УДК 517.587

ФУНКЦИИ ЭРМИТА–ЛАГЕРРА–ГАУССА[1]

© 2001 Е.Г. Абрамочкин[2]

Предложено объединение двумерных функций Эрмита–Гаусса и Лагерра–Гаусса в единый класс посредством введения дополнительного параметра. Непрерывное изменение введенного параметра позволяет переходить от функций Эрмита–Гаусса к функциям Лагерра–Гаусса, сохраняя ряд важных свойств каждого из исходных классов функций, например, свойство ортогональности в пространстве $L_2(\mathbb{R}^2)$. Полученные таким образом функции были названы функциями Эрмита–Лагерра–Гаусса и исследованы подобно классическим ортогональным полиномам. Найдены дифференциальные и интегральные соотношения, рекуррентные формулы и свойства симметрии, производящая функция и алгебраические разложения. Показана инвариантность функций Эрмита–Лагерра–Гаусса при некоторых интегральных преобразованиях типа Фурье.

Введение

Во многих задачах естествознания важную роль играет уравнение

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + 2ik\,\frac{\partial F}{\partial l} = 0, \tag{1}$$

где $F(x,y,l)$ — комплекснозначная функция; x, y — координаты на плоскости; l — переменная распространения; k — положительный параметр. Найденное Эрвином Шредингером в 1926 г. при исследовании проблем теории волн, оно оказалось применимым для математического описания широкого круга физических явлений. Для задач оптики, например, функция $F(x,y,l)$ описывает поведение светового поля в вакууме при распространении вдоль оси l и обычно предполагается целой аналитической по x, y функцией.

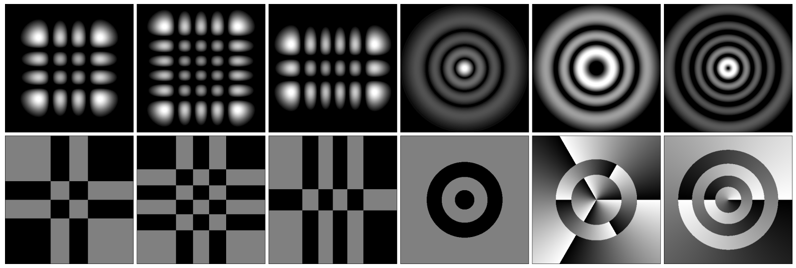
Известно [1], что фундаментальное решение уравнения (1) есть

$$G(x,y,l) = \frac{k}{2\pi il}\,\exp\left(\frac{ik}{2l}\,(x^2+y^2)\right)$$

и, таким образом, решение уравнения Шредингера с начальным условием $F(x,y,0) = F_0(x,y)$ имеет вид

[1]Представлена доктором физ.-мат. наук В.Г. Волостниковым (Самарский филиал ФИАН).

[2]Абрамочкин Евгений Григорьевич (ega@fian.smr.ru), кафедра дифференциальных уравнений Самарского государственного университета, 443011, Самара, ул. Акад. Павлова, 1.



$\mathscr{H}_{3,3}$ $\mathscr{H}_{5,2}$ $\mathscr{H}_{4,5}$ $\mathscr{L}_{3,0}$ $\mathscr{L}_{2,3}$ $\mathscr{L}_{4,-1}$

Рис. 1. Интенсивности (верхний ряд) и фазы (нижний ряд) функций Эрмита–Гаусса и Лагерра–Гаусса. Черный цвет соответствует нулевой интенсивности и нулевой фазе, белый цвет соответствует максимальной интенсивности и фазе 2π. Черно-серые переходы на распределениях фазы функций Эрмита–Гаусса показывают местоположение нулевых линий (при пересечении такой линии происходит скачок фазы на π). Черно-белые переходы на фазовых распределениях функций Лагерра–Гаусса соответствуют склейке фаз $\varphi = 0$ и $\varphi = 2\pi$. Точка в центре фазового распределения функции $\mathscr{L}_{2,3}(x,y)$ — изолированный нуль третьего порядка: при обходе вокруг нуля против часовой стрелки фаза трижды меняется от 0 до 2π

$$F(x,y,l) = \frac{k}{2\pi i l} \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(\frac{ik}{2l}\left[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\right]\right) F_0(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta. \tag{2}$$

Интеграл в правой части называется преобразованием Френеля от функции $F_0(\xi,\eta)$. Обратное к преобразованию (2) преобразование также является френелевским:

$$F_0(\xi,\eta) = -\frac{k}{2\pi i l} \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-\frac{ik}{2l}\left[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\right]\right) F(x,y,l)\, dx\, dy.$$

Для функций $F_0(\xi,\eta) \in L_2(\mathbb{R}^2)$ равенство Парсеваля

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \left|F(x,y,l)\right|^2 dx\, dy = \iint_{\mathbb{R}^2} \left|F_0(\xi,\eta)\right|^2 d\xi\, d\eta$$

выражает закон сохранения энергии световых полей: полная энергия светового поля постоянна и не зависит от выбора плоскости $l = \mathrm{const}$.

В дальнейшем будет использоваться следующая терминология: $I(x,y,l) = F(x,y,l)\overline{F}(x,y,l)$ — интенсивность, $\varphi(x,y,l) = \arg F(x,y,l)$ — фаза функции F. Здесь и далее черта сверху означает комплексное сопряжение. Как следствие, представление $F(x,y,l)$ через интенсивность и фазу имеет вид:

$$F(x,y,l) = \sqrt{I(x,y,l)}\, \exp\bigl(i\varphi(x,y,l)\bigr).$$

Поиск решений уравнения Шредингера при различных предположениях относительно $F(x,y,l)$ имеет давнюю историю и отражен в обширной литературе по этому вопросу. Поскольку, каждое решение $F(x,y,l)$ порождает интегральное соотношение вида (2), то нахождение решений при известном начальном распределении $F(x,y,0)$ есть просто вычисление интеграла Френеля.

В работах [2–4] описаны многие решения уравнения Шредингера, среди которых особое значение имеют два класса решений, выражающихся через функции Эрмита–Гаусса (см. рис. 1)

$$\mathscr{H}_{n,m}(x,y) = e^{-x^2-y^2} H_n\bigl(\sqrt{2}\,x\bigr) H_m\bigl(\sqrt{2}\,y\bigr) \qquad (n,m = 0,1,\ldots) \tag{3}$$

и функции Лагерра–Гаусса (см. рис. 1)

$$\mathscr{L}_{n,\pm m}(x,y) = e^{-x^2-y^2}(x \pm iy)^m L_n^m(2x^2+2y^2) \quad (n,m=0,1,\dots). \tag{4}$$

Здесь

$$H_n(t) = (-1)^n e^{t^2}\frac{d^n}{dt^n}\big(e^{-t^2}\big), \qquad L_n^m(t) = \frac{1}{n!}t^{-m}e^t\frac{d^n}{dt^n}\big(t^{n+m}e^{-t}\big)$$

— полиномы Эрмита и Лагерра, соответственно. Аналитические выражения для этих классов функций с использованием преобразования Френеля имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{k}{2\pi il}\iint_{\mathbb{R}^2}\exp\Big(\frac{ik}{2l}\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\right]\Big)\,\mathscr{H}_{n,m}\Big(\frac{\xi}{\rho},\frac{\eta}{\rho}\Big)\,d\xi\,d\eta =\\ = \frac{1}{|\sigma|}\exp\Big(\frac{2il(x^2+y^2)}{k\rho^4|\sigma|^2} - i(n+m+1)\arg\sigma\Big)\,\mathscr{H}_{n,m}\Big(\frac{x}{\rho|\sigma|},\frac{y}{\rho|\sigma|}\Big),\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}\frac{k}{2\pi il}\iint_{\mathbb{R}^2}\exp\Big(\frac{ik}{2l}\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\right]\Big)\,\mathscr{L}_{n,\pm m}\Big(\frac{\xi}{\rho},\frac{\eta}{\rho}\Big)\,d\xi\,d\eta =\\ = \frac{1}{|\sigma|}\exp\Big(\frac{2il(x^2+y^2)}{k\rho^4|\sigma|^2} - i(2n+m+1)\arg\sigma\Big)\,\mathscr{L}_{n,\pm m}\Big(\frac{x}{\rho|\sigma|},\frac{y}{\rho|\sigma|}\Big),\end{aligned} \tag{6}$$

где $\rho = \mathrm{const}$ и $\sigma = 1 + 2il/k\rho^2$ — комплексный параметр, используемый для более компактной записи.

Особое значение решений (5), (6) уравнения (1) связано с такими свойствами классов функций $\{\mathscr{H}_{n,m}(x,y),\, n,m=0,1,\dots\}$ и $\{\mathscr{L}_{n,m}(x,y),\, n,\pm m=0,1,\dots\}$, как ортогональность и полнота в $L_2(\mathbb{R}^2)$, что позволяет по разложению решения уравнения Шредингера при $l=0$ выписать его вид для произвольного l. Например, для функций Эрмита–Гаусса соответствующие формулы имеют вид

$$\begin{aligned}F(x,y,0) &= \sum_{n,m=0}^{\infty} c_{nm}\mathscr{H}_{n,m}(x,y),\\ F(x,y,l) &= \frac{1}{\sigma}\exp\Big(\frac{2il(x^2+y^2)}{k\rho^4|\sigma|^2}\Big)\sum_{n,m=0}^{\infty} c_{nm}e^{-i(n+m)\arg\sigma}\mathscr{H}_{n,m}\Big(\frac{x}{\rho|\sigma|},\frac{y}{\rho|\sigma|}\Big).\end{aligned}$$

Кроме того, инвариантность функций Эрмита–Гаусса и Лагерра–Гаусса по отношению к преобразованию Френеля проявляется таким образом, что интенсивность получаемых решений уравнения Шредингера при изменении l меняется только в масштабе, сохраняя свой структурный вид.

Интегральные преобразования Френеля (5), (6) являются частными случаями преобразования Фурье для функций Эрмита–Гаусса и Лагерра–Гаусса с дополнительной функцией в виде мнимой экспоненты с квадратичным показателем общего вида:

$$\iint_{\mathbb{R}^2}\exp\big(-i(x\xi+y\eta)+i(a\xi^2+2b\xi\eta+c\eta^2)\big)\,f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta. \tag{7}$$

Если $a=c$ и $b=0$, то для функций Эрмита–Гаусса и Лагерра–Гаусса преобразование вида (7) хорошо известно и получается небольшой модификацией соотношений (5) и (6):

$$\begin{aligned}&\iint_{\mathbb{R}^2}\exp\big(-i(x\xi+y\eta)+ia(\xi^2+\eta^2)\big)\mathscr{H}_{n,m}(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta = \frac{\pi(-i)^{n+m}}{\sqrt{1+a^2}}\times\\ &\times\exp\Big(-\frac{ia(x^2+y^2)}{4(1+a^2)} + i(n+m+1)\mathrm{arctg}\,a\Big)\,\mathscr{H}_{n,m}\Big(\frac{x}{2\sqrt{1+a^2}},\frac{y}{2\sqrt{1+a^2}}\Big),\end{aligned} \tag{8}$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \exp\bigl(-i(x\xi+y\eta)+ia(\xi^2+\eta^2)\bigr)\mathscr{L}_{n,\pm m}(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta = \frac{\pi(-i)^{2n+m}}{\sqrt{1+a^2}}\times$$
$$\times\exp\left(-\frac{ia(x^2+y^2)}{4(1+a^2)}+i(2n+m+1)\operatorname{arctg} a\right)\mathscr{L}_{n,\pm m}\left(\frac{x}{2\sqrt{1+a^2}},\frac{y}{2\sqrt{1+a^2}}\right). \tag{9}$$

