{\infty-k_{B_1}-k_{A_2}}$, $E_{2,\infty-k_{B_1}-k_{A_2}}$),

$$\begin{gathered} 0=\xi_{2iq_{2,i}}(t)- <R(x,\xi_2(t)\cdot\phi_{(2)}+y_R(\xi_2(t)\cdot\phi_{(2)},x)),\hat\psi^{(1)}_{(2),i}>, \\ \dot\xi_{2iq_{2,i}}(t)=\xi_{2i,q_{2,i}-1}(t)- <R(x,\xi_2(t)\cdot\phi_{(2)}+y_R(\xi_2(t)\cdot\phi_{(2)},x)),\hat\psi^{(2)}_{(2),i}>, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot\xi_{2i2}(t)=\xi_{2i1}(t)- <R(x,\xi_2(t)\cdot\phi_{(2)}+y_R(\xi_2(t)\cdot\phi_{(2)},x)),\hat\psi^{(q_{2,i})}_{(2),i}>, \\ \xi_{2i\sigma}(0)=\xi_{2i\sigma},\ \sigma=1,\dots,q_{2,i},\ \ i=1,\dots,m_2. \end{gathered} \tag{2.28}$$

Если система (2.25) имеет начальные условия $x(0)$, $y(0)$, то они должны удовлетворять равенству

$$y(0)=\xi_2\cdot\phi_{(2)}+y_R(\xi_2\cdot\phi_{(2)},x(0)). \tag{2.29}$$

Теперь можно решить задачу

$$A_1\dot x=B_1x-f(x,\xi_2(t)\cdot\phi_{(2)}+y_R(\xi_2(t)\cdot\phi_{(2)},x)) \tag{2.30}$$

с начальным условием $x(0)$, удовлетворяющим (2.29).

Тогда имеем две системы (2.28) и (2.30) на центральном многообразии $y=y_R(\xi_2(t)\cdot\phi_{(2)},x)$.

2.3.3. Вариант теоремы Гробмана–Хартмана для отображений

Согласно п. 2.3.1 уравнение (2.14) можно записать в виде

$$\frac{dw}{dt}=\overset{\sqcap}{A}{}^{-1}\overset{\sqcap}{B}\,w-\overset{\sqcap}{A}{}^{-1}(I_{D_k}-\mathbf{q})R(\xi\cdot\phi+w) \tag{2.31}$$

в пространстве X^1_{k1}. Предположение об ограниченности оператора $\overset{\sqcap}{A}{}^{-1}\overset{\sqcap}{B}$ в X_{k1} позволяет доказать теорему Гробмана–Хартмана для отображений.

Действительно, тогда для малых ξ существует разрешающий оператор $U_\xi(t,\cdot)$: $X_{k1}\to X^1_{k1}, w_0\mapsto w(t)$ задачи (2.31) с начальным условием $w(0)=w_0$ (для $\xi=0$ $U_0(t)$ является линейным). Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. Для малых ξ при $\sigma^0_A(B)=\emptyset$ в предположении ограниченности оператора $\overset{\sqcap}{A}{}^{-1}\overset{\sqcap}{B}$ в X_{k1} существуют разрешающий оператор $U_\xi(t,w_0)$ и гомеоморфизм $\Phi_\xi : X_{k1}\to X^1_{k1}$, $\|\xi\|<<1$ такие, что для $t\in R$ и $w_0\in X_{k1}$ справедливо соотношение

$$U_0(t)\Phi_\xi(w_0)=\Phi_\xi(U_\xi(t,w_0))=\Phi_\xi(w(t)), \tag{2.32}$$

где функция $w(t)$ и начальные значения w_0, ξ_0 удовлетворяют задаче Коши для дифференциально-алгебраической системы (2.22).

3. Разрешающие системы в стационарном случае

3.1. Варианты построения УРК А.М. Ляпунова и Э. Шмидта

Применим методы А.М. Ляпунова и Э. Шмидта к стационарной задаче с малым параметром $\varepsilon\in C^1$

$$Bx=\varepsilon Ax+R(x,\varepsilon),\quad R(0,\varepsilon)=0,\quad \|R(x,\varepsilon)\|=o(\|x\|). \tag{3.1}$$

3.1.1. Вариант А.М. Ляпунова.

Подставляя $x = u + v$, $v \in E_1^{k_B}$, $u \in E_1^{\infty-k_B}$ и учитывая, что $\mathbf{Q}Bu = 0$, $u \in D_B$; $\mathbf{Q}Au = 0$, $u \in E_1^{\infty-k_B} \cap D_A$; $(I-\mathbf{Q})Av = 0$, получаем, что уравнение

$$(I-\mathbf{Q})Bu - \varepsilon(I-\mathbf{Q})Au = (I-\mathbf{Q})R(u+v,\varepsilon) \tag{3.2}$$

определяет изоморфизм $u = u(v,\varepsilon)$ достаточно малой окрестности ω точки $v = 0$, $\varepsilon = 0$ из $E_1^{k_B}\dot{+}C^1$ в малую окрестность $\Omega \subset E_1^{\infty-k_B}$ точки $u = 0$. После подстановки $u(v,\varepsilon)$ в $\mathbf{Q}$-проектированное уравнение (3.1) получаем УРК как РС

$$\mathbf{Q}Bv = \varepsilon\mathbf{Q}Av + \mathbf{Q}R(u(v,\varepsilon)+v,\varepsilon) = 0 \tag{3.3}$$

и в координатной форме

$$\tau(\xi,\varepsilon) \equiv (\mathcal{A}_B - \varepsilon\mathcal{A}_A)\xi - \mathbf{Q}R(u(\xi,\varepsilon)+\xi\cdot\varphi,\varepsilon) = 0 \tag{3.4}$$

или

$$\left\{\begin{array}{l} 0 = \varepsilon\xi_{ip_i} + \ <R(u(\xi,\varepsilon)+\xi\cdot\varphi,\varepsilon),\psi_i^{(1)}> , \\ \xi_{ip_i} = \varepsilon\xi_{ip_i-1} + \ <R(u(\xi,\varepsilon)+\xi\cdot\varphi,\varepsilon),\psi_i^{(2)}> , \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \xi_{i2} = \varepsilon\xi_{i1} + \ <R(u(\xi,\varepsilon)+\xi\cdot\varphi,\varepsilon),\psi_i^{(p_i)}> \ . \end{array}\right. \tag{3.5}$$

3.1.2. Вариант Э. Шмидта.

В соответствии с леммой 1 и обобщенной леммой Э. Шмидта [1] существует ограниченный оператор $\Gamma = \widehat{B}^{-1}$, обратный к оператору

$$\widehat{B} = \overset{\sqcap}{B} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{p_i} <\cdot, A^*\psi_i^{(p_i+1-s)}> \ A\varphi_i^{(s-1)} = B + V = B + \sum_{i=1}^{n} <\cdot,\gamma_i^{(1)}> \ z_i^{(1)}$$

($\varphi_i^{(0)} \overset{\text{def}}{\equiv} \varphi_i^{(p_i)}$, $\varphi_i^{(p_i+1)} = \varphi_i^{(1)}$, $A\varphi_i^{(0)} = A\varphi_i^{(p_i)} = z_i^{(1)}$, $\overset{\sqcap}{B} = B|_{E_1^{\infty-k_B}} : E_1^{\infty-k_B} \to E_{2,\infty-k_B}$), сводящий уравнение (3.1) к следующим эквивалентным УРК [10]:

$$\left\{\begin{array}{l} t_{j1}(\xi,\varepsilon) \equiv -\frac{\varepsilon^{p_j}}{1-\varepsilon^{p_j}}\xi_{j1} - \ <(I-\varepsilon A\Gamma)R(w(\xi,\varepsilon)+\xi\cdot\varphi,\varepsilon),\psi_j^{(1)}> = 0, \\ t_{js}(\xi,\varepsilon) = \xi_{js} - \frac{\varepsilon^{s-1}}{1-\varepsilon^{p_i}} - \ <(I-\varepsilon A\Gamma)^{-1}R(w(\xi,\varepsilon)+\xi\cdot\varphi,\varepsilon),\psi_j^{(p_j+2-s)}> = 0, \\ s = 2,\dots,p_j,\ j = 1,\dots,n, \end{array}\right. \tag{3.6}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \varepsilon^{p_j}\xi_{j1} + \ <R(w(\xi,\varepsilon)+\xi\cdot\varphi,\varepsilon),\psi_j^{(1)} + \varepsilon\psi_j^{(2)} + \ldots + \varepsilon^{p_j}\psi_j^{(p_j)}> = 0, \\ (1-\varepsilon^{p_j})\xi_{j2} - \varepsilon\psi_{j1} - \\ - \ <R(w(\xi,\varepsilon)+\xi\cdot\varphi,\varepsilon),\psi_j^{(p_j)} + \varepsilon\psi_j^{(1)} + \ldots + \varepsilon^{p_j-1}\psi_j^{(p_j-1)}> = 0, \\ (1-\varepsilon^{p_j})\xi_{j3} - \varepsilon^2\xi_{j1} - \\ - \ <R(w(\xi,\varepsilon)+\xi\cdot\varphi,\varepsilon),\psi_j^{(p_j-1)} + \varepsilon\psi_j^{(p_j)} + \varepsilon^2\psi_j^{(1)} + \ldots + \varepsilon^{p_j-1}\psi_j^{(p_j-2)}> = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (1-\varepsilon^{p_j})\xi_{jp_j} - \varepsilon^{p_j-1}\xi_{j1} - \\ - \ <R(w(\xi,\varepsilon)+\xi\cdot\varphi,\varepsilon),\psi_j^{(2)} + \varepsilon\psi_j^{(3)} + \ldots + \varepsilon^{p_j-2}\psi_j^{(p_j)} + \varepsilon^{p_j-1}\psi_j^{(1)}> = 0, \end{array}\right. \tag{3.7}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \varepsilon^{p_j}\xi_{j1}+ \ <R(w(\xi,\varepsilon)+\xi\cdot\varphi,\varepsilon),\psi_j^{(1)}+\varepsilon\psi_j^{(2)}+\ldots+\varepsilon^{p_j-1}\psi_j^{(p_j)}>=0,\\ \varepsilon^{p_j-1}\xi_{j2}+ \ <R(w(\xi,\varepsilon)+\xi\cdot\varphi,\varepsilon),\psi_j^{(1)}+\varepsilon\psi_j^{(2)}+\ldots+\varepsilon^{p_j-2}\psi_j^{(p_j-1)}>=0,\\ \varepsilon^{p_j-2}\xi_{j3}+ \ <R(w(\xi,\varepsilon)+\xi\cdot\varphi,\varepsilon),\psi_j^{(1)}+\varepsilon\psi_j^{(2)}+\ldots+\varepsilon^{p_j-3}\psi_j^{(p_j-2)}>=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \varepsilon^2\xi_{p_j-1}+ \ <R(w(\xi,\varepsilon)+\xi\cdot\varphi,\varepsilon),\psi_j^{(1)}+\varepsilon\psi_j^{(2)}>=0,\\ \varepsilon\xi_{jp_j}+ \ <R(w(\xi,\varepsilon)+\xi\cdot\varphi,\varepsilon),\psi_j^{(1)}>=0, \quad j=1,\ldots,n \end{array}\right. \tag{3.8}$$

и обратно к системе (3.5).

