УДК 519.21

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СТЬЮДЕНТОВСКИХ УСЛОВНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ[1]

© 2001 Е.М. Кнутова[2]

Работа посвящена изучению асимптотических свойств условных распределений, которые порождаются конечномерными проекциями меры Стьюдента, заданной на вещественном гильбертовом пространстве. Доказана сходимость почти наверное условных распределений к гауссовским при стремлении размерности проекций к бесконечности. Доказательство этого факта основано на представлении Шенберга условных распределений в виде непрерывной смеси гауссовских и методе Лапласа нахождения асимптотики интегралов. Установлен усиленный закон больших чисел для схемы серий семейств условных распределений. Рассмотрены некоторые свойства логарифмических производных и логарифмических градиентов меры Стьюдента и их связь с предельными условными распределениями.

1. Формулировка результатов

Рассмотрим вещественное сепарабельное гильбертово пространство H со скалярным произведением $<\cdot,\cdot>$ и борелевской σ-алгеброй $\mathcal{B}(H)$. Выберем в H ортонормированный базис $\{e_j\}, j = 1, 2, \ldots$.

Зададим меру Стьюдента $\mu\{\cdot\}$ на $\{H, \mathcal{B}(H)\}$ с помощью семейства конечномерных распределений

$$F^{(n)}_{1\ldots k}(x_1, ..., x_k) = \mu\{h \in H : <h, e_1> \leq x_1, ..., <h, e_k> \leq x_k\},$$
$$k = 1, 2, ...;\ n = \text{const}\ (n = 3, 4, ...),$$

плотности которых имеют вид [1]:

$$f^{(n)}_{1\ldots k}(x_1, ..., x_k) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+k}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)(n\pi)^{\frac{k}{2}}\prod\limits_{j=1}^{k}\lambda_j}\left[1 + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{x_j}{\lambda_j}\right)^2\right]^{-\frac{n+k}{2}},$$

где $\lambda_j > 0,\ j = 1, 2, ...;\ \sum\limits_{j=1}^{\infty}\lambda_j^2 < +\infty$.

---

[1] Представлена доктором физико-математических наук профессором С.В. Асташкиным.

[2] Кнутова Елена Михайловна (knutova@ssu.samara.ru), кафедра функционального анализа и теории функций Самарского государственного университета, 443011, Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

Введем необходимые обозначения. При изучении асимптотических свойств условных распределений важную роль играют функционал

$$\zeta^2_\infty(x) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \frac{<x,e_j>^2}{\lambda_j^2}$$

и множество сходимости

$$\Gamma \equiv \{x \in H : \zeta^2_\infty(x) < +\infty\}.$$

Перейдем к формулировкам основных результатов.

Теорема 1. 1^0. $\mu\{\Gamma\} = 1$.

2^0. $\mu\{\zeta^2_\infty(x) \le u\} = \int\limits_0^u g_n(t)dt$, где $g_n(t) = \dfrac{n^{n/2}}{2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} t^{-\frac{n}{2}-1} \exp\left\{-\dfrac{n}{2t}\right\}$ — плотность распределения случайной величины $\dfrac{n}{\chi_n^2}$, а χ_n^2 — сумма n квадратов независимых стандартных гауссовских случайных величин.

3^0. Относительно меры $\mu\{\cdot\}$ система случайных величин

$$\left\{\zeta^2_\infty(x); \frac{<x,e_1>}{\lambda_1\zeta_\infty(x)}, ..., \frac{<x,e_n>}{\lambda_n\zeta_\infty(x)}, ...\right\}$$

независима, а случайные величины

$$\frac{<x,e_j>}{\lambda_j\zeta_\infty(x)},\ j = 1,2,...$$

имеют гауссовское распределение с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией.

Пусть $F^{(n)}_{i|1...\hat{\imath}...k}(x_i|x_1,...,\widehat{x}_i,...,x_k)$ – условная функция распределения случайной величины $<x,e_i>$ относительно системы случайных величин

$$<x,e_1>, ..., \widehat{<x,e_i>}, ..., <x,e_k>,$$

где $\widehat{\ }$ — знак пропуска элемента.

Введем вспомогательные функции

$$h_k^{(n)}(v;t) = \frac{\exp\left\{-\frac{k}{2}\left[\frac{v+n}{kt} + \frac{n+k+1}{k}\ln t\right]\right\}}{\int\limits_0^\infty \exp\left\{-\frac{k}{2}\left[\frac{v+n}{kz} + \frac{n+k+1}{k}\ln z\right]\right\}dz} \tag{1}$$

и положим

$$\rho^2_{i,k}(x) = \sum_{j=1,\, j\ne i}^{k} \frac{x_j^2}{\lambda_j^2}, \tag{2}$$

где $x_j = <x,e_j>$, $j = 1,2,...$.

В следующей теореме устанавливается сходимость почти наверное условных распределений к гауссовским. Для доказательства этого факта рассматривается представление Шенберга условных распределений в виде непрерывной смеси гауссовских, и с помощью метода Лапласа нахождения асимптотики интегралов устанавливается дельта-образность последовательности весовых функций в таких представлениях. В результате указанная сходимость является следствием хорошо известного в анализе "принципа локализации".