Другой известный случай преобразования (7) для $\mathscr{H}_{n,m}(x,y)$ вытекает из представления (8) в виде произведения одномерных интегралов:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \exp\bigl(-i(x\xi+y\eta)+i(a\xi^2+c\eta^2)\bigr)\mathscr{H}_{n,m}(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta = \frac{\pi(-i)^{n+m}}{\sqrt[4]{(1+a^2)(1+c^2)}}\times$$
$$\times\exp\left(-\frac{iax^2}{4(1+a^2)}-\frac{icy^2}{4(1+c^2)}+i\left(n+\frac{1}{2}\right)\operatorname{arctg} a+i\left(m+\frac{1}{2}\right)\operatorname{arctg} c\right)\times \tag{10}$$
$$\times\mathscr{H}_{n,m}\left(\frac{x}{2\sqrt{1+a^2}},\frac{y}{2\sqrt{1+c^2}}\right).$$

В частности, при $c=-a$ справедлива формула:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \exp\bigl(-i(x\xi+y\eta)+ia(\xi^2-\eta^2)\bigr)\mathscr{H}_{n,m}(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta = \frac{\pi(-i)^{n+m}}{\sqrt{1+a^2}}\times$$
$$\times\exp\left(-\frac{ia(x^2-y^2)}{4(1+a^2)}+i(n-m)\operatorname{arctg} a\right)\mathscr{H}_{n,m}\left(\frac{x}{2\sqrt{1+a^2}},\frac{y}{2\sqrt{1+a^2}}\right). \tag{11}$$

В работе [5] для функций Эрмита–Гаусса был найден еще один случай преобразования вида (7):

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \exp\bigl(-i(x\xi+y\eta)+i\psi(\xi,\eta,\alpha)\bigr)\mathscr{H}_{n,m}(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta =$$
$$=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\exp\left(-\frac{i}{8}\psi(x,y,\alpha)-\frac{\pi i}{4}(n+m)\right)\sum_{k=0}^{n+m} i^k\cos^{n-k}\alpha\,\sin^{m-k}\alpha\times \tag{12}$$
$$\times P_k^{(n-k,m-k)}(-\cos 2\alpha)\mathscr{H}_{n+m-k,k}\left(\frac{x\cos\alpha+y\sin\alpha}{2\sqrt{2}},\frac{y\cos\alpha-x\sin\alpha}{2\sqrt{2}}\right),$$

где $\psi(\xi,\eta,\alpha)=(\xi^2-\eta^2)\cos 2\alpha+2\xi\eta\sin 2\alpha$ (в оптике эта функция обычно называется астигматическим воздействием),

$$P_k^{(\mu,\nu)}(t)=\frac{(-1)^k}{2^k k!}(1-t)^{-\mu}(1+t)^{-\nu}\frac{d^k}{dt^k}\bigl[(1-t)^{k+\mu}(1+t)^{k+\nu}\bigr]$$

— полиномы Якоби.

Если $\alpha=\pi/4$, то сумма в правой части (12) сворачивается и получается взаимно-однозначное соответствие интегрального вида между семействами функций $\{\mathscr{H}_{n,m}(x,y)\}$ и $\{\mathscr{L}_{n,m}(x,y)\}$:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \exp\bigl(-i(x\xi+y\eta)+2i\xi\eta\bigr)\mathscr{H}_{n,m}(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta =$$
$$=\frac{\pi}{\sqrt{2}}(-1)^{n+m}\exp\left(-\frac{ixy}{4}\right)\begin{cases}(2i)^n m!\,\mathscr{L}_{m,n-m}\left(\dfrac{x}{2\sqrt{2}},\dfrac{y}{2\sqrt{2}}\right) & (n\ge m),\\[2ex] (2i)^m n!\,\mathscr{L}_{n,m-n}\left(\dfrac{y}{2\sqrt{2}},\dfrac{x}{2\sqrt{2}}\right) & (n\le m).\end{cases} \tag{13}$$

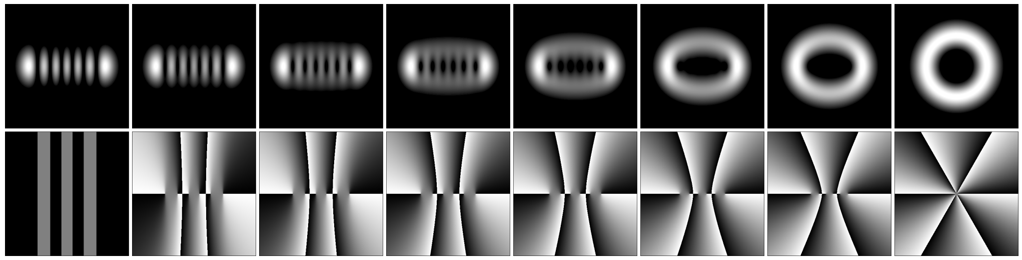


Рис. 2. Функции Эрмита–Лагерра–Гаусса $\mathscr{G}_{6,0}(x, y \,|\, \alpha)$ (верхний ряд — интенсивности, нижний ряд — фазы) при изменении α от 0 до $\pi/4$

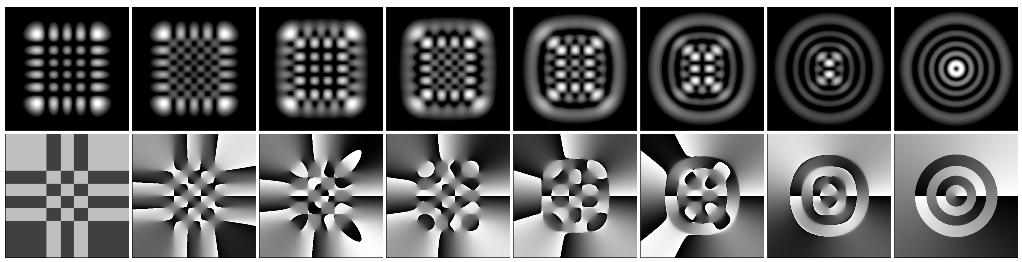


Рис. 3. Функции Эрмита–Лагерра–Гаусса $\mathscr{G}_{4,5}(x, y \,|\, \alpha)$ при изменении a от 0 до $\pi/4$

Введем обозначение:

$$\mathscr{G}_{n,m}(x, y \,|\, \alpha) \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{n+m} i^k \cos^{n-k}\alpha \, \sin^{m-k}\alpha \, P_k^{(n-k,m-k)}(-\cos 2\alpha)\mathscr{H}_{n+m-k,k}(x, y) =$$
$$= e^{-x^2-y^2} \sum_{k=0}^{n+m} i^k \cos^{n-k}\alpha \, \sin^{m-k}\alpha \, P_k^{(n-k,m-k)}(-\cos 2\alpha) H_{n+m-k}\big(\sqrt{2}\,x\big) H_k\big(\sqrt{2}\,y\big). \tag{14}$$

Тогда формулу (12) можно переписать следующим образом:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \exp\big(-i(x\xi + y\eta) + i\psi(\xi, \eta, \alpha)\big)\mathscr{H}_{n,m}(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \times$$
$$\times \exp\left(-\frac{i}{8}\psi(x, y, \alpha) - \frac{\pi i}{4}(n+m)\right) \mathscr{G}_{n,m}\left(\frac{x\cos\alpha + y\sin\alpha}{2\sqrt{2}}, \frac{y\cos\alpha - x\sin\alpha}{2\sqrt{2}} \,\middle|\, \alpha\right). \tag{15}$$

Сравнение интегралов (11), (13) и (15) показывает, что

$$\mathscr{G}_{n,m}(x, y \,|\, 0) = (-i)^m \mathscr{H}_{n,m}(x, y), \tag{16}$$

$$\mathscr{G}_{n,m}(x, y \,|\, \pi/4) = \begin{cases} (-1)^m 2^n m!\, \mathscr{L}_{m,n-m}(x, y) & (n \geq m), \\ (-1)^n 2^m n!\, \mathscr{L}_{n,m-n}(x, -y) & (n \leq m), \end{cases} \tag{17}$$

т. е. функции Эрмита–Гаусса и Лагерра–Гаусса являются частными случаями функций $\mathscr{G}_{n,m}(x, y \,|\, \alpha)$ при $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi/4$, соответственно. Поэтому функции, определяемые равенством (14), были названы функциями Эрмита–Лагерра–Гаусса. На рис. 2–4 представлены некоторые из них. Конечно, объединение двух классов функций можно произвести многими способами, но, как будет показано далее, функции

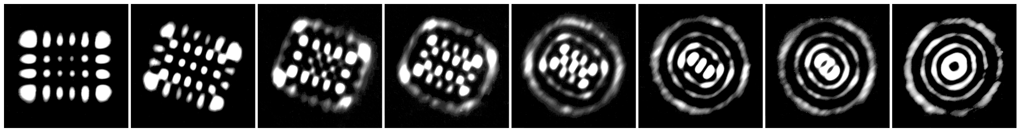


Рис. 4. Экспериментально зарегистрированные интенсивности функций Эрмита–Лагерра–Гаусса $\mathscr{G}_{5,3}(x,y\,|\,\alpha)$ как интенсивности лазерных пучков. Все множество функций получается при реализации оптическими методами интегрального преобразования (15). Этим же объясняется поворот $\mathscr{G}_{5,3}(x,y\,|\,\alpha)$ на фотографиях

$\mathscr{G}_{n,m}(x,y\,|\,\alpha)$ наследуют важные свойства своих известных предшественников (например, ортогональность в $L_2(\mathbb{R}^2)$ при любом фиксированном α) и, помимо этого, в рамках класса обладают инвариантностью к общему преобразованию (7), что невыполнимо для отдельно взятых функций Эрмита–Гаусса и Лагерра–Гаусса. Кроме того, они физически реализуемы в резонаторах лазеров и при распространении в свободном пространстве сохраняют свою структуру.

В данной работе функции Эрмита–Лагерра–Гаусса исследованы в нескольких аспектах. В следующем параграфе найдены производящая функция, дифференциальное и интегральное представление, некоторые рекуррентные соотношения, дифференциальные уравнения, простейшие интегралы и ряды, содержащие функции $\mathscr{G}_{n,m}(x,y\,|\,\alpha)$. Во втором параграфе рассмотрены свойства симметрии функций Эрмита–Лагерра–Гаусса по α, их связь с D-функциями Вигнера и поворотами в $\mathbb{R}^3$. В третьем параграфе исследованы трансформации функций Эрмита–Лагерра–Гаусса при интегральном преобразовании (7). Заключительный параграф посвящен обсуждению полученных результатов.

1. Свойства функций Эрмита–Лагерра–Гаусса

Каждая функция Эрмита–Лагерра–Гаусса, как следует из определения (14), представляет из себя произведение экспоненты $e^{-x^2-y^2}$ на некоторый полином от x, y степени $n+m$. Например, функции $\mathscr{G}_{n,m}(x,y\,|\,\alpha)$ при значениях индексов n и m, не превышающих двух, имеют вид:

$$\begin{aligned}
\mathscr{G}_{0,0}(x,y\,|\,\alpha) &= e^{-x^2-y^2},\\
\mathscr{G}_{1,0}(x,y\,|\,\alpha) &= e^{-x^2-y^2}2\sqrt{2}(x\cos\alpha+iy\sin\alpha),\\
\mathscr{G}_{0,1}(x,y\,|\,\alpha) &= e^{-x^2-y^2}2\sqrt{2}(x\sin\alpha-iy\cos\alpha),\\
\mathscr{G}_{2,0}(x,y\,|\,\alpha) &= e^{-x^2-y^2}\big((4x^2-1)(1+\cos2\alpha)+8ixy\sin2\alpha-(4y^2-1)(1-\cos2\alpha)\big) =\\
&= e^{-x^2-y^2}\big(8(x\cos\alpha+iy\sin\alpha)^2-2\cos2\alpha\big),\\
\mathscr{G}_{1,1}(x,y\,|\,\alpha) &= e^{-x^2-y^2}\big((4x^2+4y^2-2)\sin2\alpha-8ixy\cos2\alpha\big),\\
\mathscr{G}_{0,2}(x,y\,|\,\alpha) &= e^{-x^2-y^2}\big(8(x\sin\alpha-iy\cos\alpha)^2+2\cos2\alpha\big).
\end{aligned}$$

Поскольку функция $\mathscr{G}_{n,m}(x,y\,|\,\alpha)$ есть линейная комбинация функций Эрмита–Гаусса $\mathscr{H}_{n+m-k,k}(x,y)$ с одинаковой суммой индексов, то в силу равенства (5) функция

Эрмита–Лагерра–Гаусса инвариантна по отношению к преобразованию Френеля:

$$\begin{aligned} \frac{k}{2\pi i l} \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(\frac{ik}{2l}\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\right]\right) \mathscr{G}_{n,m}\left(\frac{\xi}{\rho},\frac{\eta}{\rho}\,\Big|\,\alpha\right) d\xi\, d\eta = \\ = \frac{1}{|\sigma|} \exp\left(\frac{2il(x^2+y^2)}{k\rho^4|\sigma|^2} - i(n+m+1)\arg\sigma\right) \mathscr{G}_{n,m}\left(\frac{x}{\rho|\sigma|},\frac{y}{\rho|\sigma|}\,\Big|\,\alpha\right), \end{aligned} \tag{18}$$

и, как следствие, для любого α порождает структурно-устойчивое решение уравнения Шредингера.