Замечание 5. Система (3.8), полученная эквивалентными преобразованиями УРК Э.Шмидта (3.6), эквивалентна УРК А.М.Ляпунова (3.5), но, вообще говоря, не совпадает с ней.

3.2. Применение свойств сплетающих операторов

Рассмотрим стационарное уравнение (3.1) со свойствами L, K-сплетения (2.5).

Теорема 5. Путь в стационарном уравнении (3.1) операторы A, B и R сплетаются парой L, K, оператор L обратим и выполняется условие I. Тогда УРК Ляпунова (3.4) наследует свойства сплетения матрицей $\hat{\mathcal{A}}$.

Действительно, в (3.1) операторы B, A и R L, K-коммутируют, и, согласно лемме 6, $\mathbf{Q}K = K\mathbf{Q}$. Следовательно, в силу следствия 2 УРК (3.4) сплетается матрицей $\hat{\mathcal{A}}$:

$$\tilde{\tau}(\xi,\varepsilon)=(\hat{\mathcal{A}}\tau)(\xi,\varepsilon)=\tau(\hat{\mathcal{A}}\xi,\varepsilon)=\tau(\tilde{\xi},\varepsilon), \tag{3.9}$$

где $\hat{\mathcal{A}}$ имеет вид (2.11) с компонентами α_{ij}.

Замечание 6. 1^0. Для случая, когда A-ЖН не является триканоническим, соответствующее УРК сплетается матрицами $\hat{\mathcal{A}}$ и $\hat{\mathcal{B}}$.

2^0. Теорема 5 остается верной для более общего уравнения

$$Bx = A(\varepsilon)x + R(x,\varepsilon),\ R(0,\varepsilon)=0, D(A(\varepsilon))=D(A), \|R(x,\varepsilon)\| = o(\|x\|), \|x\|\to 0$$

в условиях существования триканонического A-ЖН для оператор-функции $B-A(\varepsilon)$. В представленных доказательствах нарушается только равенство $\mathbf{Q}A(\varepsilon)u = 0$, $u\in E_1^{\infty-k_A}\cup D_A$ [9].

Теорема 6. Пусть для стационарного уравнения (3.1) справедливы утверждения теоремы 5. Тогда УРК Э. Шмидта (3.7) и (3.8) наследуют свойство сплетения (3.9) относительно матрицы $\hat{\mathcal{A}}$.

В этой ситуации операторы L и K на подпространствах $E_1^{k_B}$ и E_{2,k_B} представляются той же самой матрицей $\hat{\mathcal{A}}$. Тогда доказательство проводится по схеме предыдущей теоремы 5 с $Lw(v,\varepsilon) = w(Lv,\varepsilon)$ в силу обратимости оператора K.

Замечание 7. Для стационарного уравнения (3.1) интересен случай, когда УРК наследует групповое свойство сплетения, т.е. сплетающие операторы L и K порождают непрерывные группы преобразований. В этой ситуации возможна редукция УРК по числу переменных [21, 22]. Однако редукция УРК по числу уравнений при действии той же группы преобразований возможна, вообще говоря, не всегда из-за вида нелинейности $R(x,\varepsilon)$. Однако, если осуществима редукция как по числу неизвестных ξ_{j1}, так и по числу уравнений, отвечающих векторам $\psi_j^{(1)}$, происходит редукция УРК сразу по жордановым цепочкам. Это обусловлено структурой УРК (3.5), (3.7), (3.8).

4. Инвариантная редукция УР, возможность редукции укорочения

Пусть E_1 и E_2 — вещественные банаховы пространства, $\lambda \in R^1$ — бифуркационный параметр. Рассматривается задача о точке бифуркации

$$Bx - R(x,\lambda) = 0, \quad R(0,\lambda) \equiv 0, \; R_x(0,0) = 0. \tag{4.1}$$

Здесь $B : D(B) \subset E_1 \to E_2$ — замкнутый линейный фредгольмов оператор с плотной в E_1 областью определения $D(B)$, $\dim \mathcal{N}(B) = n > 1$, и нелинейный оператор $R : \Omega \subset E_1 \times R^1 \to E_2$ является достаточно гладким или аналитическим в некоторой окрестности Ω. Предположим, что уравнение (4.1) допускает l-параметрическую непрерывную группу $G(a)$, $a = (a_1, \dots, a_l) \subset D \subset R^l$, т.е. существуют представления $L(a)$ в E_1 и $K(a)$ в E_2, сплетающие операторы B и R

$$K(a)B = BL(a), \quad K(a)R(x,\lambda) = R(L(a)x,\lambda). \tag{4.2}$$

Кроме того, прямые дополнения $E_1^{\infty-n}$, порожденные некоторым выбором биортогональных систем $\{\varphi_j;\gamma_j\}_1^n$, $\mathcal{N}(B) = \mathrm{span}\{\varphi_1,\dots,\varphi_n\}$, $\gamma_j \in E_1^*$, $<\varphi_i,\gamma_j> = \delta_{ij}$ и $\{z_j;\varphi_j\}_1^n$, $\mathcal{N}^*(B) = \mathrm{span}\{\psi_1,\dots,\psi_n\}$, $z_j \in E_2$, $<z_k,\psi_j> = \delta_{kj}$, предполагаются инвариантными относительно $L(a)$ (условие I). Хотя в этой ситуации подпространства $\mathbf{\Gamma} = \mathrm{span}\{\gamma_1,\dots,\gamma_n\}$ и $\mathcal{N}^*(B)$ являются L^*- и K^*-инвариантными из (4.2), вообще говоря, не следует $K(a)$-инвариантность подпространства $E_{2,n} = \mathrm{span}\{z_1,\dots,z_n\}$.

4.1 Инвариантная редукция и частичная потенциальность УР

В условиях групповой симметрии уравнения (4.1) с нетеровым оператором B подпространства $E_1^n = \mathcal{N}(B)$ и $E_{2,\infty-m} = \mathcal{R}(B)$ в разложениях $E_1 = E_1^n \dot{+} E_1^{\infty-n}$, $E_2 = E_{2,m} \dot{+} E_{2,\infty-m}$ являются G-инвариантными. Следовательно, для любого $\varphi = \sum\limits_1^n \tau_i\varphi_i$ в координатном подпространстве $\mathcal{T}$

$$L_g\varphi_i = \mathcal{A}_g'\varphi_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ji}(g)\varphi_j \Rightarrow \tilde{\tau}_i = (\mathcal{A}_g\tau)_i = \sum \alpha_{ij}(g)\tau_j \tag{4.3}$$

действует матричное представление $\mathcal{A}_g$. Аналогично преобразования K_g^* в инвариантном подпространстве $N^*(B)$ определяют матричное представление $\mathcal{B}_g$ равенствами

$$K_g^*\psi_k = \sum_{j=1}^m \beta_{kj}\psi_j, \quad k = 1,\dots,m. \tag{4.4}$$

Справедливо свойство наследования симметрии для УР.

Теорема 7. [27]. Пусть уравнение (4.1) инвариантно относительно группы G, $n = \dim \mathcal{N}(B) \ge 1$, $m = \dim \mathcal{N}^*(B) \ge 1$ и выполяется условие I; для фредгольмова случая $m = n \ge 1$ и подпространство $E_{2,n}$ инвариантно относительно K_g. Тогда УР наследует G-симметрию, т.е.

$$f_k(\tilde{\tau},\lambda) = f_k(\mathcal{A}_g\tau,\lambda) = (\mathcal{B}_g f)_k(\tau,\lambda) = \tilde{f}_k(\tau,\lambda), \; k = 1,\dots,m; \tag{4.5}$$

$$t_k(\tilde{\tau},\lambda) = t_k(\mathcal{A}_g\tau,\lambda) = (\mathcal{A}_g t)_k(\tau,\lambda) = \tilde{t}_k(\tau,\lambda), \quad k = 1,\dots,n. \tag{4.6}$$

Определение 2. УР $f_k(\tau,\lambda) = 0$, $k = \overline{1,m}$, $\tau = (\tau_1,\dots,\tau_n)$ называется потенциальным, если в некоторой окрестности $\tau = 0$ выполняется равенство

$$f(\tau,\lambda) = d \cdot \mathrm{grad}_\tau U(\tau,\lambda), \quad \mathrm{rank}\, d = \min\,(m,n) \tag{4.7}$$

с $(m \times n)$-матрицей d.