Теорема 2. Условные распределения $F^{(n)}_{i|1\ldots\hat{\imath}\ldots k}$ обладают следующими свойствами:

1^0) $F^{(n)}_{i|1\ldots\hat{\imath}\ldots k}(x_i|x_1,...,\widehat{x}_i,...,x_k)=\int\limits_0^{\infty}\Phi\left(\frac{x_i}{\lambda_i\sqrt{z}}\right)h_k^{(n)}\left(\rho^2_{i,k}(x);z\right)dz,$

2^0) для любого $x\in\Gamma$ $(x_j=<x,e_j>\ ,\ j=1,2,...)$

$$\lim_{k\to\infty}F^{(n)}_{i|1\ldots\hat{\imath}\ldots k}(x_i|x_1,...,\widehat{x}_i,...,x_k)=\Phi\left(\frac{x_i}{\lambda_i\zeta_\infty(x)}\right),$$

где $\Phi(\cdot)$ – стандартное гауссовское распределение.

Теорема 2 может быть доказана также на основе двусторонних оценок бета-распределений, использующих интеграл вероятности. С помощью этих оценок доказывается и следующее утверждение, сформулированное в виде усиленного закона больших чисел для схемы серий, которое уточняет сходимость, установленную в теореме 2.

Теорема 3. Для μ-почти всех $x\in H$ $(x_j=<x,e_j>\ ,\ j=1,2,...)$ справедливо соотношение:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\left[\Phi^{-1}\left(F^{(n)}_{i|1\ldots\hat{\imath}\ldots k}(x_i|x_1,...,\widehat{x}_i,...,x_k)\right)\right]^2=1,$$

где $\Phi^{-1}(\cdot)$ — функция, обратная $\Phi(\cdot)$.

Полученные результаты можно переформулировать в терминах логарифмических производных и логарифмических градиентов [2, 3] меры Стьюдента μ на гильбертовом пространстве H.

Пусть $\beta_\mu(e_i,x)$ — логарифмическая производная меры μ по направлению e_i, $\beta^\mu_H(x)$ — логарифмический градиент меры μ в гильбертовом пространстве H. Пусть $H_k=\mathrm{Span}\{e_1,\ldots,e_k\}$, $k=1,2,\ldots$. Рассмотрим проекторы $\pi_k:H\to H_k$.

Теорема 4. Для любого $x\in\Gamma$

1^0) $\beta_\mu(e_i,x)=-\dfrac{<e_i,x>}{\lambda_i^2\zeta^2_\infty(x)}$;

2^0) $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1}{k}\ <x,\pi_k\beta^\mu_H(x)>=-1$;

3^0) $\lim\limits_{k\to\infty}F^{(n)}_{i|1\ldots\hat{\imath}\ldots k}(x_i|x_1,...,\widehat{x}_i,...,x_k)=\Phi\left(\mathrm{sgn}\,x_i\sqrt{-x_i\beta_\mu(e_i,x)}\right)$;

4^0) относительно меры μ система случайных величин

$$\left\{\zeta^2_\infty(x);\ <x,e_1>\ \beta_\mu(e_1,x),...,\ <x,e_j>\ \beta_\mu(e_j,x),...\right\}$$

независима, а случайные величины $-<x,e_j>\beta_\mu(e_j,x),\ j=1,2,\ldots$ имеют χ^2-распределение с одной степенью свободы.

Утверждение пункта 1^0 теоремы 4 фактически получено в работе [3], а справедливость пунктов 2^0-4^0 для устойчивых эллиптически контурированных мер в гильбертовом пространстве ранее была отмечена С. Я. Шатских.

Доказательства теорем основаны на вспомогательных утверждениях, которые приведены в следующем параграфе.

2. Вспомогательные утверждения

В следующей лемме указан явный вид представления Шенберга [4, с. 34] функции распределения $F^{(n)}_{1...k}$ и характеристической функции $\psi^{(n)}_{1...k}$.

Лемма 1 (Представление Шенберга).

$$F^{(n)}_{1...k}(x_1,...,x_k) = \int\limits_0^\infty \prod_{j=1}^k \Phi\left(\frac{x_j}{\lambda_j\sqrt{t}}\right) g_n(t)dt; \tag{3}$$

$$\psi^{(n)}_{1...k}(y_1,...,y_k) = \int\limits_0^\infty \exp\left\{-\frac{t}{2}\sum_{j=1}^k \lambda_j^2 y_j^2\right\} g_n(t)dt, \tag{4}$$

где $\Phi(\cdot)$ – стандартное гауссовское распределение, а

$$g_n(t) = \frac{n^{n/2}}{2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} t^{-\frac{n}{2}-1}\exp\left\{-\frac{n}{2t}\right\}, t>0, — \tag{5}$$

плотность $\dfrac{n}{\chi^2_n}$-распределения.

Доказательство. Продифференцируем правую часть (3):

$$\frac{\partial^k \int\limits_0^\infty \prod\limits_{j=1}^k \Phi\left(\frac{x_j}{\lambda_j\sqrt{t}}\right) g_n(t)dt}{\partial x_1 \ldots \partial x_k} =$$

$$= \frac{n^{n/2}}{2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int\limits_0^\infty \prod_{j=1}^k \varphi\left(\frac{x_j}{\lambda_j\sqrt{t}}\right) \frac{1}{\lambda_1\ldots\lambda_k t^{k/2}} t^{-\frac{n}{2}-1}\exp\left\{-\frac{n}{2t}\right\} dt =$$

$$= \frac{n^{n/2}}{2^{(n+k)/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\pi^{k/2}\lambda_1\ldots\lambda_k} \int\limits_0^\infty \exp\left\{-\frac{n}{2t}\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^k\left(\frac{x_j}{\lambda_j}\right)^2+1\right]\right\} t^{-\frac{n+k}{2}-1}dt.$$

После замены $s = \dfrac{n}{2t}\left[\dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^k\left(\dfrac{x_j}{\lambda_j}\right)^2+1\right]$ и несложных преобразований получаем:

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)(n\pi)^{k/2}\lambda_1\ldots\lambda_k}\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^k\left(\frac{x_j}{\lambda_j}\right)^2+1\right]^{-\frac{n+k}{2}} \int\limits_0^\infty e^{-s}s^{\frac{n+k}{2}-1}ds =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{n+k}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)(n\pi)^{k/2}\lambda_1\ldots\lambda_k}\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^k\left(\frac{x_j}{\lambda_j}\right)^2+1\right]^{-\frac{n+k}{2}} = f^{(n)}_{1...k}(x_1,...,x_k).$$

Легко показать, что $g_n(t)$, задаваемая формулой (5), есть плотность распределения случайной величины $\dfrac{n}{\chi_n^2}$.