Еще одно свойство функций $\mathscr{G}_{n,m}(x,y\,|\,\alpha)$ получается из равенства (15): для любого фиксированного α семейство $\{\mathscr{G}_{n,m}(x,y\,|\,\alpha), n,m=0,1,\ldots\}$ является базисом в пространстве $L_2(\mathbb{R}^2)$, т.к. преобразование Фурье переводит базис в базис.

Можно показать, что $\{\mathscr{G}_{n,m}(x,y\,|\,\alpha),\ n,m=0,1,\ldots\}$ — это ортогональный базис, а именно

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \mathscr{G}_{n,m}(x,y\,|\,\alpha)\overline{\mathscr{G}}_{N,M}(x,y\,|\,\alpha)\,dx\,dy = \pi 2^{n+m-1} n!\,m!\,\delta_{nN}\delta_{mM}. \tag{19}$$

Отметим, что независимость нормировочного множителя от α для всех $\mathscr{G}_{n,m}(x,y\,|\,\alpha)$, включая функции Эрмита–Гаусса и Лагерра–Гаусса, есть прямое следствие равенства (15) и формулы Парсеваля.

Для доказательства ортогональности удобно предварительно найти производящую функцию семейства функций $\mathscr{G}_{n,m}(x,y\,|\,\alpha)$. Полагая

$$X = \frac{x\cos\alpha + y\sin\alpha}{2\sqrt{2}}, \qquad Y = \frac{y\cos\alpha - x\sin\alpha}{2\sqrt{2}},$$

можно представить астигматическое преобразование (15) в виде

$$\begin{aligned} \mathscr{G}_{n,m}(X,Y\,|\,\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \exp\left(i(X^2-Y^2)+\frac{\pi i}{4}(n+m)\right) \times \\ \times \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\bigl(-i(x\xi+y\eta)+i\psi(\xi,\eta,\alpha)\bigr)\mathscr{H}_{n,m}(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta. \end{aligned}$$

Тогда вычисление производящей функции

$$\mathrm{G}(X,Y,\alpha,s,t) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \mathscr{G}_{n,m}(X,Y|\alpha)\frac{s^n t^m}{n!\,m!}$$

становится достаточно простым, если воспользоваться выражением для производящей функции полиномов Эрмита

$$e^{-s^2+2sx} = \sum_{k=0}^{\infty} H_k(x)\frac{s^k}{k!}.$$

В итоге находим формулу для $\mathrm{G}(X,Y,\alpha,s,t)$:

$$\begin{aligned} \mathrm{G}(X,Y,\alpha,s,t) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} e^{i(X^2-Y^2)} \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\bigl(-i(x\xi+y\eta)+i\psi(\xi,\eta,\alpha)\bigr) \times \\ \times \sum_{n,m=0}^{\infty} \mathscr{H}_{n,m}(\xi,\eta)\frac{(se^{\pi i/4})^n(te^{\pi i/4})^m}{n!\,m!}\,d\xi\,d\eta = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\exp(-X^2-Y^2-is^2-it^2)\times \\ \times \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-i(x\xi+y\eta)+i\psi(\xi,\eta,\alpha)-\xi^2-\eta^2+2\sqrt{2}(\xi s+\eta t)e^{\pi i/4})\,d\xi\,d\eta = \\ = \exp\bigl(-X^2-Y^2-\psi(s,t,\alpha)+2\sqrt{2}\,X(s\cos\alpha+t\sin\alpha)+2\sqrt{2}\,iY(s\sin\alpha-t\cos\alpha)\bigr). \end{aligned} \tag{20}$$

Найдем теперь сумму следующего ряда:

$$\sum_{n,m=0}^{\infty}\sum_{N,M=0}^{\infty}\left(\iint_{\mathbb{R}^2}\mathscr{G}_{n,m}(x,y\,|\,\alpha)\overline{\mathscr{G}}_{N,M}(x,y\,|\,\alpha)\,dx\,dy\right)\frac{s^n t^m}{n!\,m!}\frac{S^N T^M}{N!\,M!}=$$
$$=\iint_{\mathbb{R}^2}\mathbf{G}(x,y,\alpha,s,t)\overline{\mathbf{G}}(x,y,\alpha,S,T)\,dx\,dy=\exp\bigl(-\psi(s,t,\alpha)-\psi(S,T,\alpha)\bigr)\times$$
$$\times\int_{\mathbb{R}}\exp\bigl(-2x^2+2\sqrt{2}\,x[(s+S)\cos\alpha+(t+T)\sin\alpha]\bigr)\,dx\times$$
$$\times\int_{\mathbb{R}}\exp\bigl(-2y^2+2\sqrt{2}\,iy[(s-S)\sin\alpha-(t-T)\cos\alpha]\bigr)\,dy=$$
$$=\frac{\pi}{2}\exp(2sS+2tT)=\frac{\pi}{2}\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(2sS)^n(2tT)^m}{n!\,m!}\,.$$

Сопоставляя в данной цепочке равенств последний ряд с первым, получим формулу (19).

Производящая функция позволяет найти и формулу Родрига (т. е. дифференциальное представление) для функций Эрмита–Лагерра–Гаусса. Если переписать (20) в виде

$$\mathrm{G}(x,y,\alpha,s,t)=\exp\bigl(x^2+y^2-\psi(s-s_0,t-t_0,\alpha)\bigr),$$

где $s_0=\sqrt{2}(x\cos\alpha-iy\sin\alpha)$, $t_0=\sqrt{2}(x\sin\alpha+iy\cos\alpha)$, то получается дифференциальное представление

$$\mathscr{G}_{n,m}(x,y\,|\,\alpha)=\frac{\partial^n}{\partial s^n}\frac{\partial^m}{\partial t^m}\mathrm{G}(x,y,\alpha,s,t)\Big|_{s=t=0}=e^{x^2+y^2}\frac{\partial^n}{\partial s^n}\frac{\partial^m}{\partial t^m}e^{-\psi(s,t,\alpha)}\Big|_{s=-s_0,\,t=-t_0}=$$
$$=(-1)^{n+m}e^{x^2+y^2}\frac{\partial^n}{\partial[\sqrt{2}(x\cos\alpha-iy\sin\alpha)]^n}\frac{\partial^m}{\partial[\sqrt{2}(x\sin\alpha+iy\cos\alpha)]^m}\,e^{-2x^2-2y^2}. \tag{21}$$

Формулы Родрига для полиномов Эрмита и Лагерра являются следствиями этой формулы при подстановке $\alpha=0$ и $\alpha=\pi/4$, соответственно.

Интегральное представление функций Эрмита–Лагерра–Гаусса можно найти из определения (14) и соответствующего представления для полиномов Эрмита:

$$H_k(x)=\frac{(-2i)^k}{\sqrt{\pi}}\,e^{x^2}\int_{\mathbb{R}}e^{-t^2+2ixt}\,t^k\,dt.$$

Окончательная формула имеет вид

$$\mathscr{G}_{n,m}(x,y\,|\,\alpha)=\frac{(-2i)^{n+m}}{\pi}\,e^{x^2+y^2}\times$$
$$\times\iint_{\mathbb{R}^2}e^{-s^2-t^2+2\sqrt{2}\,i(xs+yt)}(s\cos\alpha+it\sin\alpha)^n(s\sin\alpha-it\cos\alpha)^m\,ds\,dt. \tag{22}$$

Использование дифференциального представления (21) и тождества

$$\frac{d^k(xf)}{dx^k}=x\frac{d^kf}{dx^k}+k\frac{d^{k-1}f}{dx^{k-1}}$$

позволяет получить рекуррентные соотношения, связывающие функции Эрмита–Лагерра–Гаусса. Например, увеличение на единицу первого индекса приводит к со-отношению

$$\begin{aligned}
\mathscr{G}_{n+1,m}(x,y|\alpha) &= e^{x^2+y^2}\frac{\partial^n}{\partial s^n}\frac{\partial^m}{\partial t^m}\frac{\partial}{\partial s}\,e^{-(s^2-t^2)\cos 2\alpha-2st\sin 2\alpha} = \\
&= e^{x^2+y^2}\frac{\partial^n}{\partial s^n}\frac{\partial^m}{\partial t^m}\,(-2s\cos 2\alpha-2t\sin 2\alpha)e^{-(s^2-t^2)\cos 2\alpha-2st\sin 2\alpha} = \\
&= e^{x^2+y^2}\biggl(-2\cos 2\alpha\biggl(s\frac{\partial^n}{\partial s^n}+n\frac{\partial^{n-1}}{\partial s^{n-1}}\biggr)\frac{\partial^m}{\partial t^m}\,e^{-(s^2-t^2)\cos 2\alpha-2st\sin 2\alpha} - \\
&\qquad -2\sin 2\alpha\frac{\partial^n}{\partial s^n}\,\biggl(t\frac{\partial^m}{\partial t^m}+m\frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}}\biggr)e^{-(s^2-t^2)\cos 2\alpha-2st\sin 2\alpha}\biggr) = \\
&= -2\cos 2\alpha\bigl(s\mathscr{G}_{n,m}(x,y\mid\alpha)+n\mathscr{G}_{n-1,m}(x,y\mid\alpha)\bigr) - \\
&\qquad -2\sin 2\alpha\bigl(t\mathscr{G}_{n,m}(x,y\mid\alpha)+m\mathscr{G}_{n,m-1}(x,y\mid\alpha)\bigr).
\end{aligned}$$

Поскольку $s=-\sqrt{2}(x\cos\alpha-iy\sin\alpha)$ и $t=-\sqrt{2}(x\sin\alpha+iy\cos\alpha)$, то

$$\mathscr{G}_{n+1,m} = 2\sqrt{2}(x\cos\alpha+iy\sin\alpha)\mathscr{G}_{n,m}-2n\cos 2\alpha\,\mathscr{G}_{n-1,m}-2m\sin 2\alpha\,\mathscr{G}_{n,m-1}.$$

Аналогичным образом получается второе рекуррентное соотношение:

$$\mathscr{G}_{n,m+1} = 2\sqrt{2}(x\sin\alpha-iy\cos\alpha)\mathscr{G}_{n,m}-2n\sin 2\alpha\,\mathscr{G}_{n-1,m}+2m\cos 2\alpha\,\mathscr{G}_{n,m-1}.$$