Теорема 8. Пусть во фредгольмовом случае $n > 1$ и УР $f(\tau, \lambda) = 0$ потенциально и G-инвариантно. Тогда его потенциал $U(\tau, \lambda)$ является инвариантном группы $\mathcal{A}_g$ тогда и только тогда, когда

$$\mathcal{A}_g' \, d \, \mathcal{B}_g = d. \tag{4.8}$$

Действительно, вычислим дифференциалы

$$DU(\tau) = <\nabla_\tau U(\tau), d\tau> = <d^{-1} d\nabla_\tau U(\tau), d\tau> = <d^{-1} f(\tau), d\tau> \,,$$
$$DU(\tilde\tau) = <d^{-1} d\nabla_{\tilde\tau} U(\tilde\tau), d\tilde\tau> = <d^{-1} f(\tilde\tau, d\tilde\tau)> = <d^{-1} \mathcal{B}_g f(\tau), \mathcal{A}_g d\tau> =$$
$$= <\mathcal{A}_g' d^{-1} \mathcal{B}_g f(\tau), d\tau> .$$

Следовательно , выполнено (4.8) и обратные рассуждения тоже верны. Если бы $U(\tilde\tau)$ и $U(\tau)$ отличались на некоторую постоянную, то, полагая $g = e$, получили бы, что эта постоянная равна нулю.

Следствие 3. В соответствии с требованием об инвариантности подпространств E_1^n, $E_1^{\infty - n}$, $E_{2,n}$ и $E_{2,\infty-n}$ относительно операторов L и K теорема 8 справедлива и в условиях негрупповой симметрии [28].

Действительно, при ее доказательстве не использовалась обратимость операторов L и K.

Замечание 8. 1^0. Во фредгольмовом случае матричные представления $\mathcal{B}_g$ и $\mathcal{A}_g$ эквивалентны. 2^0. Если уравнениие (4.1) рассматривается в некотором римановом пространстве с метрическим тензором g_{ij}, то во фредгольмовом случае можно выбрать базисы в E_1^n и $E_{2,n}$ так, что матрицы $\mathcal{B}_g = \mathcal{A}_g$ будут псевдоортогональными. Для нелинейно возмущенного уравнения Гельмгольца на сфере $S^2 \subset R^3$ действие группы $SO(3)$ неосновного представления в пространстве сферических функций l-го порядка рассмотрено в [21, 22, 29]. Для аналогичных задач на эллипсоиде или однополостном гиперболоиде в качестве подпространств нулей возникают пространства обобщенных сферических функций [30].

Введем следующее требование [21].

Условие II. Пусть $L(a)$, $a \in D \subset R^l$ — представление l-параметрической непрерывной группы в E_1. Тогда существует базис $\{\varphi_i\}_1^n$ в E_1^n такой, что для любого фиксированного $\varphi = \sum_{i=1}^n \tau_i \varphi_i \in E_1^n$ найдется $a \in D$ и ненулевые постоянные $r_1(\tau), \ldots, r_{l_1}(\tau)$, $n - l_1 \leq l$ такие, что

$$L(a)\varphi = \sum_{j=1}^{l_1} r_j \varphi_{(j)}, \quad \varphi_{(j)} \in \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \quad (r_j \neq 0). \tag{4.9}$$

Замечание 9. 1^0. Поскольку группа $\mathcal{A}_g$ действует в $\mathcal{N}(B)$ с траекториями общего положения, очевидно, что функции $r_j(\tau)$ равны некоторым значениям однородных первой степени (1-однородных, $r_j(c\tau) = c r_j(\tau)$, $c > 0$) инвариантов. В [21] действие такой группы названо l_1-оптимальным, а соответствующие подпространства $\mathcal{T}_s^{l_1} = \{r_1^s, \ldots, r_{l_1}^s\} \subset \mathcal{T}^n = \{\tau | \forall \varphi = \sum_{i=1}^n \tau_i \varphi_i\}$ — порождающими траектории.

2^0. Можно дать простую геометрическую интерпретацию действия $L(a)$ в E_1^n при **условии II′** в E_1^n $(\mathcal{T}^n)$: существует полная минимальная система $\mathcal{M}$ многообразий, порождающих траектории $M_j \subset E_1^n$ $(\mathcal{M}_j \subset \mathcal{T}^n)$, $j = \overline{1,p}$, $\dim M_j = l_1$, таких, что для любого $\varphi \in E_1^n$ $(\tau \in \mathcal{T}^n)$ найдется $a \in D \subset R^l$ и номер j такой, что $L(a)\varphi \in M_j$ $(\mathcal{A}(a)\tau \in \mathcal{M}_j)$. В работах [21, 22] предложены методы нахождения порождающих многообразий $\mathcal{M}_j$, ортогональных или трансверсальных траекториям представления $\mathcal{A}(a)$ в $\mathcal{T}^n$.

Пример. $\mathcal{N}(B) = \mathrm{span}\{\cosh x, \sinh x\}$ и $\mathcal{A}(a)$ является гиперболическим поворотом. Здесь система порождающих подпространств в $\mathcal{T}^2$ содержит координатные оси и четыре луча, направленных вдоль биссектрис координатных углов. Порождающими многообразиями являются $\tau_1\tau_2 = 1$ или $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = 0$ и $\tau_1^2 - \tau_2^2 = 0$.

В этом примере и в общей ситуации инварианты $r_j(\tau)$ являются непрерывными 1-однородными функциями, различающими траектории (в данном случае все они общего положения). Они могут быть представлены различными выражениями в некоторых подобластях $\mathcal{T}_s$, $s = \overline{1,p}$ координатного пространства $\mathcal{T}^n$. Можно охарактеризовать эти подобласти неравенствами для однородных форм от τ_j, а траектории в них — точками пересечения с координатными осями τ_j. Каждая траектория в отдельной подобласти характеризуется постоянными значениями этих форм.

Найдем здесь общий вид УР размерности 2, допускающего симметрию $\mathcal{A}(a) = \begin{pmatrix} \cosh a & \sinh a \\ \sinh a & \cosh a \end{pmatrix}$ гиперболического поворота. После дифференцирования (4.6) по a, положив $a = 0$, получаем систему $\sum\limits_{s=1}^{2} \sigma^{js} t_s = \sum\limits_{i,s=1}^{2} \dfrac{\partial t_i}{\partial \tau_i} \sigma^{is} \tau_s$, где $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ — производящий оператор алгебры Ли: $t_2 = \dfrac{\partial t_1}{\partial \tau_1}\tau_2 + \dfrac{\partial t_1}{\partial \tau_2}\tau_1$, $t_1 = \dfrac{\partial t_2}{\partial \tau_1}\tau_2 + \dfrac{\partial t_2}{\partial \tau_2}\tau_1$. Подставляя $t_j = \sum\limits_{p+q=s\geq 1} t_{pq}^{(j)} \tau_1^p \tau_2^q$ в эту систему и вычисляя коэффициенты однородных форм $\sum\limits_{p+q=s} t_{pq}^{(j)} \tau_1^p \tau_2^q$, находим, что $t_{pq}^{(j)} = 0$ для $s = p + q = 2k$ и

$$\sum_{p+q=2k+1} t_{pq}^{(1)} \tau_1^p \tau_2^q = (a_k\tau_1 + b_k\tau_2)(\tau_1^2 - \tau_2^2)^k, \quad \sum_{2k+1} t_{pq}^{(2)} \tau_1^p \tau_2^q = (b_k\tau_1 + a_k\tau_2)(\tau_1^2 - \tau_2^2)^k.$$

В результате получаем теорему

Теорема 9. УР с симметрией гиперболического поворота имеет вид

$$t_1(\tau,\lambda) \equiv \sum_{k,j} c_{kj}\lambda^j (\tau_1^2 - \tau_2^2)^k (\tau_1 \cos\alpha_{kj} + \tau_2 \sin\alpha_{kj}) = 0, \tag{4.10}$$

$$t_2(\tau,\lambda) \equiv \sum_{k,j} c_{kj}\lambda^j (\tau_1^2 - \tau_2^2)^k (\tau_1 \sin\alpha_{kj} + \tau_2 \cos\alpha_{kj}) = 0.$$

Если, вдобавок, УР допускает отражение $I(t) = (\tau_1, -\tau_2)$, то $\alpha_{kj} = 0$ для всех k, j. В последнем случае (4.10) УР потенциально в смысле определения 2, причем

$$d = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad U(\tau,\lambda) = \sum_{k,j} \frac{c_{kj}}{2(k+1)} \lambda^j (\tau_1^2 - \tau_2^2)^{k+1}.$$

Соотношение (4.8) в теореме 8 обычно не влечет потенциальности УР. Здесь часто возникает ситуация, когда оно потенциально относительно некоторой части величин τ. Тогда УР редуцируется к $(l_1 \times n)$-или $(l_1 \times l_1)$-системам с помощью полной системы функционально независимых инвариантов. Здесь редуцированные системы имеют различные представления в подобластях $\mathcal{T}_s^{l_1}$. Если условие II влечет редукцию УР к $(l_1 \times l_1)$-системам, т.е. осуществляется их одновременная редукция по уравнениям, будем говорить о *редукции укорочения* (РУ).

Можно сформулировать следующее

Утверждение 1. Условия I, II(II$'$) дают возможность редукции УР с помощью полной системы функционально независимых инвариантов. Здесь известные результаты В.А. Треногина и Н.А. Сидорова о существовании бифуркации от собственного значения с нечетным корневым числом [2] позволяют доказать обобщение теоремы существования бифуркации семейств решений [21].

Теорема 10. Пусть уравнение (4.1) с фредгольмовым оператором B инвариантно относительно l-параметрической непрерывной группы G, l_1-оптимально действующей в $\mathcal{N}(B)$, и выполняются условия I, II с редукцией укорочения. Пусть элементам $\{\varphi_{(j)}\}_1^{l_1}$ отвечают подобласть $\mathcal{T}_{s_0}$ ($E_1^{(l_1)} = \operatorname{span}\{\varphi_{(j)}\}_1^{l_1}$) и обобщенный жорданов набор нечетной длины. Тогда существует l-параметрическое семейство решений вида $L_g x'$, где x' является малым решением (4.1) в подпространстве $E_{1,s_0}^{(l_1)} \dot{+} E_1^{\infty-n}$.