Формулы (3) и (4) связаны преобразованием Фурье–Стилтьеса:

$$\Psi_{1\ldots k}^{(n)}(y_1,...,y_k)=\int\limits_{\mathbb{R}^k}\ldots\int\exp\left\{i\sum_{j=1}^k y_jx_j\right\}dF_{1\ldots k}^{(n)}(x_1,...,x_k)=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^k}\ldots\int\int\limits_0^\infty\frac{1}{t^{k/2}\lambda_1\ldots\lambda_k}\prod_{j=1}^k\left[e^{iy_jx_j}\varphi\left(\frac{x_j}{\lambda_j\sqrt{t}}\right)\right]g_n(t)\,dt\,dx_1\ldots dx_k=$$

$$=\int\limits_0^\infty\frac{1}{t^{k/2}\lambda_1\ldots\lambda_k}\left[\int\limits_{\mathbb{R}^k}\ldots\int\prod_{j=1}^k e^{iy_jx_j}\varphi\left(\frac{x_j}{\lambda_j\sqrt{t}}\right)\,dx_1\ldots dx_k\right]g_n(t)\,dt.$$

После замены $z_j=\dfrac{x_j}{\lambda_j\sqrt{t}}$ $(j=1,...,k)$ получаем:

$$\Psi_{1\ldots k}^{(n)}(y_1,...,y_k)=\int\limits_0^\infty\left[\int\limits_{\mathbb{R}^k}\ldots\int\prod_{j=1}^k e^{i(y_j\lambda_j\sqrt{t})z_j}\varphi(z_j)\,dz_1\ldots dz_k\right]g_n(t)\,dt.$$

Заметим, что выражение, стоящее в квадратных скобках в последнем интеграле, есть характеристическая функция стандартного гауссовского распределения в точке $(y_1\lambda_1\sqrt{t},\ldots,y_k\lambda_k\sqrt{t})\in\mathbb{R}^k$, которая имеет следующий вид: $\exp\left\{-\dfrac{t}{2}\sum\limits_{j=1}^k\lambda_j^2y_j^2\right\}$.

Лемма доказана.

Замечание. Представления Шенберга (3) и (4) фактически означают, что многомерное распределение Стьюдента является многомерной версией [5] одномерного распределения Стьюдента, которое, в свою очередь, является нормальной смесью [6]. Как известно [6], нормальную смесь можно рассматривать как функцию распределения произведения $X\sqrt{Z}$ независимых случайных величин, где $\mathbb{P}\{X<x\}=\Phi(x)$ и $\mathbb{P}\{Z<y\}=H_n(y)$. В данном случае $H_n(y)$ есть функция распределения $\dfrac{n}{\chi_n^2}$.

С помощью метода Лапласа нахождения асимптотики интегралов [7] установим следующий факт.

Лемма 2. Функциональная последовательность $\{h_k^{(n)}(\rho_{i,k}^2(x),z)\}$ является δ-образной:

1^0) $\displaystyle\int\limits_0^\infty h_k^{(n)}(\rho_{i,k}^2(x),z)dz=1;$

2^0) $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\int\limits_{U_k}h_k^{(n)}(\rho_{i,k}^2(x),z)dz=1,$

где U_k — интервал влияния точки $\dfrac{\rho_{i,k}^2(x)+n}{n+k+1}$.

Доказательство. Утверждение пункта 1^0 очевидно. Докажем утверждение пункта 2^0.

Воспользуемся теоремой 2.2 из [7, с. 99].

Обозначим

$$S(u,k) = -\frac{k}{2}\left(\frac{\alpha_k}{u} + \beta_k \ln u\right), \quad \alpha_k = \frac{\rho_{i,k}^2(x)+n}{k}, \quad \beta_k = \frac{n+k+1}{k}.$$

Тогда

$$S'_u(u,k) = \frac{k}{2}\frac{\alpha_k - \beta_k u}{u^2}, \quad S''_{uu}(u,k) = \frac{k}{2}\frac{\beta_k u - 2\alpha_k}{u^3}.$$

Так как $S'_u\left(\frac{\alpha_k}{\beta_k}, k\right) = 0$, а $S''_{uu}\left(\frac{\alpha_k}{\beta_k}, k\right) = -\frac{k\beta_k^3}{2\alpha_k^2} < 0$, то функция $S(u,k)$ имеет в точке $u_0(k) = \frac{\alpha_k}{\beta_k}$ максимум, равный

$$S\left(\frac{\alpha_k}{\beta_k}, k\right) = -\frac{k\beta_k}{2}\left(\ln\frac{\alpha_k}{\beta_k} + 1\right).$$

Проверим условия (2.13) и (2.14) теоремы 2.2 [7]. При каждом фиксированном k функция

$$\frac{S''_{uu}(u,k)}{S''_{uu}\left(\frac{\alpha_k}{\beta_k}, k\right)} = \frac{\alpha_k^2(2\alpha_k - \beta_k u)}{\beta_k^3 u^3}$$