Здесь аргументы $(x,y\mid\alpha)$ всех функций для краткости опущены. Другая форма записи тех же формул

$$\begin{aligned}
2\sqrt{2}\,x\,\mathscr{G}_{n,m} &= \cos\alpha\,\mathscr{G}_{n+1,m}+\sin\alpha\,\mathscr{G}_{n,m+1}+2n\cos\alpha\,\mathscr{G}_{n-1,m}+2m\sin\alpha\,\mathscr{G}_{n,m-1},\\
2\sqrt{2}\,iy\,\mathscr{G}_{n,m} &= \sin\alpha\,\mathscr{G}_{n+1,m}-\cos\alpha\,\mathscr{G}_{n,m+1}-2n\sin\alpha\,\mathscr{G}_{n-1,m}+2m\cos\alpha\,\mathscr{G}_{n,m-1}.
\end{aligned} \tag{23}$$

Последние выражения позволяют вычислять интегралы вида

$$\iint_{\mathbb{R}^2} x^N y^M \mathscr{G}_{n_1,m_1}(x,y|\alpha)\overline{\mathscr{G}}_{n_2,m_2}(x,y|\alpha)\,dx\,dy,$$

используя в качестве отправной точки свойство ортогональности (19). Простейшими примерами такого рода являются равенства

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathbb{R}^2} x\bigl|\mathscr{G}_{n,m}(x,y\mid\alpha)\bigr|^2 dx\,dy &= \iint_{\mathbb{R}^2} y\bigl|\mathscr{G}_{n,m}(x,y\mid\alpha)\bigr|^2 dx\,dy = \\
&= \iint_{\mathbb{R}^2} xy\bigl|\mathscr{G}_{n,m}(x,y\mid\alpha)\bigr|^2 dx\,dy = 0,\\
\iint_{\mathbb{R}^2} (x^2+y^2)\bigl|\mathscr{G}_{n,m}(x,y\mid\alpha)\bigr|^2 dx\,dy &= \frac{n+m+1}{2}\,\|\mathscr{G}_{n,m}\|^2,\\
\iint_{\mathbb{R}^2} (x^2-y^2)\bigl|\mathscr{G}_{n,m}(x,y\mid\alpha)\bigr|^2 dx\,dy &= \frac{n-m}{2}\,\|\mathscr{G}_{n,m}\|^2\cos 2\alpha.
\end{aligned}$$

В последних двух формулах $\|\mathscr{G}_{n,m}\|^2=\pi 2^{n+m-1}\,n!\,m!$ — квадрат нормы в $L_2(\mathbb{R}^2)$.

Еще один вариант использования формулы Родрига (21) заключается в ее дифференцировании по x или y для получения производных функций Эрмита–Лагерра–Гаусса. (Альтернативным способом является дифференцирование интегрального представления (22), в этом смысле обе формулы эквивалентны.) Первые производные выражаются через функции $\mathscr{G}_{n,m}(x,y\,|\,\alpha)$ следующим образом:

$$\frac{\partial \mathscr{G}_{n,m}}{\partial x} = 2x\,\mathscr{G}_{n,m} - \sqrt{2}\,\cos\alpha\,\mathscr{G}_{n+1,m} - \sqrt{2}\,\sin\alpha\,\mathscr{G}_{n,m+1},$$
$$\frac{\partial \mathscr{G}_{n,m}}{\partial y} = 2y\,\mathscr{G}_{n,m} + i\sqrt{2}\,\sin\alpha\,\mathscr{G}_{n+1,m} - i\sqrt{2}\,\cos\alpha\,\mathscr{G}_{n,m+1}.$$

Дифференцируя эти равенства и применяя формулы (23), можно находить аналогичные выражения для старших производных, которые в свою очередь можно использовать для выявления дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют функции $\mathscr{G}_{n,m}(x,y\,|\,\alpha)$. Среди уравнений второго порядка таких только два:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 4(x^2+y^2-n-m-1)\right]\mathscr{G}_{n,m}(x,y\,|\,\alpha) = 0,$$

$$\Bigg[\cos 2\alpha\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + 4i\sin 2\alpha\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) - \\ - 4\big((x^2-y^2)\cos 2\alpha + m - n\big)\Bigg]\mathscr{G}_{n,m}(x,y\,|\,\alpha) = 0.$$

Рассматривая α в качестве переменной, а не параметра, можно получить еще одно уравнение второго порядка:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - 4xy - 2i\frac{\partial}{\partial \alpha}\right]\mathscr{G}_{n,m}(x,y\,|\,\alpha) = 0.$$

При этом первая производная по α функции Эрмита–Лагерра–Гаусса имеет вид

$$\frac{\partial \mathscr{G}_{n,m}}{\partial \alpha} = m\mathscr{G}_{n+1,m-1} - n\mathscr{G}_{n-1,m+1}.$$

Поиск примеров конечных сумм и рядов, содержащих функции Эрмита–Лагерра–Гаусса и сворачиваемых в компактные выражения, можно начать с попыток обобщения производящей функции (20). Довольно легко можно показать, что ряды

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} \mathscr{G}_{n,m+m_0}(x,y\,|\,\alpha)\mathscr{G}_{n+n_0,m}(X,Y\,|\,\beta)\frac{s^n t^m}{n!\,m!},$$
$$\sum_{n,m=0}^{\infty} \mathscr{G}_{n+n_0,m+m_0}(x,y\,|\,\alpha)\mathscr{G}_{n,m}(X,Y\,|\,\beta)\frac{s^n t^m}{n!\,m!}, \tag{24}$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathscr{G}_{k+n_0,k+m_0}(x,y\,|\,\alpha)\frac{t^k}{k!}$$

приводят к выражениям вида

$$C_{n_0,m_0} e^{\Phi} \mathscr{G}_{n_0,m_0},$$

где константа C_{n_0,m_0} зависит только от целочисленных параметров n_0, m_0; Φ — квадратичная форма от x, y, X, Y; переменные функции $\mathscr{G}_{n_0,m_0}$ (т. е. первые два аргумента) линейны по x, y, X, Y.

Нахождение конкретных формул затруднительно из-за большого количества свободных параметров, а итоговые результаты выглядят весьма громоздко. Тем не менее, в ряде случаев удается получить простые выражения, например,

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} \left|\mathscr{G}_{n,m}(x,y\,|\,\alpha)\right|^2 \frac{t^{n+m}}{n!\,m!} = \frac{1}{1-4t^2}\,\exp\!\left(-2\frac{1-2t}{1+2t}\,(x^2+y^2)\right).$$

Отсюда следует, что сумма

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left|\mathscr{G}_{k,n-k}(r\cos\beta, r\sin\beta\,|\,\alpha)\right|^2 = \\
= e^{-2r^2} n! \sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{2k}{k} \frac{H^2_{n-2k}(\sqrt{2}\,r)}{(n-2k)!} = e^{-2r^2} 2^n n! \sum_{k=0}^{n} (-1)^k L_k(4r^2)$$

не зависит от параметров α, β.

Некоторые формулы, содержащие функции Эрмита–Лагерра–Гаусса, если положить в них $\alpha = 0$ или $\alpha = \pi/4$ и перейти к классическим полиномам Эрмита и Лагерра, приводят к довольно любопытным соотношениям, отсутствующим в [6], например,

$$\sum_{k=0}^{n+m} (\pm 2)^k P_k^{(n-k,m-k)}(0) H_{n+m-k}(x) H_k(y) = (\sqrt{2})^{n+m} H_n\!\left(\frac{x\pm y}{\sqrt{2}}\right) H_m\!\left(\frac{x\mp y}{\sqrt{2}}\right),$$

$$\sum_{k=0}^{n+m} (2i)^k P_k^{(n-k,m-k)}(0) H_{n+m-k}(x) H_k(y) = \\
= 2^{n+m} \begin{cases} (-1)^m m!(x+iy)^{n-m} L_m^{n-m}(x^2+y^2) & (n \ge m), \\ (-1)^n n!(x-iy)^{m-n} L_n^{m-n}(x^2+y^2) & (n \le m). \end{cases}$$

Другие соотношения между функциями $\mathscr{G}_{n,m}(x,y\,|\,\alpha)$ получены в следующем параграфе.

2. Конечные суммы, функции Вигнера и вращения в $\mathbb{R}^3$

Зависимость функций $\mathscr{G}_{n,m}(x,y\,|\,\alpha)$ от α имеет тригонометрический вид. Если ввести обозначение

$$c_k^{(n,m)}(\alpha) = \cos^{n-k}\alpha\, \sin^{m-k}\alpha\, P_k^{(n-k,m-k)}(-\cos 2\alpha) = \\
= \sum_{j=\max(0,k-m)}^{\min(k,n)} (-1)^{k-j} \binom{n}{j} \binom{m}{k-j} \cos^{n+k-2j}\alpha\, \sin^{m-k+2j}\alpha, \tag{25}$$

то определение функций Эрмита–Лагерра–Гаусса сведется к следующему:

$$\mathscr{G}_{n,m}(x,y\,|\,\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{n+m} i^k c_k^{(n,m)}(\alpha) \mathscr{H}_{n+m-k,k}(x,y).$$

Выпишем несколько коэффициентов $c_k^{(n,m)}(\alpha)$, полученных из (25):

$$
\begin{aligned}
&c_0^{(n,m)}(\alpha) = \cos^n\alpha\,\sin^m\alpha,\\
&c_1^{(n,m)}(\alpha) = -m\cos^{n+1}\alpha\,\sin^{m-1}\alpha + n\cos^{n-1}\alpha\,\sin^{m+1}\alpha,\\
&c_2^{(n,m)}(\alpha) = \tfrac{m(m-1)}{2}\cos^{n+2}\alpha\,\sin^{m-2}\alpha - nm\cos^n\alpha\,\sin^m\alpha + \tfrac{n(n-1)}{2}\cos^{n-2}\alpha\,\sin^{m+2}\alpha,\\
&\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&c_{n+m}^{(n,m)}(\alpha) = (-1)^m\cos^m\alpha\,\sin^n\alpha.
\end{aligned}
$$

Сравнительно несложная структура коэффициентов $c_k^{(n,m)}(\alpha)$, позволяет изучить преобразования функций $\mathscr{G}_{n,m}(x,y\,|\,\alpha)$ при сдвигах α на углы, кратные $\pi/2$. Результаты представлены в таблице.

Таблица

Изменения функций Эрмита–Лагерра–Гаусса при смещениях параметра α

	$\mathscr{G}_{n,m}(x,y\,|\,\pi k/2-\alpha)$	$\mathscr{G}_{n,m}(x,y\,|\,\pi k/2+\alpha)$
$k=0$	$(-1)^m\overline{\mathscr{G}}_{n,m}(x,y\,|\,\alpha)$	$i^{m-n}\mathscr{G}_{m,n}(y,x\,|\,\alpha) =$ $= (-1)^{n+m}\mathscr{G}_{n,m}(-x,-y\,|\,\alpha) = \overline{\mathscr{G}}_{n,m}(x,-y\,|\,\alpha)$
$k=1$	$i^{n-m}\overline{\mathscr{G}}_{n,m}(y,x\,|\,\alpha)$	$i^{n+m}\mathscr{G}_{n,m}(y,x\,|\,\alpha)$
$k=2$	$(-1)^n\overline{\mathscr{G}}_{n,m}(x,y\,|\,\alpha)$	$(-1)^{n+m}\mathscr{G}_{n,m}(x,y\,|\,\alpha)$
$k=3$	$i^{m-n}\overline{\mathscr{G}}_{n,m}(y,x\,|\,\alpha)$	$(-i)^{n+m}\mathscr{G}_{n,m}(y,x\,|\,\alpha)$

Таким образом, достаточно рассматривать функции Эрмита–Лагерра–Гаусса только при значениях параметра $\alpha\in[0,\pi/4]$, поскольку к ним сводятся все остальные случаи.