Действительно, уравнение (4.1) сводится тогда к уравнению

$$B_{s_0} x' = Q_{s_0}^{(l_1)} R(x', \lambda), \tag{4.11}$$

где $B_{s_0} : E_{1,s_0}^{l_1} \dot{+} E_{1,s_0}^{\infty-n} \to E_{2,\infty-n} \dot{+} \operatorname{span}\{z_{(j)}\}_1^{l_1}$ — фредгольмов оператор, совпадающий с B на $E_{1,s_0}^{l_1} \dot{+} E_1^{\infty-n}$ с областью определения $E_{2,\infty-n}$ в $E_{2,s_0,l_1} \dot{+} E_{2,\infty-n}$ и $Q_{s_0}^{(l_1)} = \sum\limits_{j=1}^{l_1} <\cdot, \psi_{(j)}> z_{(j)}$. Теперь можно использовать теорему [2] о существовании бифуркации для собственного значения с нечетным корневым числом.

Обозначим редуцированное УР в подобласти $\mathcal{T}_{s_0}^{l_1}$ как

$$\hat{t}_{s_0,j}(r_1, \ldots, r_{l_1}, \lambda) = 0, \quad j = 1, \ldots, l_1 \tag{4.12}$$

и будем называть определяемое им l-параметрическое семейство решений *редуцированно-простым*, если ему соответствует некоторое простое решение (4.11). Пусть это простое решение представимо рядом по дробным степеням λ, $\lambda^{1/s} = \varepsilon$. Тогда имеем

Следствие 4. Некоторое l-параметрическое решение уравнения (4.1), соответствующее подобласти $\mathcal{T}_{s_0}^{l_1}$, является редуцированно-простым тогда и только тогда, когда

$$\det \left[\frac{\partial \hat{t}_{s_0,i}(r_1(\lambda), \ldots, r_{l_1}(\lambda), \lambda)}{\partial r_j} \right]_{i,j=\overline{1,l_1}\,\lambda=\varepsilon^s} = a(\varepsilon) \neq 0.$$

Описанная в теореме 10 ситуация возникает в задачах с симметрией $SO(2) \times SO(2) \times \tilde{G}^1(\Pi_0)$ ($\tilde{G}^1(\Pi_0)$ — группа вращений-отражений прямоугольника Π_0) в теории капиллярно-гравитационных поверхностных волн и с симметрией $SO(2) \times SO(2) \times SO(2) \times \tilde{G}^1(\Pi_0)$ ($\tilde{G}^1(\Pi_0)$-группа вращений-отражений октаэдра Π_0) в задаче о кристаллизации в физике фазовых переходов в статистической теории кристалла и, вообще, для задач с нарушением симметрии, когда УР в R^{2n} имеет $\times_n SO(2) \times \tilde{G}^1(\Pi_0)$-симметрию, где $\tilde{G}^1(\Pi_0)$ является группой вращений-отражений параллелотопа Π_0 (в частности n-мерного куба) только в случаях низшей размерности вырождения [21, 22, 31]. Соответственно, в капиллярно-гравитационных волнах это случай 4-х мерного вырождения, а в задаче о кристаллизации — это 6-мерное вырождение. Для случаев более высокого вырождения УР редукция укорочения невозможна. Здесь имеется частичная потенциальность системы разветвления для каждой пары $(2k-1)$ и $(2k)$ уравнений, полная потенциальность вопреки [22] отсутствует. Теорема 10 также применима при вырождении n-го порядка оператора B при действии в $\mathcal{N}(B)$ основного $SO(n)$-представления для $n \geq 3$. Здесь УР потенциально и $l_1 = 1$ [22, 29].

Эти примеры позволяют ввести предположение о связи между возможностью редукции укорочения и свойствами потенциальности систем разветвления . В частности, в случае полной потенциальности УР можно доказать теоремы существования [33, 34],используя редукцию укорочения [21, 22] и теорию индекса Морса-Конли [32].

Здесь полезно более детально рассмотреть задачи о поверхностных волнах и кристаллизации (см. например [21, 22]). В обоих случаях редукция систем разветвления по неизвестным может быть достигнута переходом к полярным координатам в комплекснозначном базисе

$$\xi_{2k-1} = \sigma_k e^{2\pi\kappa_k i}, \quad \xi_{2k} = \sigma_k e^{-2\pi\kappa_k i}, \quad k = 1, \ldots, \frac{n}{2}, \tag{4.13}$$

$$\sigma_k = (\tau_{2k-1}^2 + \tau_{2k}^2)^{1/2}, \quad \kappa_k = \arctan\frac{\tau_{2k}}{\tau_{2k-1}}. \tag{4.14}$$

Тогда для первой задачи в случае 4-мерного вырождения имеем редуцированное УР вида

$$\hat{t}_1(\sigma_1, \sigma_2, \varepsilon) = 0, \quad \hat{t}_3(\sigma; \varepsilon) \equiv \hat{t}_1(\sigma_2, \sigma_1; \varepsilon) = 0,$$

а для второй задачи в случае 6-мерного вырождения

$$\hat{t}_1(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3; \varepsilon) = \hat{t}_1(\sigma_1, \sigma_3, \sigma_2; \varepsilon) = 0,$$
$$\hat{t}_3(\sigma, \varepsilon) = \hat{t}_3 = \hat{t}_1(\sigma_2, \sigma_1, \sigma_3; \varepsilon) = 0, \quad \hat{t}_5(\sigma, \varepsilon) = \hat{t}_1(\sigma_3, \sigma_1, \sigma_2; \varepsilon) = 0,$$

т.е. имеет место редукция укорочения. Однако в случаях более высоких вырождений, несмотря на выполнение условия II, при действии l-параметрической непрерывной группы вращений ($l = 2$ и 3 соответственно) можно "уничтожить" только l неизвестных τ, и система разветвления редуцируется к $(l_1 \times n)$-системе.

К примеру, во второй задаче для вырождения 8-го порядка оператора B

$$\mathcal{N}(B) = \operatorname{span}\{\varphi_1 = \exp[2\pi(x+y+z)i], \varphi_2 = \bar{\varphi}_1, \varphi_3 = \exp[2\pi(-x+y+z)i],$$
$$\varphi_4 = \bar{\varphi}_3, \varphi_5 = \exp[2\pi(x-y+z)i], \varphi_6 = \bar{\varphi}_5, \varphi_7 = \exp[2\pi(x+y-z)i], \varphi_8 = \bar{\varphi}_7\}$$

и, соответственно, для 3-параметрической группы сдвигов ($\tilde{x} = x + a_1$, $\tilde{y} = y + a_2$, $\tilde{z} = z + a_3$) выполнено соотношение симметрии

$$e^{2\pi(a_1+a_2+a_3)i} t_1(\sigma; \kappa) = t_1(\sigma; \kappa_1 + a_1 + a_2 + a_3, \quad \kappa_2 - a_1 + a_2 + a_3,$$
$$\kappa_3 + a_1 - a_2 + a_3, \quad \kappa_4 + a_1 + a_2 - a_3).$$

Поэтому редукция УР может быть достигнута подстановкой, например, $a_1+a_2+a_3 = = -\kappa_1$, $-a_1 + a_2 + a_3 = -\kappa_2$, $a_1 - a_2 + a_3 = -\kappa_3 \Rightarrow a_1 + a_2 - a_3 = -\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3$. Тогда $t_1(\sigma; \kappa) = e^{2\pi i\kappa_1} t_1(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4; 0, 0, 0, \beta) = e^{2\pi i\kappa_1} \hat{t}_1(\sigma; \kappa)$, где

$$\beta = -\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4 = -\arctan\frac{\tau_2}{\tau_1} + \arctan\frac{\tau_4}{\tau_3} + \arctan\frac{\tau_6}{\tau_5} + \arctan\frac{\tau_8}{\tau_7}.$$

Симметрия $\tilde{G}^1(\Pi_0)$ приводит к соотношению

$$\hat{t}_1(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4; \beta) = \hat{t}_1(\sigma_1, \pi(\sigma_2, \sigma_3, \sigma_4); \beta), \tag{4.15}$$

где через $\pi(\sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$ обозначены всевозможные перестановки $\sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$.

В результате УР редуцируется к системе (к 5×8-системе):

$$t_1(\sigma; \kappa) = e^{2\pi\kappa_1 i} \hat{t}_1(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4; \beta) = 0, \; t_3(\sigma; \kappa) = e^{2\pi\kappa_2 i} \hat{t}_1(\sigma_2, \sigma_1, \sigma_3, \sigma_4; -\beta) = 0,$$
$$t_5(\sigma; \kappa) = e^{2\pi\kappa_3 i} \hat{t}_1(\sigma_3, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_4; -\beta) = 0, \; t_7(\sigma; \kappa) = e^{2\pi\kappa_4 i} \hat{t}_1(\sigma_4, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3; -\beta) = 0,$$
$$t_{2k}(\sigma; \kappa) = e^{-2\pi\kappa_k i} \hat{t}_{2k-1}(\sigma; \beta) = 0$$

со свойством (4.15). Нетрудно проверить, что β является инвариантом 3-параметрической непрерывной группы сдвигов. Несмотря на выполнение условия II, инвариантная редукция не может дать редукцию укорочения. Здесь нужно отметить, что в последнем случае есть частичная потенциальность УР в каждой $(2k-1;2k)$ паре уравнений.

Замечание 10. Однако в случаях инвариантной редукции УР (условия II, II$'$) без укорочения можно найти решения $(l_1\times n)$-редуцированного УР в некоторых подпространствах $\mathcal{T}_s^{(l_1)}$ (здесь при отдельных значениях β).

4.2. Возможности редукции укорочения

Введем следующие требования, гарантирующие редукцию укорочения и дающие возможность применения итерационных процедур для нахождения семейств разветвляющихся решений.