убывает на интервале $\left]0, 3\frac{\alpha_k}{\beta_k}\right[$. Поэтому, выбирая $\mu(k) = k^{1/4}$ и рассматривая отрезок

$$U_k = \left\{u : \left|u - \frac{\alpha_k}{\beta_k}\right| \le \frac{\alpha_k}{\beta_k}\sqrt{\frac{2}{\beta_k}}k^{-1/4}\right\},$$

нетрудно убедиться в том, что

$$\sup_{u\in U_k}\left|\frac{S''_{uu}(u,k)}{S''_{uu}\left(\frac{\alpha_k}{\beta_k}, k\right)} - 1\right| \le 53\sqrt{2}k^{-1/4}$$

для всех k, начиная с некоторого. Условие (2.13) выполняется. Очевидно, что и условие (2.14) также выполняется, поскольку в роли $f(u)$ выступает тождественная единица. Поэтому теорема 2.2 [7] позволяет указать вклад максимума в асимптотическую формулу интеграла:

$$\int\limits_{U_k} \exp\left[-\frac{k}{2}\left(\frac{\alpha_k}{u} + \beta_k \ln u\right)\right] du = 2\frac{\alpha_k}{\beta_k}\sqrt{\frac{\pi}{\beta_k k}}\exp\left[-\frac{k\beta_k}{2}\left(\ln\frac{\alpha_k}{\beta_k} + 1\right)\right][1 + o(1)].$$

Лемма доказана.

3. Доказательства теорем

Доказательство теоремы 1. 1^0. Докажем μ-почти наверное сходимость последовательности нормированных сумм

$$\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\frac{<x, e_j>^2}{\lambda_j^2}, \quad k = 1, 2, \ldots\,. \tag{6}$$

Вначале установим сходимость этой последовательности по некоторой гауссовской мере. Выберем произвольное $t > 0$ и рассмотрим в H гауссовскую меру μ_t с характеристическим функционалом

$$\Psi_{\mu_t}(y) = \exp\left\{-\frac{t}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j^2 \ <y, e_j>^2\right\}, \ y \in H.$$

Тогда последовательность линейных функционалов

$$\frac{<x, e_1>}{\lambda_1}, \frac{<x, e_2>}{\lambda_2}, ..., \frac{<x, e_k>}{\lambda_k}, ... \ , \ x \in H$$

относительно меры $\mu_t\{\cdot\}$ является последовательностью независимых одинаково распределенных гауссовских случайных величин с нулевым математическим ожиданием и дисперсией t. На основе усиленного закона больших чисел А.Н.Колмогорова [8, с. 418] можно утверждать, что для любого $t > 0$:

$$\mu_t\left\{\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\frac{<x, e_j>^2}{\lambda_j^2} = t\right\} = 1, \tag{7}$$

откуда следует μ_t-почти наверное фундаментальность последовательности (6).

Аналогично тому, как это было сделано в работе [9], используя критерий фундаментальности почти наверное [8, с. 271], представление Шенберга (3) и теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, можно показать, что последовательность нормированных сумм (6) фундаментальна почти наверное и по мере $\mu\{\cdot\}$. Следовательно [8, с. 275], существует $\mathcal{B}(H)$-измеримая случайная величина $\zeta_\infty^2(x)$ и множество сходимости $\Gamma \in \mathcal{B}(H)$ такие, что $\mu\{\Gamma\} = 1$ и

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\frac{<x, e_j>^2}{\lambda_j^2} = \zeta_\infty^2(x), \quad x \in \Gamma. \tag{8}$$

2^0. Вначале вычислим вероятность

$$\mu\left\{\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\frac{x_j^2}{\lambda_j^2} \le u\right\}.$$

Ввиду соотношения Шенберга (3) имеем равенство

$$\mu\left\{\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\frac{x_j^2}{\lambda_j^2} \le u\right\} = \int_0^\infty \mu_t\left\{\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\frac{x_j^2}{\lambda_j^2} \le u\right\} g_n(t)dt. \tag{9}$$

Из сходимости μ_t-почти наверное следует сходимость по мере μ_t, откуда, в силу (7), имеем:

$$\lim_{k\to\infty}\mu_t\left\{\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\frac{x_j^2}{\lambda_j^2} \le u\right\} = \begin{cases} 1 & \text{при } u > t, \\ 0 & \text{при } u < t. \end{cases}$$

Поэтому, переходя к пределу под знаком интеграла в (9), получаем:

$$\lim_{k\to\infty}\mu\left\{\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\frac{x_j^2}{\lambda_j^2} \le u\right\} = \int_0^u g_n(t)dt. \tag{10}$$

Учитывая соотношение (8) и тот факт, что из сходимости почти наверное следует сходимость по распределению, получаем:

$$\mu\left\{\zeta_\infty^2(x)\le u\right\}=\lim_{k\to\infty}\mu\left\{\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\frac{x_j^2}{\lambda_j^2}\le u\right\}. \tag{11}$$

Собирая вместе (10) и (11), получаем утверждение пункта 2^0.