Уже упомянутая универсальность функций $\mathscr{G}_{n,m}(x,y\,|\,\alpha)$ при вычислении рядов (24) и достаточно большое число свободных параметров позволяют, варьируя эти параметры, получать варианты разложений одних функций Эрмита–Лагерра–Гаусса по другим, например,

$$
\begin{aligned}
\mathscr{G}_{n,m}(x,y\,|\,\alpha) = e^{-x^2-y^2}(-i)^m\cos^{(n+m)/2}2\alpha\sum_{k=0}^{\min(n,m)}(-2i\,\mathrm{tg}\,2\alpha)^k k!\binom{m}{k}\binom{n}{k}\times\\
\times H_{n-k}\left(\sqrt{2}\,\frac{x\cos\alpha+iy\sin\alpha}{\sqrt{\cos2\alpha}}\right)H_{m-k}\left(\sqrt{2}\,\frac{y\cos\alpha+ix\sin\alpha}{\sqrt{\cos2\alpha}}\right).
\end{aligned}
\tag{26}
$$

В частности, если $n=0$ или $m=0$, то

$$
\begin{aligned}
\mathscr{G}_{n,m}(x,y\,|\,\alpha) = e^{-x^2-y^2}(-i)^m\cos^{(n+m)/2}2\alpha\times\\
\times H_n\left(\sqrt{2}\,\frac{x\cos\alpha+iy\sin\alpha}{\sqrt{\cos2\alpha}}\right)H_m\left(\sqrt{2}\,\frac{y\cos\alpha+ix\sin\alpha}{\sqrt{\cos2\alpha}}\right),
\end{aligned}
\tag{27}
$$

и все многообразие функций Эрмита–Лагерра–Гаусса сводится к комплексным трансформациям аргументов полиномов Эрмита. Данное равенство не является уникальным свойством полиномов Эрмита содержать в себе весь набор общих функций

$\mathscr{G}_{n,m}(x,y\,|\,\alpha)$. Можно показать, что "случай нулевого индекса" тривиален, т.е. все функции — это в некотором смысле один объект. Например, при $m=0$ имеем:

$$\mathscr{G}_{n,0}(x,y\,|\,\alpha) = \\ = \left(\frac{\cos 2\alpha}{\cos 2\beta}\right)^{n/2} \mathscr{G}_{n,0}\left(\frac{x\cos(\alpha+\beta) - iy\sin(\beta-\alpha)}{\sqrt{\cos 2\alpha\cos 2\beta}}, \frac{y\cos(\alpha+\beta)+ix\sin(\beta-\alpha)}{\sqrt{\cos 2\alpha \cos 2\beta}}\,\middle|\,\beta\right).$$

Интересно отметить, что единый объект, содержащий в себе все функции $\mathscr{G}_{n,m}(x,y\,|\,\alpha)$, когда один из индексов n, m обращается в нуль, появляется также в следующей геометрической интерпретации интегрального преобразования (15) (для определенности далее рассматривается случай $m=0$). Пусть в пространстве (x,y,l) задано комплексное распределение

$$W(x,y,l) = (x+iy)^n \exp(-x^2 - 2ixy - y^2 - 2l^2). \tag{28}$$

Тогда проекция $W(x,y,l)$ на плоскость $y\cos\theta + l\sin\theta = 0$ (или преобразование Радона [7]) имеет вид

$$W_{\mathrm{PR}}(x,y,\theta) = \int_{\mathbb{R}} W(x, y\sin\theta + \cos\theta, -y\cos\theta + l\sin\theta)\,dl = \\ = \sqrt{\frac{\pi}{1+\sin^2\theta}}\left(\frac{\cos\theta}{2\sqrt{1+\sin^2\theta}}\right)^n H_n\left(\frac{X+iY\sin\theta}{\cos\theta}\right)\exp\left(-\frac{X^2+Y^2}{2} - iXY\sin\theta\right), \tag{29}$$

где $X = 2x/\sqrt{1+\sin^2\theta}$, $Y = 2y/\sqrt{1+\sin^2\theta}$. Интегральное преобразование (15) при $m=0$, благодаря формуле (27), можно переписать следующим образом:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \exp\bigl(-i(x\xi + y\eta) + i\psi(\xi,\eta,\alpha)\bigr)\mathscr{H}_{n,0}(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta = \\ = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\mathscr{G}_{n,0}\left(\frac{X}{\sqrt{2}}, \frac{Y}{\sqrt{2}}\,\middle|\,\alpha\right)\exp\left(-i\frac{X^2-Y^2}{2} - \frac{\pi i n}{4}\right) = \\ = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\left(\cos\alpha\sqrt{1-\mathrm{tg}^2\alpha}\right)^n H_n\left(\frac{X+iY\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\sqrt{1-\mathrm{tg}^2\alpha}}\right)\exp\left(-\frac{X^2+Y^2}{2} - i\frac{X^2-Y^2}{2} - \frac{\pi i n}{4}\right), \tag{30}$$

где $X = (x\cos\alpha + y\sin\alpha)/2$, $Y = (y\cos\alpha - x\sin\alpha)/2$. Из (29), (30) видно, что при $\sin\theta = \mathrm{tg}\alpha$, $\alpha\in[-\pi/4,\pi/4]$, функции $W_{\mathrm{PR}}(x,y,\theta)$ и $\mathscr{G}_{n,0}(x,y\,|\,\alpha)$ качественно подобны в переменных X, Y, если пренебречь мнимыми экспонентами.[3] Таким образом, все функции Эрмита–Лагерра–Гаусса $\mathscr{G}_{n,0}(x,y\,|\,\alpha)$ являются проекциями одного трехмерного комплексного распределения (28) на разные плоскости. Функции $\mathscr{H}_{n,0}(x,y) = e^{-x^2-y^2}H_n(\sqrt{2}\,x)$ и $\mathscr{L}_{0,\pm n}(x,y) = e^{-x^2-y^2}(x\pm iy)^n$ реализуются при $\theta = 0$ и $\theta = \pm\pi/2$, соответственно. На рис. 5 показаны проекции $W(x,y,l)$ для случая $n=3$ на плоскости $\theta=0$, $\theta=\pi/4$ и $\theta=\pi/2$.

[3]Наличие в аргументах полиномов Эрмита выражений, которые могут обращаться в бесконечность, не является препятствием для рассмотрения этих возможных случаев. И в (29), и в (30) присутствуют множители (в первой формуле $\cos^n\theta$, во второй — $(1-\mathrm{tg}^2\alpha)^{n/2}$), приводящие в таких случаях к неопределенности вида $0\cdot\infty$, которая раскрывается, если записать полиномы Эрмита в виде разложения по степеням x. Разложение по степеням x показывает также, что квадратный корень в (30) присутствует только в четных степенях, и формула (30) справедлива для любого α. Поэтому, варианты параметров θ и α, которые, на первый взгляд, могут создавать проблемы, на самом деле вполне безобидны, и вся "сложность ситуации" есть просто обратная сторона компактной формы записи обеих формул.

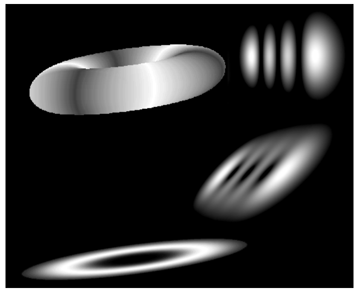


Рис. 5. Проекции распределения (28) имеют такие же интенсивности, что и функции $\mathscr{G}_{n,0}(x, y \,|\, \alpha)$. Первоначально проекционный эффект был отмечен в оптическом эксперименте, когда повороты линзы (математически, это соответствует изменениям параметра α) создавали на регистрационном экране иллюзию вращения некоторого тороидального тела, что и заставило рассмотреть вопрос о функциях Эрмита–Лагерра–Гаусса как проекциях одного объекта уже в теоретическом плане

Следующее равенство является обобщением формулы (26). Здесь уже разложение функции Эрмита–Лагерра–Гаусса с параметром α проводится по таким же функциям, но с параметром β:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\min(n,m)} \left(2\,\frac{\sin 2(\beta-\alpha)}{\cos 2\alpha}\right)^k k! \binom{m}{k}\binom{n}{k} \mathscr{G}_{n-k,m-k}(x_\alpha, y_\alpha \,|\, \beta) = \\ = \left(\frac{\cos 2\beta}{\cos 2\alpha}\right)^{(n+m)/2} \exp\left(2ixy\,\frac{\sin 2(\beta-\alpha)}{\cos 2\alpha\,\cos 2\beta}\right) \mathscr{G}_{n,m}(x_\beta, y_\beta \,|\, \alpha),\end{aligned} \tag{31}$$

где $x_\alpha = (x\cos\alpha + iy\sin\alpha)/\sqrt{\cos 2\alpha}$, $y_\alpha = (y\cos\alpha + ix\sin\alpha)/\sqrt{\cos 2\alpha}$ и x_β, y_β — аналогичные выражения для параметра β.

Еще один вариант разложения функции Эрмита–Лагерра–Гаусса связан со значениями этих функций при $x = y = 0$:

$$\begin{aligned}\mathscr{G}_{n,m}(x, y \,|\, \alpha) = e^{-x^2-y^2} \sum_{n_1=0}^{n}\sum_{m_1=0}^{m} \binom{n}{n_1}\binom{m}{m_1} \mathscr{G}_{n_1,m_1}(0,0 \,|\, \alpha)\times \\ \times (2\sqrt{2})^{n+m-n_1-m_1} (x\cos\alpha + iy\sin\alpha)^{n-n_1} (x\sin\alpha - iy\cos\alpha)^{m-m_1}.\end{aligned} \tag{32}$$

Здесь $\mathscr{G}_{n,m}(0,0 \,|\, \alpha)$ — вещественное число, причем равное нулю, если $n+m$ нечетно. Другая форма записи данного разложения

$$\begin{aligned}\mathscr{G}_{n,m}(x, y \,|\, \alpha) = e^{-x^2-y^2} \sum_{k=0}^{[(n+m)/2]} \frac{(-1)^k}{k!} (2\sqrt{2})^{n+m-2k} \times \\ \times \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^k (x\cos\alpha + iy\sin\alpha)^n (x\sin\alpha - iy\cos\alpha)^m\end{aligned}$$

интересна тем, что слагаемое, соответствующее индексу k, является однородным полиномом степени $n+m-2k$. В частности, главная часть полинома, формирующего функцию Эрмита–Лагерра–Гаусса, такова:

$$(2\sqrt{2})^{n+m}(x\cos\alpha + iy\sin\alpha)^n (x\sin\alpha - iy\cos\alpha)^m = (2\sqrt{2})^{n+m} \sum_{k=0}^{n+m} i^k c_k^{(n,m)}(\alpha)\, x^{n+m-k} y^k.$$

Для фигурирующих в формуле (32) чисел $\mathscr{G}_{n,m}(0,0\,|\,\alpha)$ можно привести несколько эквивалентных выражений:

$$\begin{aligned}
&\mathscr{G}_{2n+\delta,2m+\delta}(0,0|\alpha) = \\
&\quad = (-1)^{n+\delta}\cos^{n+m+\delta}2\alpha\sum_{k=0}^{\min(n,m)}\frac{(-1)^k(2m+\delta)!\,(2n+\delta)!}{(2k+\delta)!\,(m-k)!\,(n-k)!}(2\operatorname{tg}2\alpha)^{2k+\delta} = \\
&\quad = (-1)^{\delta}\cos^{n+m+\delta}2\alpha\left(\frac{d}{dt}\right)^{2m+\delta}\left(e^{t^2}H_{2n+\delta}(t\operatorname{tg}\alpha)\right)\Big|_{t=0} = \\
&\quad = \frac{(-1)^{n+\min}2^{2\min+\delta}}{\cos^{n+m+1+\delta}2\alpha}\frac{(2|n-m|)!}{(|n-m|)!}\left(\frac{d}{dt}\right)^{2\min+\delta}\frac{1}{(1+t^2)^{|n-m|+1/2}}\Big|_{t=\operatorname{tg}2\alpha} = \\
&\quad = (-1)^{\delta}2^{n+m+\delta}\frac{(2m+\delta)!\,(2n+\delta)!}{(n+m+\delta)!}c_{2n+\delta}^{(n+m+\delta,n+m+\delta)}(\alpha+\pi/4) = \\
&\quad = (-1)^{n+\min+\delta}2^{2\min+\delta}\frac{(2m+\delta)!\,(2n+\delta)!}{(n+m+\delta)!}\cos^{|n-m|}2\alpha\,P_{2\min+\delta}^{(|n-m|,|n-m|)}(\sin 2\alpha).
\end{aligned}$$

Здесь $\delta = 0$ или 1; $\min = \min(n,m)$. Следует отметить, что в соответствии со строкой "$k = 0$" в таблице индексы n, m в правой части можно менять местами, если делать при этом умножение на $(-1)^{n+m}$.