Условие III. В $\mathcal{T}_s^{(l_1)}$ простые решения уравнений $\tilde{B}_s w = Q_s^{(l_1)} R(w+\sum\limits_{j=1}^{l_1} r_j\varphi_{(j)},\lambda)$ и $\tilde{B}w = R(w+\sum\limits_{j=1}^{l_1} r_j\varphi_{(j)},\lambda)$, $\tilde{B}_s = B+\sum\limits_{j=1}^{l_1} <\cdot,\gamma_{(j)}> z_{(j)}$, $\tilde{B}_s^{-1}=\Gamma_s$; $\tilde{B} = B+ +\sum\limits_1^n <\cdot,\gamma_j> z_j$, $\tilde{B}^{-1}=\Gamma$ совпадают, т.е. оператор R сплетается проекторами

$$P_s^{(l_1)} = \sum_{j=1}^{l_1} <\cdot,\gamma_{(j)}> \ \varphi_{(j)} \quad \text{и} \quad Q_s^{(l_1)} = \sum_{j=1}^{l_1} <\cdot,\psi_{(j)}> \ z_{(j)}.$$

Условие III$'$. В $\mathcal{T}_s^{l_1}$ простые решения уравнений $\hat{B}u = Q_s^{(l_1)} R(u+\sum\limits_1^{l_1} r_j\varphi_{(j)},\lambda)$ и $\hat{B}u = R(u+\sum\limits_1^{l_1} r_j\varphi_{(j)},\lambda)$, $(\hat{B} = B|_{E_1^{\infty-n}} : E_1^{\infty-n}\to E_{2,\infty-n})$ совпадают, т.е. оператор R сплетается проекторами $P_s^{(l_1)}$ и $Q_s^{(l_1)}$

Замечание 11. 1^0. Условия III (III$'$) согласуются с вариантами Э. Шмидта (А.М. Ляпунова) конструкции Ляпунова-Шмидта [1]. 2^0. Условия III и III$'$ реализуются в случаях низшей размерности вырождения оператора B при наличии $\times_n SO(2)\times\tilde{G}^1(\Pi_0)$-симметрии, а также при условии потенциальности УР.

Утверждение 2. Условия III и III$'$ о свойствах сплетения оператора R проекторами являются необходимыми и достаточными условиями редукции укорочения УР.

Эти условия сводят исходное нелинейное уравнение к некоторым подпространствам (в задачах с нарушением симметрии иногда к подпространствам четных или нечетных функций). Тогда можно применить обычную итерационную процедуру непосредственно к нелинейному редуцированному уравнению. Она обычно связана с простейшей (или иными) конфигурацией отрезков диаграммы Ньютона [35].

5. Решения задачи о капиллярно-гравитационных волнах с ромбической решеткой периодичности

В работе [36] остались неисследованными периодические разветвляющиеся решения с симметрией косоугольной трансляционной решетки. Восполним этот пробел, рассмотрев преимущественно случай ромбической решетки периодичности. Помимо построения асимптотики разветвляющихся решений будут найдены также решения, инвариантные относительно нормальных делителей дискретной группы симметрии.

5.1. Постановка задачи. Пространство нулей линеаризованного оператора

Определяются периодические потенциальные течения флотирующей (без флотации $k=0$) тяжелой капиллярной жидкости в пространственном слое со свободной границей $f(x,y)$, близкой к горизонтальной плоскости $z=0$, ответвляющиеся от основного движения с постоянной скоростью V в направлении оси Ox. Потенциал скорости имеет вид $\phi(x,y,z)=Vx+\Phi(x,y,z)$, $h-$толщина слоя, $\sigma-$ коэффициент поверхностного натяжения, ρ — плотность несущей жидкости, ρ_0 — поверхностная плотность флотирующего вещества, g — ускорение свободного падения. Описывающая ответвляющиеся течения система дифференциальных уравнений в безразмерных переменных ($k=\rho_0/(\rho h)$, $F=\sqrt{hg/V}$ — величина, обратная числу Фруда, $\gamma=\sigma/(\rho g h^2)$ — число Бонда) записывается в виде

$$\begin{gathered}\Delta\Phi=0,\quad 1<z<f(x,y);\\ \frac{\partial\Phi}{\partial z}(x,y,-1)=0\quad \text{(условие непротекания на дне}\quad z=-1);\\ \frac{\partial\Phi}{\partial z}-\frac{\partial f}{\partial x}=(\nabla f,\nabla_{xy}\Phi)=\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}\quad \text{при } z=f(x,y);\\ \frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2+F^2f+\frac{k}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}[F^2+(-\nabla f\nabla_{xy}+\frac{\partial}{\partial z})(\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2)]-\\ -\gamma F^2[\frac{\partial}{\partial x}(\frac{f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}})+\frac{\partial}{\partial y}(\frac{f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}})]=\mathrm{const}\quad \text{при}\quad z=f(x,y).\end{gathered}\tag{5.1}$$

Второе условие на свободной границе $z=f(x,y)$ представляет собой интеграл Бернулли для флотирующей жидкости [37]. Система инвариантна относительно двумерной группы сдвигов $L_\beta g(x,y)=g(x+\beta_1,y+\beta_2)$ и отражений

$$\begin{aligned}S_1:&\quad x\to -x,\ \Phi(x,y,z)\to\Phi(-x,y,z),\ f(x,y)\to f(-x,y);\\ S_2:&\quad y\to -y,\ \Phi(x,y,z)\to\Phi(x,-y,z),\ f(x,y)\to f(x,-y).\end{aligned}$$

Для "распрямления" свободной верхней границы выполним в (5.1) замену переменных $\zeta=\dfrac{z-f(x,y)}{1+f(x,y)}$, $\Phi(x,y,f(x,y)+\zeta(1+f(x,y)))=u(x,y,\zeta)$.

Полагая $F^2=F_{mn}^2+\varepsilon$, где F_{mn} — критическое значение числа Фруда, получаем эквивалентную (5.1) систему

$$\begin{gathered}\Delta u=w^{(0)}(u,f),\quad -1<\zeta<0;\\ \frac{\partial u}{\partial\zeta}(x,y,-1)=0;\\ \frac{\partial u}{\partial\zeta}-\frac{\partial f}{\partial x}=w^{(1)}(u,f)\quad \text{при}\quad \zeta=0;\\ \frac{\partial u}{\partial x}+k\frac{\partial^2u}{\partial x\partial\zeta}+F_{mn}^2f-\gamma F_{mn}^2\Delta f=w^{(2)}(u,f,\varepsilon)\ \text{при}\ \zeta=0,\end{gathered}\tag{5.2}$$

где $w^{(0)}(u,f)$, $w^{(1)}(u,f)$, $w^{(2)}(u,f,\varepsilon)$ — малые нелинейности.

Система (5.2) записывается в виде нелинейного функционального уравнения

$$BX=R(X,\varepsilon),\quad R(0,\varepsilon),\quad X=(u,f)$$

— задачи о точке бифуркации с линейным фредгольмовым оператором [38]

$$B:C^{2+\alpha}(\Pi_0\times[-1;0])\dot{+}C^{2+\alpha}(\Pi_0)\to C^{\alpha}(\Pi_0\times[-1;0])\dot{+}C^{\alpha}(\Pi_0)\dot{+}C^{\alpha}(\Pi_0),$$

$0 < \alpha < 1$, где Π_0 — ячейка (ромб) периодичности , порожденная выбором трансляционных векторов $\vec{a}_1 = 2\pi a_1^{-1}\vec{i}$, $\vec{a}_2 = 2\pi a^{-1}(\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}), \theta \neq \pi/2$ в плоскости (x, y) и, соответственно, векторами обратной решетки $\vec{l}^{(j)}$, $j = 1, 2, \ldots$ такими, что $<\vec{l}^{(j)}, \vec{a}_k> = 2\pi\delta_{jk}$, и, следовательно, $\vec{l}^{(1)} = a\sin^{-1}\theta(\sin\theta\vec{i} - \cos\theta\vec{j})$, $\vec{l}^{(2)} = a\sin^{-1}\theta\vec{j}$.

Отметим, что требование эллиптичности равенства Бернулли в сочетании со вторым дифференциальным уравнением на границе $\zeta = 0$ приводит к естественному ограничению на безразмерные параметры вида $k < \gamma F_{mn}^2$.

Положим в (5.2) $f(x, y) = -ic\exp(i<\vec{l}(m), \vec{q}>) = -ic\exp(i<m_1\vec{l}^{(1)} \pm m_2\vec{l}^{(2)}, \vec{q}>)$,

$$s_{m_j}^2 = s_{m_j,m_j}^2 = |\vec{l}(m_j)|^2 = \frac{a^2}{\sin^2\theta}[m_1^2 + m_2^2 \mp 2m_1m_2\cos\theta],$$

и $c = a/(2\pi\sqrt{\sin\theta})$ выбрано так, что $\int\limits_{\Pi_0} |f|^2 ds = 1$.

Тогда из однородной системы ($w^{(0)} = 0$, $w^{(1)} = 0$, $w^{(2)} = 0$) получаем двухточечную граничную задачу для определения функции

$$u = u(\zeta)\exp\Big[\frac{ia}{\sin\theta}(m_1x\sin\theta - m_1y\cos\theta \pm m_2y)\Big]:$$

$$u''(\zeta) - \Big[m_1^2a^2 + \frac{a^2}{\sin^2\theta}(m_2 \mp m_1\cos\theta)^2\Big]u(\zeta) = 0,\ u'(-1) = 0,\ u'(0) = m_1ac.$$

Таким образом,

$$u(\zeta) = \frac{m_1c\sin\theta\coth\dfrac{a\sqrt{m_1^2 + m_2^2 \mp 2m_1m_2\cos\theta}}{\sin\theta}(\zeta + 1)}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 \mp 2m_1m_2\cos\theta}\sinh\dfrac{a\sqrt{m_1^2 + m_2^2 \mp 2m_1m_2\cos\theta}}{\sin\theta}}$$

и в случае 4-х кратного вырождения оператора B в подпространстве $\mathcal{N}(B)$ следует выбрать базис :

$$\varphi_{1,3} = \{u(\zeta), -iv\}\exp\Big[\frac{ia}{\sin\theta}(xm_1\sin\theta - ym_1\cos\theta \pm ym_2)\Big],\ \varphi_2 = \bar{\varphi}_1,\ \varphi_4 = \bar{\varphi}_3.$$

Тогда последнее уравнение системы (5.2) $u_x + ku_{xs} + F^2f - \gamma F^2\Delta f = 0$ при $\zeta = 0$ дает дисперсионное соотношение

$$\begin{aligned} &m_1^2a^2\left[\frac{\sin\theta\cosh\frac{a}{\sin\theta}\sqrt{m_1^2 + m_2^2 \mp 2m_1m_2\cos\theta}}{a\sqrt{m_1^2 + m_2^2 \mp 2m_1m_2\cos\theta}\sinh\frac{a}{\sin\theta}\sqrt{m_1^2 + m_2^2 \mp 2m_1m_2\cos\theta}} + k\right] = \\ &= F^2\left[1 + \gamma\tfrac{a^2}{\sin^2\theta}(m_1^2 + m_2^2 \mp 2m_1m_2\cos\theta)\right]. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Далее нас будет интересовать случай ромбической решетки периодичности при $m_1 = m_2 = m$. Дадим доказательство возможности ее существования.