3^0. Доказательство этого пункта проводится так же, как в работе [10]. Вначале найдем функцию распределения случайных величин

$$\frac{<x,e_1>}{\lambda_1\zeta_\infty(x)},\ldots,\frac{<x,e_m>}{\lambda_m\zeta_\infty(x)},\;\;\zeta_\infty^2(x).$$

Рассмотрим вспомогательные случайные величины $(k>m)$:

$$\zeta_{m,k}^2(x)=\frac{1}{k}\sum_{j=m+1}^{k}\frac{<x,e_j>^2}{\lambda_j^2}.$$

Воспользуемся представлением Шенберга (3) и отмеченной выше (см. п. 1^0) независимостью случайных величин

$$\frac{<x,e_1>}{\lambda_1},\ldots,\frac{<x,e_n>}{\lambda_n},\ldots$$

относительно гауссовской меры $\mu_t\{\cdot\}$. Будем иметь

$$\mu\left\{\frac{<x,e_1>}{\lambda_1}\le u_1;\ldots;\frac{<x,e_m>}{\lambda_m}\le u_m;\zeta_{m,k}^2(x)\le v\right\}=$$

$$=\int_0^\infty \mu_t\left\{\frac{<x,e_1>}{\lambda_1}\le u_1;\ldots;\frac{<x,e_m>}{\lambda_m}\le u_m;\zeta_{m,k}^2(x)\le v\right\}g_n(t)dt=$$

$$=\int_0^\infty\prod_{j=1}^{m}\Phi\left(\frac{u_j}{\sqrt{t}}\right)\mu_t\left\{\zeta_{m,k}^2(x)\le v\right\}g_n(t)dt.$$

Аналогично тому, как это было сделано при доказательстве п. 2^0, перейдем в последнем равенстве к пределу при $k\to\infty$. Учитывая, что для любого натурального m

$$\lim_{k\to\infty}\zeta_{m,k}^2(x)=\zeta_\infty^2(x),\;\;\forall x\in\Gamma,$$

получаем:

$$\mu\left\{\frac{<x,e_1>}{\lambda_1}\le u_1;\ldots;\frac{<x,e_m>}{\lambda_m}\le u_m;\zeta_\infty^2(x)\le v\right\}=\int_0^v\prod_{j=1}^{m}\Phi\left(\frac{u_j}{\sqrt{t}}\right)g_n(t)dt$$

для любого натурального m. Следовательно, плотность распределения вероятностей системы случайных величин

$$\frac{<x,e_1>}{\lambda_1},\ldots,\frac{<x,e_m>}{\lambda_m},\;\;\zeta_\infty^2(x)$$

имеет вид
$$\prod_{j=1}^{m}\varphi\left(\frac{u_j}{\sqrt{v}}\right)v^{-m/2}g_n(v), \qquad (12)$$
здесь $\varphi(\cdot)$ — стандартная гауссовская плотность.

Пользуясь формулой (12) и считая, что $\zeta_\infty(x)>0$, для любого натурального m получаем равенство:
$$\mu\left\{\frac{<x,e_1>}{\lambda_1\zeta_\infty(x)}\le u_1;...;\frac{<x,e_m>}{\lambda_m\zeta_\infty(x)}\le u_m;\zeta_\infty^2(x)\le v\right\}=$$
$$=\int\limits_{D_r}\dots\int\prod_{j=1}^{m}\varphi\left(\frac{t_j}{\sqrt{r}}\right)r^{-m/2}g_n(r)dt_1...dt_m dr=$$
$$=\int\limits_0^v g_n(r)\int\limits_D\dots\int\prod_{j=1}^{m}\varphi\left(\frac{t_j}{\sqrt{r}}\right)r^{-m/2}dt_1...dt_m\ dr=\prod_{j=1}^{m}\Phi(u_j)\int\limits_0^v g_n(r)dr,$$
где интегрирование ведется по областям
$$D_r=\left\{(t_1,...,t_m,r):\frac{t_1}{\sqrt{r}}\le u_1;...;\frac{t_m}{\sqrt{r}}\le u_m;r\le v\right\},$$
$$D=\left\{(t_1,...,t_m):\frac{t_1}{\sqrt{r}}\le u_1;...;\frac{t_m}{\sqrt{r}}\le u_m\right\}.$$

Таким образом, ввиду пункта 2^0 данной теоремы, получаем утверждение 3^0. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. 1^0. В ходе доказательства формулы (3) было получено выражение для плотности
$$f^{(n)}_{1\dots k}(x_1,...,x_k)=\frac{n^{n/2}}{2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\lambda_1\dots\lambda_k}\int\limits_0^\infty\prod_{j=1}^{k}\varphi\left(\frac{x_j}{\lambda_j\sqrt{t}}\right)t^{-\frac{n+k}{2}-1}e^{-\frac{n}{2t}}dt,$$
где $\varphi(y)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$.

Интегрируя эту плотность по x_i, получаем: $f^{(n)}_{1\dots\hat{\imath}\dots k}(x_1,...,\hat{x_i},...,x_k)=$
$$=\frac{n^{n/2}}{2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\prod\limits_{j=1,\,j\ne i}^{k}\lambda_j}\int\limits_0^\infty\prod_{j=1,\,j\ne i}^{k}\varphi\left(\frac{x_j}{\lambda_j\sqrt{t}}\right)t^{-\frac{n+k}{2}-1}\exp\left\{-\frac{n}{2t}\right\}dt.$$

Запишем выражение для условной плотности в виде отношения безусловных:
$$f^{(n)}_{i|1\dots\hat{\imath}\dots k}(x_i|x_1,...,\widehat{x}_i,...,x_k)=\frac{f^{(n)}_{1\dots k}(x_1,...,x_i,...,x_k)}{f^{(n)}_{1\dots\hat{\imath}\dots k}(x_1,...,\hat{x}_i,...,x_k)}=$$
$$=\int\limits_0^\infty\frac{1}{\lambda_i\sqrt{t}}\varphi\left(\frac{x_i}{\lambda_i\sqrt{t}}\right)\frac{\prod\limits_{j=1,j\ne i}^{k}\varphi\left(\frac{x_j}{\lambda_j\sqrt{t}}\right)t^{-\frac{n+k-1}{2}-1}\exp\left\{-\frac{n}{2t}\right\}}{\int\limits_0^\infty\prod\limits_{j=1,j\ne i}^{k}\varphi\left(\frac{x_j}{\lambda_j\sqrt{y}}\right)y^{-\frac{n+k-1}{2}-1}\exp\left\{-\frac{n}{2y}\right\}dy}dt.$$