Рассмотрим теперь формулу, которая показывает зависимость функций Эрмита–Лагерра–Гаусса с аргументами, повернутыми на некоторый угол, от аналогичных функций без поворота:

$$\begin{aligned}
&\mathscr{G}_{n,m}(x\cos\gamma - y\sin\gamma, y\cos\gamma + x\sin\gamma\,|\,\theta) = \\
&\qquad = e^{i(n-m)\phi}\sum_{k=0}^{n+m}(-1)^k e^{i(n+m-2k)\omega}c_k^{(n,m)}(\beta)\mathscr{G}_{n+m-k,k}(x,y\,|\,\alpha).
\end{aligned}\tag{33}$$

Здесь при заданных α, γ, θ параметры β, ϕ, ω определяются из соотношений

$$\begin{cases} e^{i(\omega+\phi)}\cos\beta = \cos\gamma\cos(\theta-\alpha) + i\sin\gamma\sin(\theta+\alpha), \\ e^{i(\omega-\phi)}\sin\beta = \cos\gamma\sin(\theta-\alpha) - i\sin\gamma\cos(\theta+\alpha). \end{cases}$$

И обратно, если заданы параметры α, β и ω, то уравнения для нахождения γ, θ, ϕ следующие:

$$\begin{cases} e^{-i\phi}(\cos\gamma\cos\theta + i\sin\gamma\sin\theta) = e^{i\omega}\cos\alpha\cos\beta - e^{-i\omega}\sin\alpha\sin\beta, \\ e^{-i\phi}(\cos\gamma\sin\theta + i\sin\gamma\cos\theta) = e^{i\omega}\sin\alpha\cos\beta + e^{-i\omega}\cos\alpha\sin\beta. \end{cases}$$

Формулу (33) можно переписать в более привычном виде

$$\mathscr{G}_{n,m}(x\cos\gamma - y\sin\gamma, y\cos\gamma + x\sin\gamma\,|\,\theta) = \sum_{k=0}^{n+m}\lambda_k^{(n,m)}\mathscr{G}_{n+m-k,k}(x,y\,|\,\alpha),$$

где

$$\begin{aligned}
\lambda_k^{(n,m)} &= (-1)^k\big(\cos\gamma\cos(\theta-\alpha) + i\sin\gamma\sin(\theta+\alpha)\big)^{n-k}\times \\
&\times\big(\cos\gamma\sin(\theta-\alpha) - i\sin\gamma\cos(\theta+\alpha)\big)^{m-k}\times \\
&\times P_k^{(n-k,m-k)}\big(\sin^2\gamma\cos 2(\theta+\alpha) - \cos^2\gamma\cos 2(\theta-\alpha)\big),
\end{aligned}$$

но из выражения для коэффициентов $\lambda_k^{(n,m)}$ сразу не видно, что они сводятся к уже знакомым коэффициентам $c_k^{(n,m)}(\alpha)$.

Чтобы представить еще один вариант формулы (33), необходимо сказать несколько слов о D-функциях Вигнера. Традиционно эти функции появляются при исследовании вращений декартовой системы координат в $\mathbb{R}^3$. Известно, что произвольный поворот системы координат может быть получен с помощью трех последовательных поворотов вокруг координатных осей: сначала поворот вокруг оси OZ на угол $\alpha \in [0, 2\pi)$, затем поворот вокруг новой оси OY_1 на угол $\beta \in [0, \pi]$, и наконец — поворот вокруг новой оси OZ_2 на угол $\gamma \in [0, 2\pi)$. Углы α, β, γ полностью характеризуют поворот системы координат и называются углами Эйлера. D-функции Вигнера $D^l_{m,m'}(\alpha,\beta,\gamma)$ определяются как матричные элементы оператора поворота $D(\alpha,\beta,\gamma)$ (см. исчерпывающее изложение в [8]). В частности, D-функции Вигнера возникают как коэффициенты разложения сферических функций $Y_{l,m}(\theta,\phi)$ при повороте системы координат на углы Эйлера α, β, γ:

$$Y_{l,m}(\theta',\phi') = D(\alpha,\beta,\gamma) Y_{l,m}(\theta,\phi) = \sum_{m'=-l}^{l} D^l_{m,m'}(\alpha,\beta,\gamma)\, Y_{l,m'}(\theta,\phi).$$

Если ввести в рассмотрение нормированные функции

$$\mathscr{G}^{\mathsf{N}}_{n,m}(x,y\,|\,\alpha) \equiv \frac{\mathscr{G}_{n,m}(x,y\,|\,\alpha)}{\sqrt{\pi 2^{n+m-1} n!\, m!}},$$

то равенство (33) можно переписать в виде

$$\mathscr{G}^{\mathsf{N}}_{l-m,l+m}(r\cos\theta', r\sin\theta'\,|\,\phi') = (-1)^l \sum_{m'=-l}^{l} D^l_{m,m'}(\alpha,\beta,\gamma)\, \mathscr{G}^{\mathsf{N}}_{l-m',l+m'}(r\cos\theta, r\sin\theta\,|\,\phi),$$

где $l = 0, 1, \ldots$; $m = -l, \ldots, l$ и параметры θ, ϕ трансформируются в параметры θ', ϕ' по формулам

$$\begin{cases} e^{-i(\alpha+\gamma)/2}\cos(\beta/2) = -\sin(\theta'-\theta)\cos(\phi'+\phi) + i\cos(\theta'-\theta)\sin(\phi'-\phi), \\ e^{i(\alpha-\gamma)/2}\sin(\beta/2) = \sin(\theta'-\theta)\sin(\phi'+\phi) + i\cos(\theta'-\theta)\cos(\phi'-\phi). \end{cases}$$

Таким образом, формулу (33) можно трактовать как изменение функции Эрмита–Лагерра–Гаусса под действием оператора поворота $D(\alpha,\beta,\gamma)$.

3. Интегральные преобразования

Рассмотрим вопрос о вычислении интеграла

$$F_{n,m} = \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\bigl(-i(x\xi + y\eta) + i(a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2)\bigr) \mathscr{G}_{n,m}(\xi,\eta\,|\,\alpha)\, d\xi\, d\eta. \tag{34}$$

Найденные ранее интегралы такого рода, например, (13), (15), (18), позволяют предположить, что и интеграл (34) будет иметь аналогичный вид, а именно,

$$F_{n,m} = C_0 C_1^n C_2^m e^{i\Phi(x,y)} \mathscr{G}_{n,m}(X, Y\,|\,\theta),$$

где C_0, C_1 и C_2 — константы; $\Phi(x,y)$ — некоторая квадратичная фаза; X, Y — новые переменные, линейным образом зависящие от x, y; θ — новое значение параметра функции $\mathscr{G}_{n,m}$.

Используя (20), найдем производящую функцию для $F_{n,m}$. Если затем удастся подобрать такие составляющие и линейные замены аргументов, что

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} F_{n,m}\frac{s^n\,t^m}{n!\,m!} = \sum_{n,m=0}^{\infty} C_0 e^{i\Phi(x,y)}\mathscr{G}_{n,m}(X,Y\,|\,\theta)\frac{(sC_1)^n\,(tC_2)^m}{n!\,m!},$$

то из сравнения производящих функций получится требуемый результат.

Уже на начальной стадии исследования интеграла (34) становится ясно, что форма записи $a\xi^2+2b\xi\eta+c\eta^2$ для общего квадратичного воздействия неудачна, т. к. почти сразу возникает необходимость компоновать слагаемые в виде

$$a\xi^2+2b\xi\eta+c\eta^2 = \frac{a+c}{2}(\xi^2+\eta^2)+\frac{a-c}{2}(\xi^2-\eta^2)+2b\xi\eta.$$

Поэтому, не изменяя общности, удобнее рассматривать исходный интеграл (34) в виде

$$F_{n,m} = \iint_{\mathbb{R}^2}\exp\bigl(-i(x\xi+y\eta)+ia(\xi^2+\eta^2)+ib\psi(\xi,\eta,\beta)\bigr)\mathscr{G}_{n,m}(\xi,\eta\,|\,\alpha)\,d\xi\,d\eta,$$

где $\psi(\xi,\eta,\beta)=(\xi^2-\eta^2)\cos 2\beta+2\xi\eta\sin 2\beta$.

Используя предложенный подход, можно показать, что

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{R}^2}&\exp\bigl(-i(x\xi+y\eta)+ia(\xi^2+\eta^2)+ib\psi(\xi,\eta,\beta)\bigr)\mathscr{G}_{n,m}(\xi,\eta\,|\,\alpha)\,d\xi\,d\eta=\\ &=\frac{\pi(-i)^{n+m}}{\sqrt[4]{\Delta_+\Delta_-}}\exp\biggl(-\frac{ia(1+a^2-b^2)}{4\Delta_+\Delta_-}\,(x^2+y^2)-\frac{ib(1+b^2-a^2)}{4\Delta_+\Delta_-}\,\psi(x,y,\beta)+\\ &\qquad+i(n-m)\phi+\frac{i}{2}(n+m+1)\arg(1+b^2-a^2+2ia)\biggr)\times\\ &\qquad\times\mathscr{G}_{n,m}(X\cos\gamma+Y\sin\gamma,\,Y\cos\gamma-X\sin\gamma\,|\,\theta).\end{aligned}\tag{35}$$

Здесь

$$\Delta_\pm=1+(a\pm b)^2,\qquad X=\frac{x\cos\beta+y\sin\beta}{2\sqrt{\Delta_+}},\qquad Y=\frac{y\cos\beta-x\sin\beta}{2\sqrt{\Delta_-}}$$

и параметры γ, θ и ϕ определяются из уравнений

$$\begin{aligned}\sin 2\theta&=\sin 2\alpha\,\cos 2\omega+\cos 2\alpha\,\sin 2\beta\,\sin 2\omega,\\ e^{2i\gamma}\,\cos 2\theta&=\cos 2\alpha\,\cos 2\beta+i(\sin 2\alpha\,\sin 2\omega-\cos 2\alpha\,\sin 2\beta\,\cos 2\omega),\\ e^{i\phi\pm i\theta}&=e^{i\omega}(\cos\gamma\mp\sin\gamma)(\cos\alpha\,\cos\beta+i\,\sin\alpha\,\sin\beta)+\\ &\quad+e^{-i\omega}(\mp\cos\gamma-\sin\gamma)(\cos\alpha\,\sin\beta-i\,\sin\alpha\,\cos\beta),\end{aligned}\tag{36a}$$

где $\omega=\frac{1}{2}\arg(1+a^2-b^2+2ib)$ — вспомогательный угол. Другой вариант записи тех же формул:

$$\begin{aligned}e^{i\phi}(\cos\theta\,\cos\gamma-i\,\sin\theta\,\sin\gamma)&=e^{i\omega}(\cos\alpha\,\cos\beta+i\sin\alpha\,\sin\beta),\\ e^{i\phi}(\cos\theta\,\sin\gamma+i\,\sin\theta\,\cos\gamma)&=e^{-i\omega}(-\cos\alpha\,\sin\beta+i\sin\alpha\,\cos\beta).\end{aligned}\tag{36b}$$

Экспоненциальная составляющая функции Эрмита–Лагерра–Гаусса в правой части (35) равна

$$\exp\biggl(-\frac{(1+a^2+b^2)(x^2+y^2)-2ab\,\psi(x,y,\beta)}{4\Delta_+\Delta_-}\biggr).$$

Необходимо отметить, что неоднозначность восстановления параметров γ, θ и ϕ из уравнений (36) не влияет на конечный результат. Например, при известных α, β, ω из первого равенства в (36a) наряду с 2θ-решением можно выбрать $\pi - 2\theta$. Тогда из второго уравнения получатся соответственно γ_1 и γ_2 для первого и второго θ-решений, а из третьего — ϕ_1 и ϕ_2. Однако, с помощью формул перехода, приведенных в таблице, можно показать, что одна тройка решений (γ, θ, ϕ) сводится к другой.