Условие $m_1 = m_2 = m$ предполагает выбор базиса :

$$\varphi_1 = \{u_1(\zeta), -iv\}\exp\Big[\tfrac{iam}{\cos(\theta/2)}(x\cos(\theta/2) + y\sin(\theta/2))\Big], \quad \varphi_2 = \bar{\varphi}_1,$$
$$\varphi_3 = \{u_2(\zeta), -iv\}\exp\Big[\tfrac{iam}{\sin(\theta/2)}(x\sin(\theta/2) - y\cos(\theta/2))\Big], \quad \varphi_4 = \bar{\varphi}_3,$$

где

$$u_1(\zeta) = \frac{c\cos(\theta/2)\cosh\frac{am(\zeta+1)}{\cos(\theta/2)}}{\sinh\frac{am}{\cos(\theta/2)}}, \quad u_2(\zeta) = \frac{c\sin(\theta/2)\cosh\frac{am(\zeta+1)}{\sin(\theta/2)}}{\sinh\frac{am}{\sin(\theta/2)}}, \quad v = \frac{a}{\pi\sqrt{\sin\theta}}.$$

Тогда для по меньшей мере 4-х кратного вырождения оператора B интеграл Бернулли (4-е уравнение однородной системы) приводит к необходимости выполнения следующих дисперсионных соотношений:

$$m^2a^2\left(\frac{\cos(\theta/2)}{am}\coth\frac{am}{\cos(\theta/2)}+k\right)=F^2\left(1+\gamma\frac{a^2m^2}{\cos^2(\theta/2)}\right), \tag{5.4}$$

$$m^2a^2\left(\frac{\sin(\theta/2)}{am}\coth\frac{am}{\sin(\theta/2)}+k\right)=F^2\left(1+\gamma\frac{a^2m^2}{\sin^2(\theta/2)}\right). \tag{5.5}$$

Лемма 7. Для возможности существования 4-х мерного подпространства $\mathcal{N}(B)$ необходимо и достаточно выполнение неравенства $\gamma>0$, где

$$\gamma=\frac{sin^2\theta}{4a^2m^2}\left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}\coth\frac{am}{\sin(\theta/2)}-\cos\frac{\theta}{2}\coth\frac{am}{\cos(\theta/2)}}{kam\cos\theta+\cos^3\frac{\theta}{2}\coth\frac{am}{\cos(\theta/2)}-\sin^3\frac{\theta}{2}\coth\frac{am}{\sin(\theta/2)}}\right) \tag{5.6}$$

Действительно, исключая число Фруда F^2 из дисперсионных соотношений (5.4) и (5.5), получаем формулу (5.6).

Численный эксперимент доказывает существование таких решений.

Лемма 8. Для возможности существования кратной ромбической ячейки необходимо и достаточно выполнение неравенств $0<k=k(p,q)<1,\ \gamma_{mp}>0,\ \gamma_{mq}>0$, где

$$\begin{gathered}k=\Big\{(p^2-q^2)\Big[\cos^4\tfrac{\theta}{2}\coth\tfrac{amp}{\cos(\theta/2)}\coth\tfrac{amq}{\cos(\theta/2)}+\sin^4\tfrac{\theta}{2}\coth\tfrac{amp}{\sin(\theta/2)}\coth\tfrac{amq}{\sin(\theta/2)}\Big]+\\ +\sin\tfrac{\theta}{2}\Big[\big(q^2\cos^2\tfrac{\theta}{2}-p^2\sin^2\tfrac{\theta}{2}\big)\coth\tfrac{amp}{\sin(\theta/2)}\coth\tfrac{amq}{\cos(\theta/2)}+\\ +\big(q^2\sin^2\tfrac{\theta}{2}-p^2\cos^2\tfrac{\theta}{2}\big)\coth\tfrac{amp}{\cos(\theta/2)}\coth\tfrac{amq}{\sin(\theta/2)}\Big]\Big\}\cdot\Big\{am\cos\theta\Big[\sin\tfrac{\theta}{2}\Big(p^3\coth\tfrac{amq}{\sin(\theta/2)}-\\ -q^3\coth\tfrac{amp}{\sin(\theta/2)}\Big)-\cos\tfrac{\theta}{2}\Big(p^3\coth\tfrac{amq}{\cos(\theta/2)}-q^3\coth\tfrac{apm}{\cos(\theta/2)}\Big)\Big]\Big\}^{-1},\end{gathered}$$

γ_{mp} и γ_{mq} получаются из формулы (5.5) заменой m на mp и mq соответственно.

Приведем формулы для вычисления коэффициентов системы разветвления [36]. Согласно лемме Шмидта [1], ищем решения системы (5.2) в виде :

$$\begin{gathered}u=\sum_{i=1}^{n}\xi_iu_{e_i,0}+\sum_{|\alpha|+k>0}u_{\alpha,k}\xi^\alpha\cdot\varepsilon^k,\ f=\sum_{i=1}^{n}\xi_if_{e_i}+\sum_{|\alpha|+k>0}f_{\alpha,k}\xi^\alpha\cdot\varepsilon^k,\\ \varphi_i=\{u_{e_i,0},f_{e_i,0}\},\ e_1=(1,0,\dots,0),\dots,e_n=(0,0,\dots,1).\end{gathered}$$

Функции $f_{\alpha,k}$, $u_{\alpha,k}$ определяются методом неопределенных коэффициентов Некрасова–Назарова. Тогда формулы для коэффициентов первого уравнения разветвления имеют вид

$$t^{(1)}_{\alpha,k}=-\int\limits_{\Pi_0\times[-1;0]}w^{(0)}_{\alpha,k}u_2dxdyd\zeta+\int\limits_{\Pi_0}w^{(1)}_{\alpha,k}\left[u_2(x,y,0)+k\frac{\partial f_2}{\partial x}\right]dxdy+\int\limits_{\Pi_0}w^{(2)}_{\alpha,k}f_2dxdy.$$

Поскольку рассматриваемая задача является задачей о точках бифуркации, коэффициенты УР при чистых степенях ε равны 0. Общий вид системы разветвления строится далее на основе методов группового анализа в теории ветвления [22].

5.2. Ромбическая решетка периодичности

Непрерывная группа сдвигов в подпространстве $\mathcal{N}(B)$ гомоморфна группе вращений

$$\begin{gathered}\mathcal{A}(\alpha) = diag\{\exp[i(-\alpha_1 m_1 \sin\theta + \alpha_2 m_1 \sin\theta + \alpha_2 m_2)/(a\sin\theta)],\\ \exp[-i(-\alpha_1 m_1 \sin\theta + \alpha_2 m_1 \sin\theta + \alpha_2 m_2)/(a\sin\theta)],\\ \exp[i(\alpha_1 m_2 \sin\theta - \alpha_2 m_2 \sin\theta - \alpha_2 m_1)/(a\sin\theta)],\\ \exp[-i(\alpha_1 m_2 \sin\theta - \alpha_2 m_2 \sin\theta - \alpha_2 m_2)/(a\sin\theta)]\},\end{gathered}$$

а дискретная группа симметрии T определяется подстановками :

$a = (14)(23)$ – отражение относительно одной диагонали,
$b = (13)(24)$ – отражение относительно другой диагонали,
$ab = (12)(34)$ – отражение относительно центра (начала координат).

Тогда главная часть УР в комплекснозначном базисе

$$\varphi_{1,3} = \{u(\zeta), -iv\}\exp\Big[\tfrac{ia}{\sin\theta}(xm_1\sin\theta - ym_1\cos\theta \pm ym_2)\Big],\ \varphi_2 = \bar{\varphi_1},\ \varphi_4 = \bar{\varphi_3}$$

имеет вид :

$$\begin{aligned} A_1\xi_1\varepsilon + B_1\xi_1^2\xi_2 + C_1\xi_1\xi_3\xi_4 + \ldots = 0,\\ A_1\xi_2\varepsilon + B_1\xi_2^2\xi_1 + C_1\xi_2\xi_3\xi_4 + \ldots = 0,\\ A_1\xi_3\varepsilon + B_1\xi_3^2\xi_4 + C_1\xi_1\xi_2\xi_3 + \ldots = 0,\\ A_1\xi_4\varepsilon + B_1\xi_4^2\xi_3 + C_1\xi_1\xi_2\xi_4 + \ldots = 0,\end{aligned} \tag{5.7}$$

где $A_1 = -\big(1+\gamma\frac{m^2a^2}{\cos^2(\theta/2)}\big)$, $A_2 = -\big(1+\gamma\frac{m^2a^2}{\sin^2(\theta/2)}\big)$, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$, остальные коэффициенты не приводятся здесь ввиду громоздкости.