Следовательно, условная функция распределения имеет вид:

$$F^{(n)}_{i|1\ldots\hat{\imath}\ldots k}(x_i|x_1,...,\widehat{x}_i,...,x_k)=\int\limits_{-\infty}^{x_i} f^{(n)}_{i|1\ldots\hat{\imath}\ldots k}(z|x_1,...,\hat{x}_i,...,x_k)dz=$$

$$=\int\limits_0^\infty \Phi\left(\frac{x_i}{\lambda_i\sqrt{t}}\right)\frac{\prod\limits_{j=1,j\neq i}^{k}\varphi\left(\frac{x_j}{\lambda_j\sqrt{t}}\right)t^{-\frac{n+k-1}{2}-1}\exp\left\{-\frac{n}{2t}\right\}}{\int\limits_0^\infty\prod\limits_{j=1,j\neq i}^{k}\varphi\left(\frac{x_j}{\lambda_j\sqrt{y}}\right)y^{-\frac{n+k-1}{2}-1}\exp\left\{-\frac{n}{2y}\right\}dy}dt=$$

$$=\int\limits_0^\infty \Phi\left(\frac{x_i}{\lambda_i\sqrt{t}}\right)\frac{\exp\left\{-\frac{1}{2t}\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{k}\left(\frac{x_j}{\lambda_j}\right)^2-\frac{n}{2t}+\ln t^{-\frac{n+k+1}{2}}\right\}}{\int\limits_0^\infty\exp\left\{-\frac{1}{2y}\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{k}\left(\frac{x_j}{\lambda_j}\right)^2-\frac{n}{2y}+\ln y^{-\frac{n+k+1}{2}}\right\}}dt.$$

В обозначениях (1) и (2)

$$F^{(n)}_{i|1\ldots\hat{\imath}\ldots k}(x_i|x_1,...,\widehat{x}_i,...,x_k)=\int\limits_0^\infty \Phi\left(\frac{x_i}{\lambda_i\sqrt{t}}\right)h^{(n)}_k(\rho^2_{i,k}(x),t)dt. \qquad (13)$$

2^0. Разобьем область интегрирования в формуле (13) на две части и проведем оценивание:

$$F^{(n)}_{i|1\ldots\hat{\imath}\ldots k}(x_i|x_1,...,\widehat{x}_i,...,x_k)=$$

$$=\int\limits_{U_k}\Phi\left(\frac{x_i}{\lambda_i\sqrt{t}}\right)h^{(n)}_k(\rho^2_{i,k}(x),t)dt+\int\limits_{U_k^c}\Phi\left(\frac{x_i}{\lambda_i\sqrt{t}}\right)h^{(n)}_k(\rho^2_{i,k}(x),t)dt\le$$

$$\le\Phi\left(\frac{x_i}{\lambda_i\sqrt{U_k^+}}\right)\int\limits_{U_k}h^{(n)}_k(\rho^2_{i,k}(x),t)dt+\int\limits_{U_k^c}h^{(n)}_k(\rho^2_{i,k}(x),t)dt.$$

Поскольку $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt{U_k^+}=\zeta_\infty(x)$, то, учитывая непрерывность функции $\Phi(\cdot)$ и δ-образность последовательности $\left\{h^{(n)}_k(\rho^2_{i,k}(x),t)\right\}_{k=1}^\infty$ (см. лемму 2), получаем неравенство:

$$\lim_{k\to\infty}F^{(n)}_{i|1\ldots\hat{\imath}\ldots k}(x_i|x_1,...,\widehat{x}_i,...,x_k)\le\Phi\left(\frac{x_i}{\lambda_i\zeta_\infty(x)}\right). \qquad (14)$$

С другой стороны,

$$F^{(n)}_{i|1\ldots\hat{\imath}\ldots k}(x_i|x_1,...,\widehat{x}_i,...,x_k)\ge\Phi\left(\frac{x_i}{\lambda_i\sqrt{U_k^-}}\right)\int\limits_{U_k}h^{(n)}_k(\rho^2_{i,k}(x),t)dt$$

и $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt{U_k^-}=\zeta_\infty(x)$, поэтому

$$\lim_{k\to\infty}F^{(n)}_{i|1\ldots\hat{\imath}\ldots k}(x_i|x_1,...,\widehat{x}_i,...,x_k)\ge\Phi\left(\frac{x_i}{\lambda_i\zeta_\infty(x)}\right). \qquad (15)$$

Учитывая неравенства (14) и (15), получаем утверждение пункта 2^0. Теорема доказана.