Выпишем ряд следствий, получающихся из (35) при некоторых частных значениях параметров a, b, α, β:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \exp\bigl(-i(x\xi + y\eta) + ia(\xi^2+\eta^2)\bigr)\mathscr{G}_{n,m}(\xi,\eta\,|\,\alpha)\,d\xi\,d\eta = \frac{\pi(-i)^{n+m}}{\sqrt{1+a^2}}\times$$
$$\times\exp\biggl(-\frac{ia(x^2+y^2)}{4(1+a^2)} + i(n+m+1)\operatorname{arctg} a\biggr)\mathscr{G}_{n,m}\biggl(\frac{x}{2\sqrt{1+a^2}}, \frac{y}{2\sqrt{1+a^2}}\,\bigg|\,\alpha\biggr), \tag{37}$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \exp\bigl(-i(x\xi + y\eta) + i(\xi^2-\eta^2)\bigr)\mathscr{G}_{n,m}(\xi,\eta\,|\,\alpha)\,d\xi\,d\eta = \frac{\pi(-i)^{n+m}}{\sqrt{2}}\times$$
$$\times\exp\biggl(-\frac{i(x^2-y^2)}{8} + \frac{\pi i}{4}(n-m)\biggr)\mathscr{G}_{n,m}\biggl(\frac{x\cos\alpha + y\sin\alpha}{2\sqrt{2}}, \frac{y\cos\alpha - x\sin\alpha}{2\sqrt{2}}\,\bigg|\,0\biggr), \tag{38}$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \exp\bigl(-(x\xi + y\eta) + 2ib\xi\eta\bigr)\mathscr{G}_{n,m}(\xi,\eta|\alpha)\,d\xi\,d\eta =$$
$$= \frac{\pi(-i)^{n+m}}{\sqrt{1+b^2}}\exp\biggl(-\frac{ibxy}{2(1+b^2)}\biggr)\mathscr{G}_{n,m}\biggl(\frac{x}{2\sqrt{1+b^2}}, \frac{y}{2\sqrt{1+b^2}}\,\bigg|\,\alpha + \operatorname{arctg} b\biggr). \tag{39}$$

Преобразование функций Лагерра–Гаусса в функции Эрмита–Гаусса, обобщающее формулу (13), имеет вид:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \exp\bigl(-i(x\xi + y\eta) + ia(\xi^2+\eta^2) + i\sqrt{1+a^2}\,\psi(\xi,\eta,\beta)\bigr)\mathscr{G}_{n,m}(\xi,\eta\,|\,\pi/4)\,d\xi\,d\eta =$$
$$= \frac{\pi(-i)^{n+m}}{\sqrt{2}\,\sqrt[4]{1+a^2}}\exp\biggl(-\frac{i\psi(x,y,\beta)}{8(1+a^2)} + \frac{i}{2}(n+m+1)\operatorname{arctg} a +$$
$$+ i(n-m)\Bigl(\beta - \frac{\pi}{4}\Bigr)\biggr)\mathscr{G}_{n,m}\biggl(\frac{X+Y}{2\sqrt{2}}, \frac{X-Y}{2\sqrt{2}}\,\bigg|\,0\biggr), \tag{40}$$

где

$$X = \frac{x\cos\beta + y\sin\beta}{\sqrt{1 + a\sqrt{1+a^2} + a^2}}, \qquad Y = \frac{y\cos\beta - x\sin\beta}{\sqrt{1 - a\sqrt{1+a^2} + a^2}}.$$

Следующие два интеграла можно считать лоренцевыми аналогами формул (37), (39), поскольку квадратичные воздействия в них записаны в переменных, преобразованных по Лоренцу:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \exp\biggl(-i(x\xi + y\eta) \pm i\frac{(\xi - c\eta)^2 + (\eta - c\xi)^2}{1-c^2}\biggr)\mathscr{G}_{n,m}(\xi,\eta\,|\,\alpha)\,d\xi\,d\eta =$$
$$= \frac{\pi(-i)^{n+m}}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1-c^2}{1+c^2}}\exp\biggl(\mp i\frac{1-c^2}{1+c^2}\frac{x^2+y^2}{8} \pm \frac{\pi i}{4}(n+m+1)\biggr)\times$$
$$\times\mathscr{G}_{n,m}\biggl(\frac{x+cy}{2\sqrt{2}\sqrt{1+c^2}}, \frac{y+cx}{2\sqrt{2}\sqrt{1+c^2}}\,\bigg|\,\alpha \pm \operatorname{arctg} c\biggr), \tag{41}$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-i(x\xi + y\eta) + 2i\frac{(\xi - c\eta)(\eta - c\xi)}{1-c^2}\right) \mathscr{G}_{n,m}(\xi,\eta\,|\,\alpha)\,d\xi\,d\eta =$$
$$= \frac{\pi(-i)^{n+m}}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1-c^2}{1+c^2}}\exp\left(-i\frac{1-c^2}{1+c^2}\frac{xy}{4} - i(n+m+1)\operatorname{arctg} c\right)\times$$
$$\times\mathscr{G}_{n,m}\left(\frac{x+cy}{2\sqrt{2}\sqrt{1+c^2}}, \frac{y+cx}{2\sqrt{2}\sqrt{1+c^2}}\,\middle|\,\alpha + \frac{\pi}{4}\right). \tag{42}$$

Еще один результат получается при исследовании вопроса об интегральных воздействиях, оставляющих неизменным параметр α функций Эрмита–Лагерра–Гаусса. Частичным ответом является формула (37). В общем случае ответ следующий:

$$\iint_{\mathbb{R}^2}\exp\left(-i(x\xi + y\eta) + i\frac{c(1+\lambda^2)}{1-\lambda^2c^2}(\xi^2+\eta^2) + i\frac{\lambda(1+c^2)}{1-\lambda^2c^2}\psi(\xi,\eta,\beta)\right)\mathscr{G}_{n,m}(\xi,\eta\,|\,\alpha)\,d\xi d\eta =$$
$$= \pi(-i)^{n+m}\sqrt{\frac{1-\lambda^2c^2}{(1+\lambda^2)(1+c^2)}}\exp\left(-\frac{ic(1-\lambda^2)}{4(1+\lambda^2)(1+c^2)}(x^2+y^2) -\right.$$
$$\left. -\frac{i\lambda(1-c^2)}{4(1+\lambda^2)(1+c^2)}\psi(x,y,\beta) + i(n+m+1)\operatorname{arctg} c + i(n-m)\phi\right)\times$$
$$\times\mathscr{G}_{n,m}\left(\frac{x(\cos 2\beta - \lambda c) + y\sin 2\beta}{2\sqrt{(1+\lambda^2)(1+c^2)}}, \frac{y(\cos 2\beta + \lambda c) - x\sin 2\beta}{2\sqrt{(1+\lambda^2)(1+c^2)}}\,\middle|\,\alpha\right). \tag{43}$$

Здесь $\alpha \in [0, \pi/4]$, $\lambda = \sin 2\beta/\operatorname{tg} 2\alpha$, $\phi = \arg(\sin 2\alpha\,\cos 2\beta + i\,\sin 2\beta)$ и $\sqrt{1-\lambda^2c^2} = i\sqrt{|1-\lambda^2c^2|}$, если выражение под первым знаком квадратного корня в формуле (43) отрицательно.

При $c = 0$ и $\alpha = \pi/8$ формула (43) принимает вид:

$$\iint_{\mathbb{R}^2}\exp(-i(x\xi+y\eta) + i\sin 2\beta\,\psi(\xi,\eta,\beta))\mathscr{G}_{n,m}(\xi,\eta\,|\,\pi/8)\,d\xi\,d\eta = \frac{\pi(-i)^{n+m}}{\sqrt{1+\sin^2 2\beta}}\times$$
$$\times\exp\left(-\frac{i\sin 2\beta}{4(1+\sin^2 2\beta)}\psi(x,y,\beta) + i(n-m)\arg(\cos 2\beta + i\sqrt{2}\,\sin 2\beta)\right)\times$$
$$\times\mathscr{G}_{n,m}\left(\frac{x\cos 2\beta + y\sin 2\beta}{2\sqrt{1+\sin^2 2\beta}}, \frac{y\cos 2\beta - x\sin 2\beta}{2\sqrt{1+\sin^2 2\beta}}\,\middle|\,\frac{\pi}{8}\right). \tag{44}$$

Как видно из данного равенства, при изменении параметра β функция Эрмита–Лагерра–Гаусса $\mathscr{G}_{n,m}(x,y\,|\,\pi/8)$ остается неизменной, лишь поворачиваясь и изменяясь в масштабе. Это позволяет поставить вопрос о нахождении функций, инвариантных к астигматическим воздействиям, подобно тому, как в работе [9] был поставлен и решен вопрос о функциях, удовлетворяющих уравнению Шредингера (1) и структурно устойчивых к изменениям параметра l. Формула (44) показывает, что задача об астигматически-инвариантных функциях имеет непустое множество решений.

Заключение

В работе предложено объединение функций Эрмита–Гаусса и Лагерра–Гаусса посредством введения дополнительного вещественного параметра и исследованы некоторые свойства полученного таким образом семейства $\mathscr{G}_{n,m}(x,y\,|\,\alpha)$. Найдены интегральное и дифференциальное представления, рекуррентные формулы, некоторые

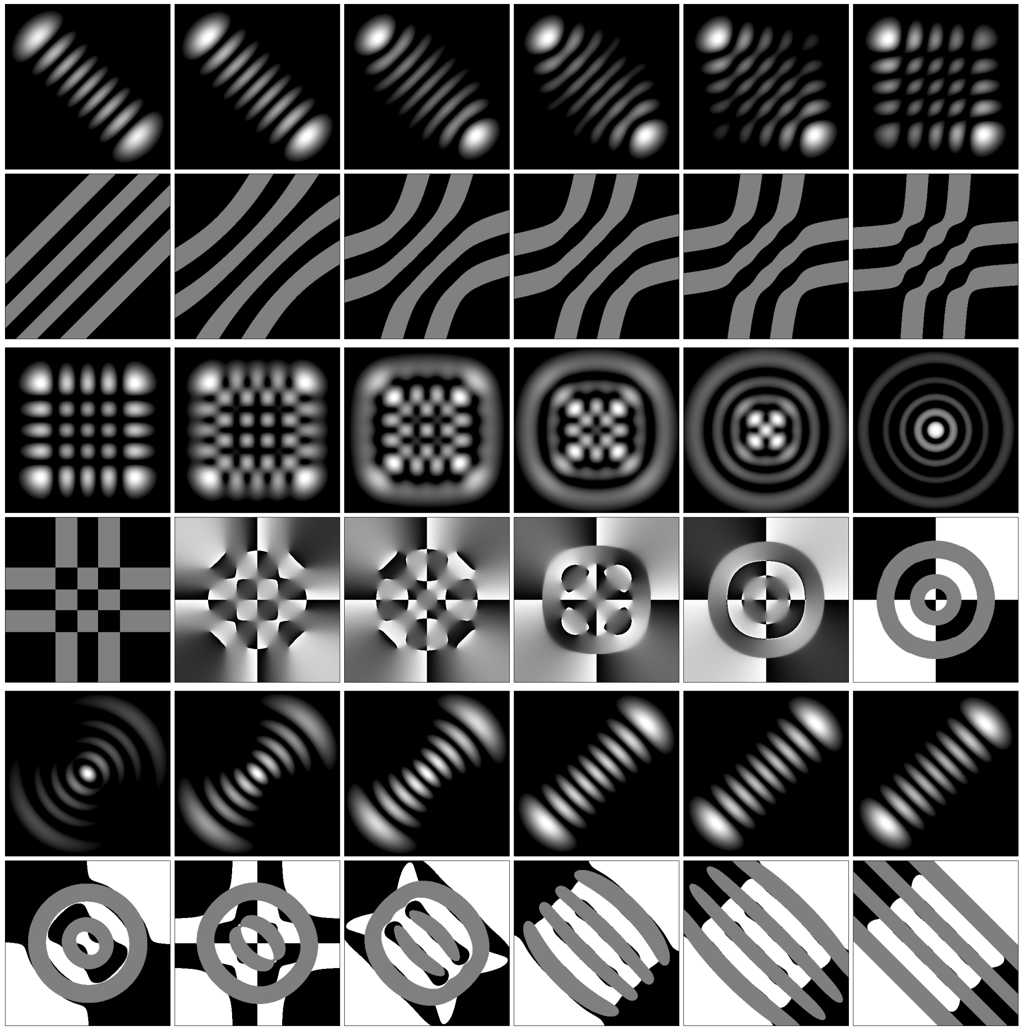


Рис. 6. Интенсивности и фазы функций Эрмита–Лагерра–Гаусса $\mathscr{G}_{4,4}(x, y, z = re^{i\alpha})$ при различных значениях параметров r и α