Для редукции этой системы следует принять $\xi_{1,2} = \tau_1 \pm i\tau_2$, $\xi_{3,4} = \tau_3 \pm i\tau_4, \tau_2 = \tau_4 = 0$. Редуцированная система

$$\begin{gathered}\tau_1(\varepsilon A_1 + B_1\tau_1^2 + C_1\tau_3^2) = 0,\\ \tau_1(\varepsilon A_1 + B_1\tau_1^2 + C_1\tau_3^2) = 0\end{gathered}$$

имеет следующие решения:

$$\begin{gathered}\tau_3 = 0,\ |\tau_1| = -\tfrac{A_1\varepsilon}{B_1},\ \mathrm{sign}\varepsilon = \mathrm{sign}B_1;\quad \tau_1 = 0,\ |\tau_3| = -\tfrac{A_2\varepsilon}{B_2},\ \mathrm{sign}\varepsilon = \mathrm{sign}B_2;\\ 0 \neq |\tau_1| = -\tfrac{A_1B_2 - A_2C_1}{B_1B_2 - C_1C_2}\varepsilon,\ 0 \neq |\tau_3| = \tfrac{A_1C_2 - A_2B_1}{B_1B_2 - C_1C_2}\varepsilon.\end{gathered}$$

Им отвечает асимптотика решений задачи (5.1):

$$\begin{aligned}&\tau_1\{u_1(\zeta), v\}\cos\Big[\tfrac{ma}{\cos(\theta/2)}\big((x+\alpha_1)\cos\tfrac{\theta}{2} + (y+\alpha_2)\sin\tfrac{\theta}{2}\big)\Big] + \mathrm{O}(|\varepsilon|),\\ &\tau_3\{u_2(\zeta), v\}\cos\Big[\tfrac{ma}{\sin(\theta/2)}\big((x+\alpha_1)\sin\tfrac{\theta}{2} - (y+\alpha_2)\cos\tfrac{\theta}{2}\big)\Big] + \mathrm{O}(|\varepsilon|),\\ &\tau_1\{u_1(\zeta), v\}\cos\Big[\tfrac{ma}{\cos(\theta/2)}\big((x+\alpha_1)\cos\tfrac{\theta}{2} + (y+\alpha_2)\sin\tfrac{\theta}{2}\big)\Big] +\\ &+\tau_3\{u_2(\zeta), v\}\cos\Big[\tfrac{ma}{\sin(\theta/2)}\big((x+\alpha_1)\sin\tfrac{\theta}{2} - (y+\alpha_2)\cos\tfrac{\theta}{2}\big)\Big] + \mathrm{O}(|\varepsilon|).\end{aligned}$$

5.3. Решения, инвариантные относительно нормальных делителей группы ромба

Группа симметрии ромба (четверная группа Клейна) действует на $\mathcal{N}(B) = \mathrm{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ перестановками: $T : a = (12)(3)(4),\ b = (1)(2)(34),\ ab = (12)(34)$ номеров φ_j. Нормальные делители группы $N_1 = \{e, a\},\ N_2 = \{e, b\},\ N_3 = \{e, ab\}$. Регулярное представление группы ромба определяется матрицами

$$\Gamma(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma(e_{a,b}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma(e_b) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma(e_{ab}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Представлению группы симметрии T отвечают матрицы :

$$T(e) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T(a) \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$T(b) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T(ab) \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Четыре одномерных представления составляют их полный набор.

Выпишем таблицу характеров (M_j — классы сопряженных элементов):

M_j	$M_1 = \{e\}$	$M_2 = \{a\}$	$M_3 = \{b\}$	$M_4 = \{ab\}$
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	1	-1	-1
χ_3	1	-1	1	-1
χ_4	1	-1	-1	1
χ	4	2	2	0

Кратности $a_1 = <\chi, \chi_1> = 2$, $a_2 = <\chi, \chi_2> = 1$, $a_3 = <\chi, \chi_3> = 1$, $a_4 = <\chi, \chi_4> = 0$.

Лемма 9. Базис неприводимых инвариантных представлений группы Клейна T выражается формулами $T = T_{11} \dot{+} T_{12} \dot{+} T_2 \dot{+} T_3$,

$$N_{11}^{(1)} : \ e_{11}^{(1)} = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) = \{u_1(\zeta), -iv\} \cos \frac{am(x\cos(\theta/2) + y\sin(\theta/2))}{\cos(\theta/2)},$$

$$N_{12}^{(1)} : \ e_{12}^{(1)} = \frac{1}{2}(\varphi_3 + \varphi_4) = \{u_2(\zeta), -iv\} \cos \frac{am(x\sin(\theta/2) - y\cos(\theta/2))}{\cos(\theta/2)},$$

$$N_{2}^{(1)} : \ e_{2}^{(1)} = -\frac{i}{2}(\varphi_3 - \varphi_4) = \{u_2(\zeta), -iv\} \sin \frac{am(x\sin(\theta/2) - y\cos(\theta/2))}{\cos(\theta/2)},$$

$$N_{3}^{(1)} : \ e_{3}^{(1)} = \frac{i}{2}(\varphi_1 - \varphi_2) = -\frac{i}{2}\{u_1(\zeta), -iv\} \sin \frac{am(x\cos(\theta/2) + y\sin(\theta/2))}{\cos(\theta/2)}.$$

Доказательство. Преобразуем уравнения системы разветвления в базисе (ξ) блочно-диагональной матрицей с блоками $c_0^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2i & 1/2i \end{pmatrix}$. Тогда формулы перехода от переменных ζ к τ определяются матрицей

$$c_0^{-1} \cdot c_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2i & -1/2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2i & -1/2i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & -i/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & -i/2 \\ 0 & 1/2 & -i/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & i/2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Формулы перехода от ζ к τ имеют вид :

$$\begin{aligned} \tau_1 &= 1/2\zeta_1, \\ \tau_2 &= 1/2\zeta_4, \\ \tau_3 &= 1/2\zeta_2, \\ \tau_4 &= -1/2\zeta_3. \end{aligned}$$

Подстановки T в переменных ζ определяются, согласно лемме, прямой суммой :

$$T = T_{11} \dot{+} T_{12} \dot{+} T_2 \dot{+} T_3,$$

где T_j – матрицы соответствующих неприводимых представлений. Тогда:

$$M_1: \quad \hat{A}_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_2: \quad \hat{A}_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$M_3: \quad \hat{A}_b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_4: \quad \hat{A}_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Применяя формулу $P(N_k) = \dfrac{1}{|N_k|} \sum\limits_{g \in N_k} \hat{A}_g$ [39], находим для каждого N_k проекторы в переменных ζ :

$$P(N_1) = \mathrm{diag}(1,1,1,0), \; P(N_2) = \mathrm{diag}(1,1,0,1), \; P(N_3) = \mathrm{diag}(1,1,0,0).$$

Таким образом, на основе формул $\tau \leftrightarrow \zeta$-перехода определяются гиперплоскости, содержащие N_k-инвариантные решения.

Теорема 11. УР для инвариантных относительно N_1 решений получается при $\zeta_4 = 0$, т.е. $\tau_2 = 0$; инвариантные относительно N_2 решения получаются при $\zeta_3 = 0$, т.е. $\tau_4 = 0$; для N_3-инвариантных решений мы должны положить $\zeta_3 = \zeta_4 = 0$, т.е. $\tau_2 = \tau_4 = 0$. Система (5.7) при переходе $\xi_{1,2} = \tau_1 \pm i\tau_2$, $\xi_{3,4} = \tau_3 \pm i\tau_4$ примет вид :

$$\begin{aligned} \tau_1(A_1\varepsilon + B_1(\tau_1^2 + \tau_2^2) + C_1(\tau_3^2 + \tau_4^2)) &= 0, \\ \tau_3(A_2\varepsilon + B_2(\tau_3^2 + \tau_4^2) + C_1(\tau_1^2 + \tau_2^2)) &= 0, \\ \tau_2(A_1\varepsilon + B_1(\tau_1^2 + \tau_2^2) + C_1(\tau_3^2 + \tau_4^2)) &= 0, \\ \tau_4(A_2\varepsilon + B_2(\tau_3^2 + \tau_4^2) + C_1(\tau_1^2 + \tau_2^2)) &= 0. \end{aligned}$$

Тогда N_1-инвариантные решения получаются при $\tau_2 = 0$:

$$\tau_3 = \tau_1 = 0,\ |\tau_4| = \sqrt{-\tfrac{A_2\varepsilon}{B_2}};\ \tau_4 = \tau_1 = 0,\ |\tau_3| = \sqrt{-\tfrac{A_2\varepsilon}{B_2}};$$
$$\tau_4 = \tau_3 = 0,\ |\tau_1| = \sqrt{-\tfrac{A_1\varepsilon}{B_1}};\ \tau_1 = 0,\ \tau_3^2 + \tau_4^2 = -\tfrac{A_2\varepsilon}{B_2};$$
$$\tau_3 = 0,\ |\tau_4| = \sqrt{-\tfrac{A_1C_2-A_2B_1}{B_1B_2-C_1C_2}\varepsilon},\ |\tau_1| = \sqrt{-\tfrac{A_1B_2-A_2C_1}{B_1B_2-C_1C_2}\varepsilon};$$
$$\tau_4 = 0,\ |\tau_3| = \sqrt{-\tfrac{A_1C_2-A_2B_1}{B_1B_2-C_1C_2}\varepsilon},\ |\tau_1| = \sqrt{-\tfrac{A_1B_2-A_2C_1}{B_1B_2-C_1C_2}\varepsilon};$$
$$|\tau_1| = \sqrt{-\tfrac{A_1B_2-A_2C_1}{B_1B_2-C_1C_2}\varepsilon},\ \tau_3^2 + \tau_4^2 = -\tfrac{A_1C_2-A_2B_1}{B_1B_2-C_1C_2}\varepsilon.$$