Замечание. В работе [11] было получено представление условной функции распределения $F^{(n)}_{i|1\ldots\hat{\imath}\ldots k}$ через бета-распределение $B(\cdot;\cdot,\cdot)$:

$$F^{(n)}_{i|1\ldots\hat{\imath}\ldots k}(x_i|x_1,...,\widehat{x}_i,...,x_k) =$$

$$= \begin{cases} 1-\dfrac{1}{2}B\left(\dfrac{1+\frac{1}{n}\sum\limits_{j=1,\,j\neq i}^{k}\frac{x_j^2}{\lambda_j^2}}{1+\frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{k}\frac{x_j^2}{\lambda_j^2}};\dfrac{n+k-1}{2},\dfrac{1}{2}\right), & x_i\ge 0; \\ \dfrac{1}{2}B\left(\dfrac{1+\frac{1}{n}\sum\limits_{j=1,\,j\neq i}^{k}\frac{x_j^2}{\lambda_j^2}}{1+\frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{k}\frac{x_j^2}{\lambda_j^2}};\dfrac{n+k-1}{2},\dfrac{1}{2}\right), & x_i\le 0. \end{cases} \qquad (16)$$

Утверждение пункта 2^0 теоремы 2 может быть доказано на основе двусторонней оценки бета-распределения [12]: $\forall x\in(0,1)$

$$\Phi\left(x\sqrt{N-\frac{1}{2}}\right)\le\frac{1}{2}\left[1+B\left(x^2;\frac{1}{2},\frac{N}{2}\right)\right]\le\Phi\left(\frac{x\sqrt{N}}{\sqrt{1-x^2}}\right) \qquad (17)$$

для достаточно больших $N\in\mathbb{N}$. А именно, ввиду представления (16) и известного соотношения для бета-распределения

$$B(y;a,b)=1-B(1-y;b,a),$$

из неравенств (17) получаем: если $x_i\ge 0$, то

$$\Phi\left(\frac{\frac{x_i}{\lambda_i}\sqrt{\frac{n+k-\frac{3}{2}}{k}}}{\sqrt{\frac{n}{k}+\frac{1}{k}\sum\limits_{j=1}^{k}\frac{x_j^2}{\lambda_j^2}}}\right)\le F^{(n)}_{i|1\ldots\hat{\imath}\ldots k}(x_i|\bar{x})\le\Phi\left(\frac{\frac{x_i}{\lambda_i}\sqrt{\frac{n+k-1}{k}}}{\sqrt{\frac{n}{k}+\frac{1}{k}\sum\limits_{j=1,\,j\neq i}^{k}\frac{x_j^2}{\lambda_j^2}}}\right), \qquad (18)$$

если $x_i\le 0$, то

$$\Phi\left(\frac{\frac{x_i}{\lambda_i}\sqrt{\frac{n+k-1}{k}}}{\sqrt{\frac{n}{k}+\frac{1}{k}\sum\limits_{j=1,\,j\neq i}^{k}\frac{x_j^2}{\lambda_j^2}}}\right)\le F^{(n)}_{i|1\ldots\hat{\imath}\ldots k}(x_i|\bar{x})\le\Phi\left(\frac{\frac{x_i}{\lambda_i}\sqrt{\frac{n+k-\frac{3}{2}}{k}}}{\sqrt{\frac{n}{k}+\frac{1}{k}\sum\limits_{j=1}^{k}\frac{x_j^2}{\lambda_j^2}}}\right). \qquad (19)$$

Здесь $\bar{x}=(x_1,\ldots,\widehat{x}_i,\ldots,x_k)$.

Переходя к пределу в (18) и (19) при $k\to\infty$, ввиду пункта 1^0 теоремы 1 и непрерывности функции $\Phi(\cdot)$, получаем утверждение пункта 2^0 теоремы 2.

Доказательство теоремы 3. Рассмотрим случай, когда $x_i\ge 0$ (если $x_i<0$, доказательство проводится аналогичным образом). Ввиду возрастания функции $\Phi(\cdot)$

из (18) получаем двойные неравенства:

$$\frac{\frac{x_i^2}{\lambda_i^2}\frac{n+k-\frac{3}{2}}{k}}{\frac{n}{k}+\frac{1}{k}\sum\limits_{j=1}^{k}\frac{x_j^2}{\lambda_j^2}} \le \left[\Phi^{-1}\left(F^{(n)}_{i|1\ldots\hat{\imath}\ldots k}(x_i|\bar{x})\right)\right]^2 \le \frac{\frac{x_i^2}{\lambda_i^2}\frac{n+k-1}{k}}{\frac{n}{k}+\frac{1}{k}\sum\limits_{j=1,\,j\neq i}^{k}\frac{x_j^2}{\lambda_j^2}}, \quad i=\overline{1,k}.$$

Суммируя, получаем двустороннюю оценку для нормированной суммы квадратов:

$$\frac{\frac{n+k-\frac{3}{2}}{k}\frac{1}{k}\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{x_i^2}{\lambda_i^2}}{\frac{n}{k}+\frac{1}{k}\sum\limits_{j=1}^{k}\frac{x_j^2}{\lambda_j^2}} \le \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\left[\Phi^{-1}\left(F^{(n)}_{i|1\ldots\hat{\imath}\ldots k}(x_i|\bar{x})\right)\right]^2 \le \frac{\frac{n+k-1}{k}\frac{1}{k}\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{x_i^2}{\lambda_i^2}}{\frac{n}{k}+\frac{1}{k}\sum\limits_{j=1,\,j\neq i}^{k}\frac{x_j^2}{\lambda_j^2}}.$$

Переходя к пределу при $k\to\infty$, получаем утверждение теоремы.