конечные суммы и преобразования типа Фурье. Среди всех результатов стоит особо отметить формулу (13) преобразования функций Эрмита–Гаусса в функции Лагерра–Гаусса, которая явилась основополагающей для предложенного объединения классов функций.

На самом деле, все вышеизложенные результаты следует рассматривать как вводную часть в изучении функций Эрмита–Лагерра–Гаусса, поскольку функции $\mathscr{G}_{n,m}(x, y \,|\, \alpha)$ допускают обобщение вида (см. рис. 6)

$$\mathscr{G}_{n,m}(x, y, z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{n+m} i^k C_k^{(n,m)}(z) \mathscr{H}_{n+m-k,k}(x, y), \tag{45}$$

где

$$C_k^{(n,m)}(z) = \left(\frac{z + 1/z}{2}\right)^{n-k} \left(\frac{z - 1/z}{2i}\right)^{m-k} P_k^{(n-k,m-k)}\left(-\frac{z^2 + 1/z^2}{2}\right)$$

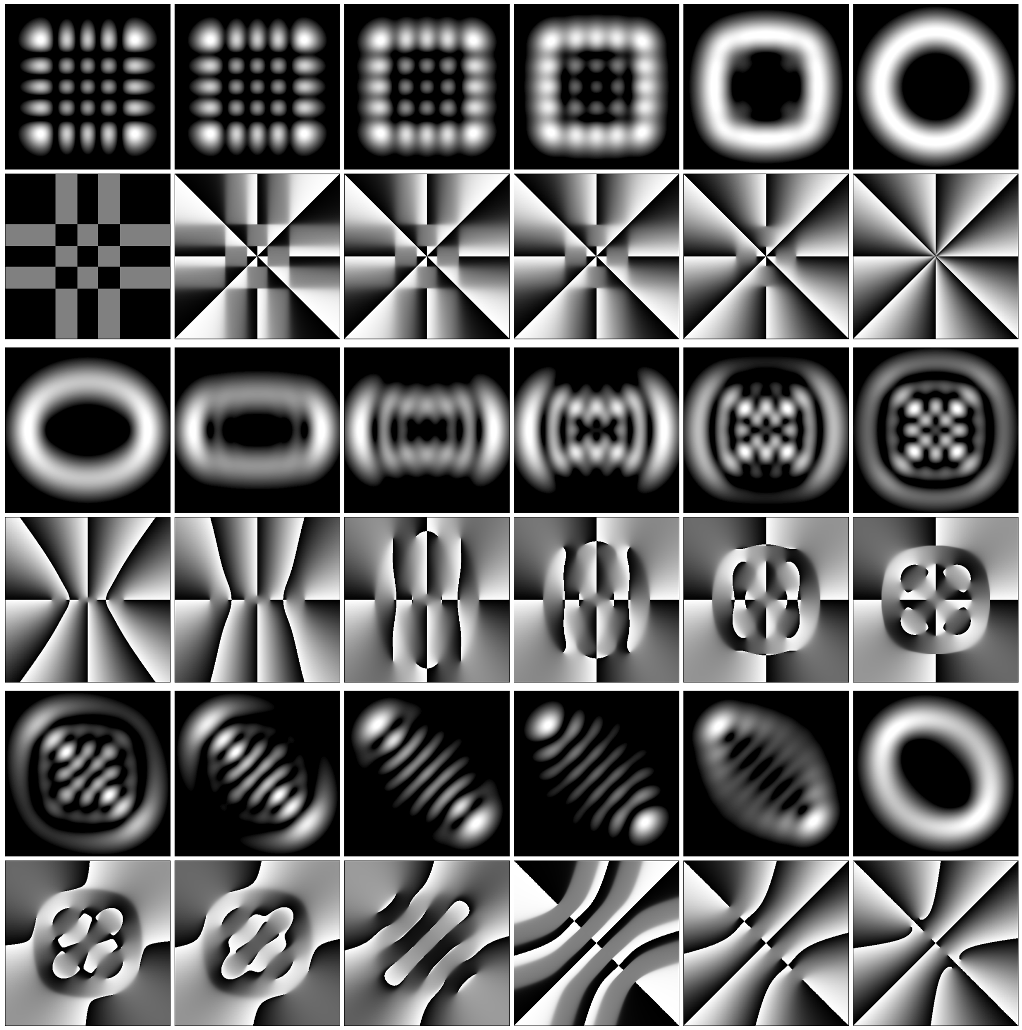


Рис. 6. (окончание)

и z — любое комплексное число, отличное от нуля. Поскольку $\mathscr{G}_{n,m}(x, y, e^{i\alpha}) \equiv \equiv \mathscr{G}_{n,m}(x, y \,|\, \alpha)$, то формула (45) дает возможность распространить функции Эрмита–Лагерра–Гаусса с единичной окружности $|z| = 1$, где они были определены первоначально, на всю комплексную плоскость.

Проведенное в данной работе исследование содержит многие моменты общей теории и носит в какой-то мере характер исторической последовательности: именно так начиналось изучение функций $\mathscr{G}_{n,m}$, понимание необходимости z-параметризации пришло позднее. Кроме того, переход $e^{i\alpha} \mapsto z$ не всегда оправдан: в ряде случаев замена $\mathscr{G}_{n,m}(x, y \,|\, \alpha)$ на $\mathscr{G}_{n,m}(x, y, z)$ не дает ничего нового, порой даже загромождая конечный результат. Тем не менее, только обобщение (45) позволяет составить описание свойств и трансформаций функций Эрмита–Лагерра–Гаусса во всей полноте, в частности, объяснить существование столь похожих и различных одновременно

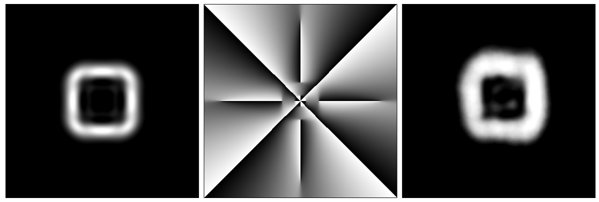


Рис. 7. Интенсивность (a), фаза (b) функции Эрмита–Лагерра–Гаусса и ее оптическая реализация (c). Фазовое распределение показывает наличие у функции двенадцати простых изолированных нулей. Восемь нулей, располагающихся в центральной части, имеют тип z, поскольку при обходе вокруг каждого из них против часовой стрелки получается набег фазы $+2\pi$. Четыре нуля на периферии имеют тип $\overline{z}$, т.к. для них подобный обход дает набег фазы -2π. Точка в центре не является нулем: присутствие лишь черного и белого цветов в ее окрестности говорит о том, что там происходит склейка фаз $\varphi = 0$ и $\varphi = 2\pi$

формул как

$$\sum_{k=0}^{\min(n,m)} 2^k k! \binom{m}{k}\binom{n}{k} H_{n+m-2k}(x) = H_n(x)H_m(x),$$

$$\sum_{k=0}^{\min(n,m)} (-2)^k k! \binom{m}{k}\binom{n}{k} H_{n-k}(x)H_{m-k}(x) = H_{n+m}(x).$$

Обсуждение функций Эрмита–Лагерра–Гаусса хочется закончить следующим замечанием. Функции $\mathscr{G}_{n,m}(x,y,z)$ при $|z| \neq 1$ возникают в оптических экспериментах как самостоятельные объекты, которые первоначально (на стадии α-параметризации) рассматривались как линейные комбинации функций $\mathscr{G}_{n,m}(x,y\,|\,\alpha)$. Пример на рис. 7 показывает, что среди представителей $\mathscr{G}_{n,m}(x,y,z = re^{i\alpha})$ находятся не только функции Лагерра–Гаусса, имеющие кольцевую форму интенсивности, но и функции с интенсивностью в форме границы квадрата. Тем самым, α-переход (при $r = 1$) от функций Эрмита–Гаусса, допускающих разделение переменных в виде $f_1(x)f_2(y)$, к функциям Лагерра–Гаусса, допускающим аналогичное разделение переменных в полярных координатах, дополняется r-переходом (при фиксированном α), соответствующим трансформации интенсивности из круговой в квадратную. Это объединение функциональной и визуальной точек зрения является еще одним доводом в пользу теоретического изучения функций Эрмита–Лагерра–Гаусса в формулировке (45).

Литература

[1] Цикон Х., Фрезе Р., Кирш В., Саймон Б. Операторы Шредингера с приложениями к квантовой механике и глобальной геометрии. М.: Мир, 1990. 408 с.

[2] Маркузе Д. Оптические волноводы. М.: Мир, 1974. 576 с.

[3] Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. М.: Наука, 1979. 384 с.

[4] Хапалюк А.П. Открытые оптические резонаторы и пространственная структура лазерного излучения: Дис. на соискание ученой степени д-ра физ.-мат. наук. Минск, Белорусский университет, 1987. 379 с.

[5] Abramochkin E., Volostnikov V. Beam transformations and nontransformed beams// Optics Comm. 1991. V.83. P. 123–135.

[6] Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983. 752 с.
[7] Хелгасон С. Преобразование Радона. М.: Мир, 1983. 150 с.
[8] Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К. Квантовая теория углового момента. М.: Наука, 1975. 534 с.
[9] Abramochkin E., Volostnikov V. Spiral-type beams// Optics Comm. 1993. V.102. P. 336–350.

HERMITE–LAGUERRE–GAUSSIAN FUNCTIONS[4]

© 2001 E.G. Abramochkin[5]

A unity of two-dimensional Hermite–Gaussian and Laguerre–Gaussian functions is proposed by introducing an additional parameter. Continuous changing of the introduced parameter allows to transform Hermite–Gaussian functions into Laguerre–Gaussian functions keeping some important properties of both function families, for example, the orthogonality in the space $L_2(\mathbb{R}^2)$. The functions (called Hermite–Laguerre–Gaussian functions) are investigated similar to classic orthogonal polynomials. Some properties of this function family (including algebraic and integral representations, the Rodrigues formula, and symmetry properties with respect to the introduced parameter) are obtained. It is shown that the functions are invariant with respect to some integral transformations of Fourier type.

Поступила в редакцию 05/*XI*/2001;
в окончательном варианте — 30/*XII*/2001.

[4]Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. V.G. Volostnikov.

[5]Abramochkin Eugeny Grigor'evich (ega@fian.smr.ru), Dept. of Differential Equations, Samara State University, Samara, 443011, Russia.