N_2-инвариантные решения отвечают $\tau_4 = 0$:

$$\tau_2 = \tau_1 = 0,\ |\tau_3| = \sqrt{-\tfrac{A_2\varepsilon}{B_2}};\ \tau_3 = \tau_1 = 0,\ |\tau_2| = \sqrt{-\tfrac{A_1\varepsilon}{B_1}};\ \tau_2 = \tau_3 = 0,\ |\tau_1| = \sqrt{-\tfrac{A_1\varepsilon}{B_1}};$$
$$\tau_1 = 0,\ |\tau_3| = \sqrt{-\tfrac{A_1C_2-A_2B_1}{B_1B_2-C_1C_2}\varepsilon},\ |\tau_2| = \sqrt{-\tfrac{A_1B_2-A_2C_1}{B_1B_2-C_1C_2}\varepsilon};$$
$$\tau_2 = 0,\ |\tau_3| = \sqrt{-\tfrac{A_1C_2-A_2B_1}{B_1B_2-C_1C_2}\varepsilon},\ |\tau_1| = \sqrt{-\tfrac{A_1B_2-A_2C_1}{B_1B_2-C_1C_2}\varepsilon};$$
$$\tau_3 = 0,\ \tau_1^2 + \tau_2^2 = -\tfrac{A_1\varepsilon}{B_1};\ |\tau_3| = \sqrt{-\tfrac{A_1C_2-A_2B_1}{B_1B_2-C_1C_2}\varepsilon},\ \tau_1^2 + \tau_2^2 = -\tfrac{A_1B_2-A_2C_1}{B_1B_2-C_1C_2}\varepsilon.$$

N_3-инвариантные решения ($\tau_2 = \tau_4 = 0$):

$$\tau_1 = 0,\ |\tau_3| = \sqrt{-\tfrac{A_2\varepsilon}{B_2}};\ \tau_3 = 0,\ |\tau_1| = \sqrt{-\tfrac{A_1\varepsilon}{B_1}};$$
$$|\tau_1| = \sqrt{-\tfrac{A_1B_2-A_2C_1}{B_1B_2-C_1C_2}\varepsilon},\ |\tau_3| = \sqrt{-\tfrac{A_1C_2-A_2B_1}{B_1B_2-C_1C_2}\varepsilon}.$$

Литература

[1] Вайнберг М.М., Треногин В.А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969. 524 с.

[2] Треногин В.А., Сидоров Н.А. Исследование точек бифуркации и нетривиальных ветвей решений нелинейных уравнений// Дифференциальные и интегральные уравнения. Иркутск: Изд-во Иркут. гос. ун-та, 1972. № 1. С. 216–247.

[3] Русак Ю.Б. Обобщенная жорданова структура в теории ветвления: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Ташкент. Институт математики АН УзССР. 1979. 126 с.

[4] Логинов Б.В. Об устойчивости решений дифференциальных уравнений с вырожденным оператором при производной// Известия АН УзССР. Физ.-мат. сер. 1988. № 1. С. 28–32.

[5] Loginov B.V., Rousak Ju.B. Generalized Jordan structure in the problem of the stability of bifurcating solutions// Nonlinear Analysis. TMA. 1991. V.17, No. 3, P. 219–232.

[6] Логинов Б.В., Макаров М.Ю. Задачи о нарушении симметрии при бифуркации Андронова-Хопфа. I// Вестник Самарского гос. ун-та. 2000. № 2(16). С. 54–58.

[7] Сидоров Н.А., Романова О.А., Благодатская Е.Б. Уравнения с частными производными с оператором конечного индекса при главной части// Диф. уравн. 1994. Т.30. № 4. С. 729–732.

[8] Loginov B.V., Sidorov N.A., Trenogin V.A. Existence of bifurcation at the presence of one Jordan chain of ann odd length// Uzbek. Math. J. 1993. No. 3. P. 64–68.

[9] Loginov B.V. Branching equation in the root subspace// Nonlinear Analysis. TMA. 1998. V.32. No. 3. P. 439–448.

[10] Loginov B., Konopleva I. Symmetry of resolving systems in degenerated functional equations// Труды межд. конференции "Симметрия и ДУ". Красноярск, 2000. С. 145–148.

[11] Loginov B.V., Konopleva I.V. Symmetry of resolving system for the differential equation with Fredholm operator at the derivative// Труды межд. конференции MOGRAN–2000. Уфа, 2000. С. 116–119.

[12] Коноплева И.В. Примеры ромбической симметрии в бифуркационных задачах// Труды межд. конференции "Математическое моделирование, статистика, информатика". Самара. 2001. С. 190–192.

[13] Коноплева И.В. Бифуркационная задача о поверхностных капиллярно-гравитационных волнах с симметрией ромбической решетки// Труды межд. конференции "Континуальные логико-алгебраические исчисления и нейроматематика в науке, технике и экономике". Ульяновск, 2001. Т.4. С. 33–35.

[14] Loginov B.V., Konopleva I.V. Bifurcational system in the root-subspace, this relation and symmetry// Proc. of the Int. Conference "Function Spaces VI". Wroclaw, 2001. P. 33.

[15] Loginov B.V., Konopleva I.V. Discrete group symmetry in bifurcational symmetry breaking problems// Труды межд.конференции "Математические модели и методы их исследования". Красноярск, 2001. Т. 2. С. 66–69.

[16] Loginov B.V., Konopleva I.V. Invariant reduction of branching equations// Труды V Казанской международной летней школы-конференции "Теория функций, ее приложения и смежные вопросы". Казань, 2001. С. 249–250.

[17] Логинов Б.В., Русак Ю.Б. Обобщенная жорданова структура в теории ветвления// Прямые и обратные задачи для диф. уравнений в частных производных и их прил. Ташкент, 1978. С. 113–148.

[18] Русак Ю.Б. Некоторые соотношения между жордановыми наборами оператор-функций и сопряженных к ним// Изв.Ак.наук Уз.ССР. Физ.-мат. сер. 1978. С. 15–19.

[19] Сидоров Н.А. Общие вопросы регуляризации в задачах теории ветвления. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1982. 314 с.

[20] Наймарк М.А. Теория представлений групп. М.: Наука, 1976. 560 с.

[21] Логинов Б.В. Теория ветвления решений нелинейных уравнений в условиях групповой инвариантности. Ташкент: Фан, 1985. 184 с.

[22] Логинов Б.В. Ветвление решений нелинейных уравнений и групповая симметрия// Вестник Самарского гос. ун-та. 1998. № 4(10). С. 15–70.

[23] Hale J. Introduction to dynamic bifurcation// In "Bifurcation Theory and Applications", Lecture Notes in Mathematics, 1984. No. 1057. P. 106–151.

[24] Iooss G., Adelmeyer M. Topics in Bifurcation Theory and Applications/ Adv. ser. in Nonl. Dyn., 1998. V.3. 186 p.

[25] Henry D. Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations/ Lecture Notes in Mathematics, 1981. 840 p.

[26] Свиридюк Г. А. Фазовые пространства полулинейных уравнений типа Соболева с относительно сильно секториальным оператором// Алгебра и анализ. 1994. Т.6. № 5. С. 252–272.

[27] Логинов Б.В., Треногин В.А. Об использовании групповой инвариантности в теории ветвления// Диф. уравн. 1975. Т.11. № 8. С. 1518-1521.

[28] Сидоров Н.А., Абдуллин В.Р. Сплетающие уравнения разветвления в теории нелинейных уравнений// Препринт № 1. АНН Иркутское отделение, 1999. С. 36.

[29] Логинов Б.В. О ветвлении решений дифференциального уравнения $\Delta u + \lambda u = f(u)$ на сфере// Диф. уравн. 1972. Т.8. № 10. С. 1816–1824.

[30] Виленкин Н.Я. Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1965. 588 с.

[31] Логинов Б.В., Рахматова Х.Р., Юлдашев Н.Н. О построении уравнения разветвления по его группе симметрии (кристаллографической группе)// Уравнения смешанного типа и задачи со свободной границей. 1987. С. 183–195.

[32] Rybakowsky K. The Homotophy Index and Partial Differential Equations. London: Springer–Verlag, 1987. 208 p.

[33] Trenogin V., Sidorov N., Loginov B. Potentiality, group symmetry and bifurcation in the theory of branching equation// Differential and Integral Equations, 1990. V.3. No. 1. P. 145–154; ДАН СССР. 1989. Т.309. № 2. С. 286–289.

[34] Треногин В.А., Сидоров Н.А. Уравнение разветвления, условия потенциальности и точки бифуркации нелинейных операторов// Уз. мат. журнал. 1992. № 2. С. 40–49.

[35] Логинов Б.В., Сидоров Н.А. Групповая симметрия, уравнение разветвления Ляпунова-Шмидта и итерационные методы в задаче о точке бифуркации// Мат. сборник. 1991. Т.182. № 5. С. 681–691.

[36] Гришина С.А. Ветвление решений системы дифференциальных уравнений, определяющей свободную поверхность флотирующей жидкости: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Ульяновск. УлГПУ. 1999. 114 с.

[37] Габов С.А., Свешников А.Г. Математические задачи динамики флотирующей жидкости// Итоги науки и техники. Математический анализ. М.: Деп. в ВИНИТИ, 1990. № 28. С. 3–86.

[38] Агранович М.С. Эллиптические сингулярные интегро-дифференциальные операторы// Успехи матем. наук. 1965. Т.20. № 5. С. 3–120.

[39] Любарский Г.Я. Теория групп и ее применение в физике. М.: ГИТТЛ, 1958. 356 с.

GENERALIZED JORDAN STRUCTURE AND SYMMETRY OF RESOLVING SYSTEMS IN BRANCHING THEORY[3]

 I.V. Konopleva, B.V. Loginov[4]

Nonlinear differential equations in the Banach spaces with degenerate Fredholm operator at the derivative are considered. The aim of this paper is reduction of the original problem to finite-dimensional bifurcation equation in the root-subspace (BEqR) and resolving systems (RS). The application of intertwining operators properties (non-group symmetry) is given as well as group symmetry for the nonlinear equations. RS reduction possibilities both by the unknowns number and equations one are disscused. Variants of Grobman-Hartman theorem are proved. Under the group symmetry conditions of the original nonlinear equation the connections between the reduction (dimension lowering) possibilities of the corresponding branching equation and its potentiality properties are studied. Applications to capillary-gravity surface wave theory are considered.

Поступила в редакцию 10/*IX*/2001;
в окончательном варианте — 19/*XI*/2001.

[3]Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. O.P. Filatov.

[4]Konopleva Irina Viktorovna, Loginov Boris Vladimirovich, Dept. of Mathematics, Ulyanovsk State Technical University.