Доказательство теоремы 4. Для конечномерных проекций меры Стьюдента μ на пространстве $H_k=\mathrm{Span}\{e_1,\ldots,e_k\}$ логарифмический градиент есть [2, с. 283]

$$\beta^{\mu}_{H_k}(x)=\frac{\nabla f^{(n)}_{1\ldots k}(x)}{f^{(n)}_{1\ldots k}(x)}, \quad x=(x_1,\ldots,x_k).$$

Ввиду теоремы 1

$$\frac{\dfrac{\partial f^{(n)}_{1\ldots k}(x)}{\partial x_i}}{f^{(n)}_{1\ldots k}(x)} = -\frac{n+k}{nk}\frac{\dfrac{x_i}{\lambda_i^2}}{\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{n}\dfrac{1}{k}\sum\limits_{j=1}^{k}\dfrac{x_j^2}{\lambda_j^2}} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} -\frac{x_i}{\lambda_i^2\zeta_\infty^2(x)}, \quad \forall x\in\Gamma,$$

а в силу теоремы 2 [3, с. 283] логарифмическая производная меры μ по направлению e_i есть

$$\beta_\mu(e_i,x)=-\frac{<e_i,x>}{\lambda_i^2\zeta_\infty^2(x)} \quad \mu\text{-п. н.},$$

это и есть утверждение пункта 1^0. Тогда логарифмический градиент меры Стьюдента μ в гильбертовом пространстве H есть бесконечный вектор

$$\beta^{\mu}_{H}(x)=\left\{-\frac{x_1}{\lambda_1^2\zeta_\infty^2(x)},-\frac{x_2}{\lambda_2^2\zeta_\infty^2(x)},\ldots,-\frac{x_i}{\lambda_i^2\zeta_\infty^2(x)},\ldots\right\}.$$

Рассмотрим проекторы $\pi_k: H\to H_k,\ \ k=1,2,\ldots,$

$$\pi_k\beta^{\mu}_{H}(x)=-\frac{1}{\zeta_\infty^2(x)}\left\{\frac{x_1}{\lambda_1^2},\frac{x_2}{\lambda_2^2},\ldots,\frac{x_k}{\lambda_k^2}\right\}.$$

Тогда получим

$$\frac{1}{k}\ <x,\pi_k\beta^{\mu}_{H}(x)> = -\frac{1}{\zeta_\infty^2(x)}\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\frac{x_j^2}{\lambda_j^2}$$

и, в силу теоремы 1,

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\ <x,\pi_k\beta^{\mu}_{H}(x)> = -1, \quad \forall x\in\Gamma,$$

что и утверждается в пункте 2^0.

В терминах логарифмических производных пункт 2^0 теоремы 2 можно переформулировать следующим образом:

$$\lim_{k\to\infty} F^{(n)}_{i|1\ldots\hat{\imath}\ldots k}(x_i|x_1,...,\widehat{x}_i,...,x_k) = \Phi\left(\operatorname{sgn} x_i \sqrt{-x_i\beta_\mu(e_i,x)}\right)$$

для любого $x \in \Gamma$, $x_j = <x, e_j>$, $j = 1, 2, \ldots$. Тем самым доказан пункт 3^0.

Утверждение пункта 4^0 следует из пункта 1^0 и теоремы 1 (пункт 3^0). Теорема доказана.

Аналогичные задачи для устойчивых эллиптически контурированных мер в H рассматривались в работе [10].

Литература

[1] де Гроот М. Оптимальные статистические решения. М.: Мир, 1974. 491 с.

[2] Богачев В.И. Гауссовские меры. М.: Наука, 1997. 352 с.

[3] Норин Н.В., Смолянов О.Г. Несколько результатов о логарифмических производных мер на локально выпуклом пространстве// Мат. заметки. 1993. Т.54. Вып. 6. С. 135–136.

[4] Судаков В.Н. Геометрические проблемы теории бесконечномерных распределений// Труды МИАН. Т.141. Л.: Наука, 1976.

[5] Лисицкий А.Д. Проблема Итона и мультипликативные свойства многомерных распределений// ТВП. 1997. Т.42. Вып. 4. С. 696–714.

[6] Круглов В.М. Смеси вероятностных распределений// Вестник Моск. ун-та. Сер. 15. ВМиК. 1991. № 2. С. 3–15.

[7] Федорюк М.В. Асимптотика: интегралы и ряды. М.: Наука, 1987. 544 с.

[8] Ширяев А.Н. Вероятность. М.: Наука, 1989. 640 с.

[9] Шатских С.Я., Кнутова Е.М. Асимптотические свойства условных квантилей устойчивого сферически симметричного распределения с показателем $\alpha = 2/3$// Вестник СамГУ. 1998. № 4(10). С. 102–119.

[10] Шатских С.Я. Устойчивые эллиптически контурированные меры в гильбертовом пространстве: асимптотические свойства условных распределений// Изв. РАЕН. Серия МММИУ. 1999. Вып. 3. С. 41–81.

[11] Шатских С.Я., Кнутова Е.М. Воспроизводимость условных квантилей многомерного распределения Стьюдента// Изв. РАЕН. Серия МММИУ. 1997. Т.1. № 1. С. 36–58.

[12] Shatskih S.Ya. Asymptotic properties of conditional quantiles of the Cauchy distribution in Hilbert space// Journal of Mathematical Sciences. 1999. V.93. No.4. P. 574–581.

ASYMPTOTIC PROPERTIES OF STUDENT'S CONDITIONAL DISTRIBUTIONS IN HILBERT SPACE[3]

 E.M. Knutova[4]

The paper is devoted to the study of asymptotic properties of conditional distributions wich are generated by finite-dimensional projections of Student's measure in real Hilbert space. Almost sure convergence of conditional distributions to normality is proved. The proof is based on Schoenberg representation of conditional distributions in the form of Gaussian mixture, it is also based on the Laplace method of the integrals asymptotic finding. The strong law of large numbers for the scheme of series of conditional distributions families is stated. Some properties of logarithmic derivatives and logarithmic gradients of Student's measure and their connection with limit conditional distributions are considered.

Поступила в редакцию $10/IX/2001$;
в окончательном варианте — $07/XII/2001$.

[3]Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. S.V. Astashkin.
[4]Knutova Elena Mikhailovna (knutova@ssu.samara.ru), Dept. of Functional Analysis and Theory of Functions, Samara State University, Samara, 443011, Russia.